

EFEITO SOMMERFELD EM ROTORES COM CARGA DESBALANCEADA

Zwinglio Guimarães-Filho¹, Silvio Luiz Thomaz de Souza², Guilherme Nogueira Cavalcanti³, Eduardo Luís Brugnago⁴, Marina Soares Bittencourt⁵, Adriane Reis⁶

¹ Instituto de Física da USP, zwinglio@if.usp.br

² Universidade Federal de São João Del-Rei, thomaz@ufsj.edu.br

³ Instituto de Física da USP, guilhermencavalcanti@usp.br

⁴ Instituto de Física da USP, eduardolbrugnago@gmail.com

⁵ Instituto de Física da USP, marinabittencourt@usp.br

⁶ Instituto de Física da USP, adrianereis@usp.br

Resumo

Rotores desbalanceados são fonte de energia para a vibração da estrutura a que estão fixados e podem excitar oscilações ressonantes nessas estruturas, reduzindo de forma significativa a velocidade de rotação e a potência útil dos motores. Neste trabalho, inicialmente é descrito um experimento com um motor DC de baixo custo acoplado a uma carga desbalanceada e preso a um suporte que possibilita vibrações, onde observa-se que o sistema pode apresentar dois comportamentos distintos para as mesmas condições experimentais: grande amplitude de oscilação da estrutura acompanhada de uma baixa velocidade de rotação do motor, ou pequena amplitude de oscilação da estrutura combinada a uma velocidade de rotação elevada. Pode-se alternar entre os regimes de operação por meio de perturbações ou amortecimentos na estrutura suporte. Do ponto de vista de sistemas dinâmicos, isso indica a coexistência de atratores. Assim, numa segunda etapa, resultados numéricos obtidos a partir de uma descrição matemática do sistema são apresentados e verifica-se a ocorrência de histerese associada à coexistência de atratores.

Palavras-chave: Efeito Sommerfeld, vibração, ressonância

Introdução

Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld foi um físico alemão que viveu de 1868 a 1951, fez diversas contribuições para a Física, tanto que recebeu 84 nomeações para o prêmio Nobel de Física no período de 1917 a 1951 (THE NOBEL PRIZE ORGANISATION 2024). Apesar das contribuições teóricas de Sommerfeld para o eletromagnetismo, a relatividade e a mecânica quântica serem muito conhecidas e amplamente divulgadas, suas contribuições para a engenharia são bem menos conhecidas, especialmente pelos físicos. Uma dessas contribuições é a descrição do problema das vibrações causadas por um rotor com carga desbalanceada, cuja tradução livre é apresentada a seguir:

“Este experimento corresponde, aproximadamente, ao caso em que o proprietário de uma fábrica tem uma máquina apoiada em uma base ruim trabalhando a 30 HP. Apesar disso, ele obtém um nível efetivo de cerca de apenas 1/3, porque apenas 10 HP estão fazendo trabalho útil, enquanto 20 HP são transferidos para a base.” (SOMERFELD 1902)

O problema descrito por Sommerfeld envolve a transferência de energia do motor para a base onde está apoiado, o que ocorre com maior eficiência quando a rotação do motor entra em ressonância com a base. Ainda mais importante, o fato de excitar o movimento da base reduz a eficiência do motor e, de certa forma, o impede de sair da condição de ressonância, de modo que o aumento da energia disponível para o motor não resulta no aumento da velocidade de rotação, mas no aumento da transferência de energia entre o motor e a base.

Há diversos problemas práticos relacionados a este efeito, como o de máquinas de lavar com carga desbalanceada e, até mesmo o rotor de helicópteros [ECKERT 1996, SINHA 2020]. Do ponto de vista de modelagem, este problema envolve o acoplamento não linear de dois sistemas oscilatórios, o motor e a base, e apresenta comportamentos típicos de sistemas não lineares, como coexistência de atratores e histerese.

Assim, inicialmente apresentamos formas de se observar qualitativa e quantitativamente o problema descrito por Sommerfeld e, em seguida, um modelo dinâmico e os correspondentes resultados numéricos, que ajudam a compreender as observações experimentais.

Observações experimentais

A dependência da velocidade de rotação dos motores com relação à excitação da estrutura onde está apoiado pode ser observada, de forma qualitativa, por meio de uma simples demonstração usando um pequeno motor de corrente contínua alimentado por pilhas e tendo uma carga desbalanceada acoplada ao seu eixo. A Figura 1(a) mostra um motor DC modelo FC-130 alimentado por duas pilhas AA (3V) que tem um pino de tomada adaptado como carga. Observa-se que se o motor for mantido pouco preso entre os dedos, a rotação se dá em baixa velocidade, pois o motor efetua um movimento oscilatório bastante intenso. Por outro lado, quando o motor está fixamente preso entre os dedos, a velocidade de rotação aumenta significativamente e o movimento oscilatório apresenta amplitude reduzida. Um filme com esta demonstração pode ser visto em <https://youtube.com/shorts/akTwA0XXZ04> e está disponível em (GUIMARÃES-FILHO 2024). Apesar de bastante simples e diretamente associada à citação original de Sommerfeld, essa observação experimental é de difícil quantificação.

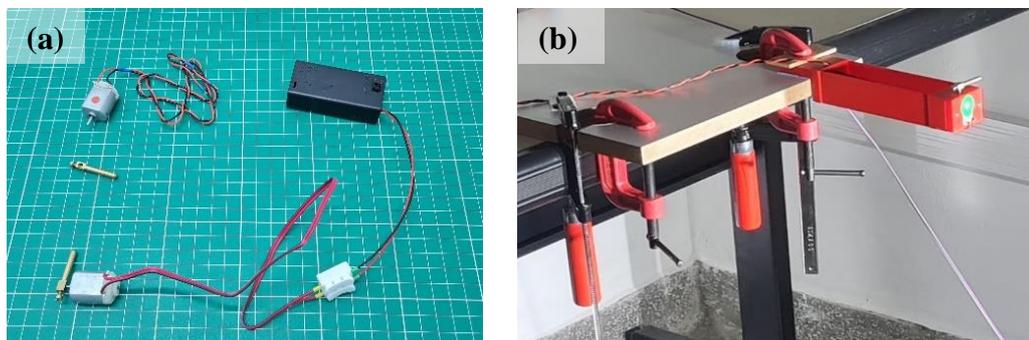


Figura 1: (a) Material para demonstração qualitativa do efeito da redução de potência efetiva do motor quando o suporte não é bem fixado. (b) Arranjo utilizado para fazer as medições quantitativas.

Uma observação experimental adequada para quantificações pode ser feita fixando-se o motor em uma estrutura móvel que, por sua vez, é acoplada a uma estrutura

rígida por meio de uma ligação flexível, como, por exemplo, duas hastes paralelas de material flexível, conforme ilustrado na Figura 1(b).

Com o uso do arranjo ilustrado na Figura 1(b), observa-se que o sistema pode ter dois comportamentos distintos para uma mesma configuração (isto é, mesmo suporte e carga e mesma tensão de alimentação para o motor): pode-se observar uma oscilação de grande amplitude da base com rotação lenta do motor, ou um reduzido movimento de oscilação da base com rotação elevada do motor. É interessante observar que é possível passar de um regime para o outro apenas fazendo-se pequenas perturbações no sistema ou uma nova inicialização do sistema com condições iniciais diferentes, como pode ser visto em https://youtube.com/shorts/1s6SpH_st4I e está disponível em (GUIMARÃES-FILHO 2024).

Filmando-se o movimento da estrutura móvel juntamente com o motor é possível medir a amplitude de oscilação, bem como determinar o período de oscilação, que, por sua vez, coincide com o período de rotação do motor, apesar do movimento de rotação não ter velocidade angular constante. Essas medições foram feitas com o uso de uma filmadora em câmera lenta com posterior análise no Tracker (TRACKER 2024), obtendo-se para o caso do movimento de oscilação elevada um período de $(0,093 \pm 0,001)$ s, ao passo que para o movimento de rotação elevada o período é $(0,026 \pm 0,001)$ s, como pode ser visto nas Figuras 2(a) e 2(b).

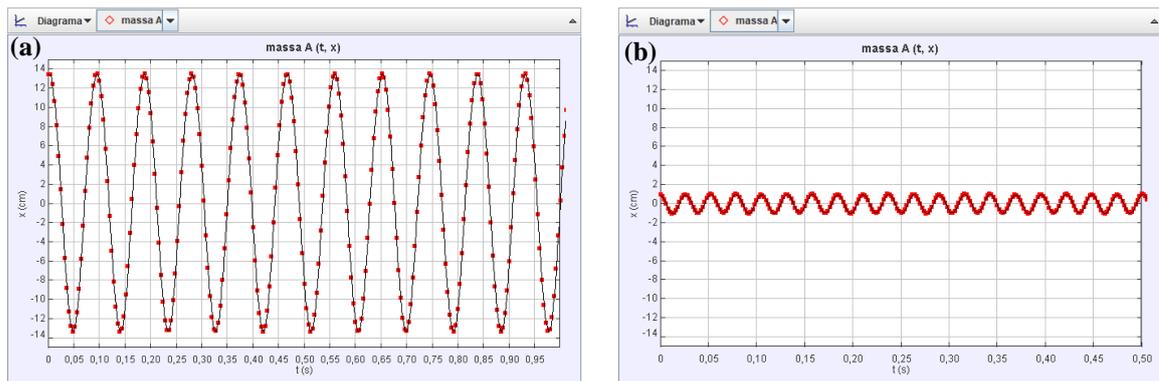


Figura 2: (a) Posição do suporte quando no movimento de oscilação elevada e rotação reduzida, resultando em período de $0,093(1)$ s. (b) Posição do suporte no movimento de rotação elevada e oscilação reduzida, exibindo período de $0,026(1)$ s. Nos dois casos o motor estava alimentado com $1,5V$ e todas as demais configurações foram mantidas.

Aumentando-se a tensão de alimentação do motor, observa-se, no caso do movimento de oscilação elevada, o aumento da amplitude de oscilação sem grande variação no período, ao passo que no caso do movimento de rotação elevada, a amplitude da oscilação se mantém praticamente inalterada, porém o período do movimento reduz significativamente, indicando que a velocidade média de rotação aumentou, pois os movimentos de translação e de rotação têm períodos iguais.

Com o motor desligado, o movimento oscilatório amortecido da estrutura móvel pode ser usado para se obter o período das oscilações naturais do suporte móvel. Para isso, a estrutura foi deslocada da posição de equilíbrio e liberada para oscilar, descrevendo a oscilação amortecida apresentada na Figura 3, cujo período natural é $0,093$ s.

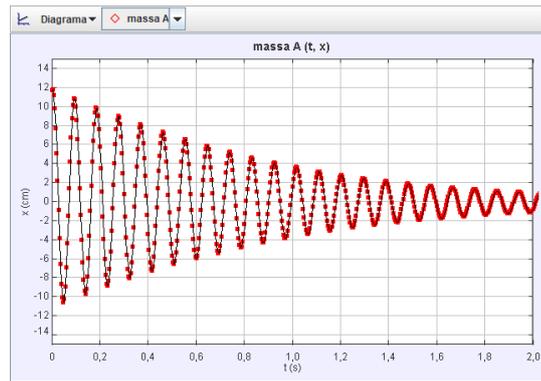


Figura 3: Posição do suporte no movimento de oscilação amortecida, cujo período é $0,093(2)$ s.

Essas observações sugerem que o movimento de oscilação elevada corresponde a uma ressonância com a frequência natural de oscilação da estrutura móvel ao qual o motor está preso. Além disso, revelam que os dois regimes, de oscilação elevada e de rotação elevada, são possíveis de se observar para uma mesma configuração do sistema. Para compreender essas observações é preciso fazer um modelo dinâmico do experimento, como apresentado a seguir.

Modelo dinâmico

Utilizamos o formalismo lagrangiano para obter as equações de movimento, tal procedimento é bastante comum no estudo de sistemas mecânicos acoplados (WARMINSKI & KEICIK 2009, KAPITANIAK 2013). A Figura 4 apresenta o modelo esquemático de um oscilador denominado não-ideal (SOUZA 2005, SOUZA 2017). Esse sistema é composto por um bloco de massa M conectado a uma estrutura fixa por meio de uma mola linear, que exerce uma força restauradora $-k \cdot X$, e um amortecedor, cuja força é dada por $-b_1 \cdot \dot{X}$. Acoplado ao bloco, há um rotor de massa m ligado a uma haste de comprimento r . Nesse modelo, X representa o deslocamento do bloco, enquanto φ indica o deslocamento angular do rotor.

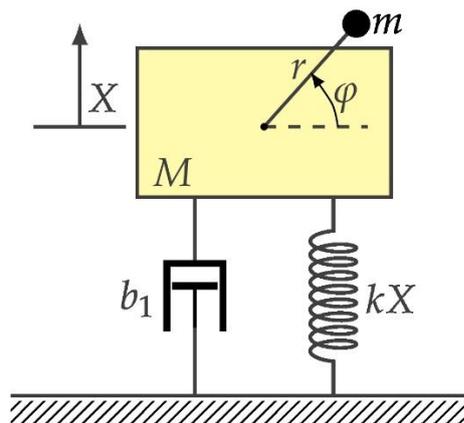


Figura 4: Esquema do oscilador não-ideal.

Nesse caso, utilizando as equações de Euler-Lagrange, as equações de movimento são dadas por:

$$(m + M) \frac{d^2 X}{dt^2} + b_1 \frac{dX}{dt} + kX = m.r \left[\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin(\varphi) - \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \cos(\varphi) \right], \quad (1)$$

$$m.r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + b_2 \frac{d\varphi}{dt} = A - m.r \frac{d^2 X}{dt^2} \cos(\varphi), \quad (2)$$

onde b_2 é o termo de dissipação associado ao movimento de rotação do motor. Os termos do lado direito das equações representam os acoplamentos entre o movimento do rotor e do bloco e a constante A indica a fonte de energia para o motor (no caso de um motor DC, A é proporcional à tensão aplicada ao motor).

Para facilitar a solução numérica das equações de movimento, é usual efetuar uma troca de variáveis para adimensionalizar as grandezas envolvidas. Assim, considerando $x \equiv X/r$ e o tempo adimensional $\tau \equiv \omega_0.t$, com $\omega_0 \equiv \sqrt{k/(m+M)}$ (a frequência angular associada a oscilação natural da base), as equações de movimento são reescritas como:

$$\ddot{x} + \beta_1 \dot{x} + x = \varepsilon [\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - \ddot{\varphi} \cos(\varphi)], \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi} + \beta_2 \dot{\varphi} = \alpha - \ddot{x} \cos(\varphi). \quad (4)$$

para $\beta_1 \equiv \frac{b_1}{(m+M)\omega_0}$, $\beta_2 \equiv \frac{b_2}{m.r^2\omega_0^2}$, $\varepsilon \equiv \frac{m}{m+M}$ e $\alpha \equiv \frac{A}{m.r^2\omega_0^2}$.

Devido aos termos não lineares das equações de movimento, a solução desse sistema precisa ser obtida por integração numérica. Para isso, é preciso reescrever as equações (3) e (4) na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeiro grau. Neste sentido, é necessário introduzir duas novas grandezas, a velocidade linear, $v = \dot{x}$, e a velocidade angular, $\omega = \dot{\varphi}$, de modo que as derivadas de segunda ordem de x e φ possam ser escritas como derivadas de primeira ordem dessas novas grandezas: $\ddot{x} = \dot{v}$ e $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$. Este é um procedimento bastante usual com integração numérica de equações de movimento.

Assim, o sistema de equações de movimento escrito de forma adequada para integração numérica é dado por um conjunto de quatro equações acopladas:

$$\dot{x} = v \quad (5)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{1 - \varepsilon [\cos(\varphi)]^2} [\varepsilon \omega^2 \sin(\varphi) - \beta_1 v - x - (\alpha - \beta_2 \omega) \varepsilon \cos(\varphi)] \quad (6)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{1 - \varepsilon [\cos(\varphi)]^2} [(-\varepsilon \omega^2 \sin(\varphi) + \beta_1 v + x) \cos(\varphi) + \alpha - \beta_2 \omega] \quad (8)$$

Um exemplo da integração das equações de movimento (5)-(8) usando Python pode ser visto em um arquivo compartilhado do *Google Colaboratory* disponível na página de materiais suplementares deste trabalho (GUIMARÃES-FILHO 2024).

Simulação numérica

Nesta seção, apresentamos os resultados das simulações numéricas. Para a integração das equações de movimento, usamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo. Os parâmetros foram fixados em $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0,02$ e $\beta_2 = 1,5$.

Considerando uma mesma tensão de alimentação, isto é, o mesmo valor $\alpha = 3,5$, as séries temporais de duas soluções periódicas iniciadas em condições diferentes (posição inicial do bloco ligeiramente diferente) são apresentadas nas Figuras 5(a)-(f).

Inicialmente, observa-se um comportamento transitório, conforme mostrado nas Figuras 5(b) e 5(e), porém, o sistema tende a soluções assintóticas, como ilustrado nas Figuras 5(c) e 5(f). Essas soluções assintóticas são chamadas de atratores. Neste caso, atratores diferentes foram obtidos para o mesmo conjunto de parâmetros de controle do sistema, mas com condições iniciais distintas, reproduzindo o fenômeno observado experimentalmente (as Figuras 2(a) e 2(b) correspondem aos casos mostrados nas Figuras 5(c) e 5(f), respectivamente). Esse é um fenômeno tipicamente não linear denominado coexistência de atratores.

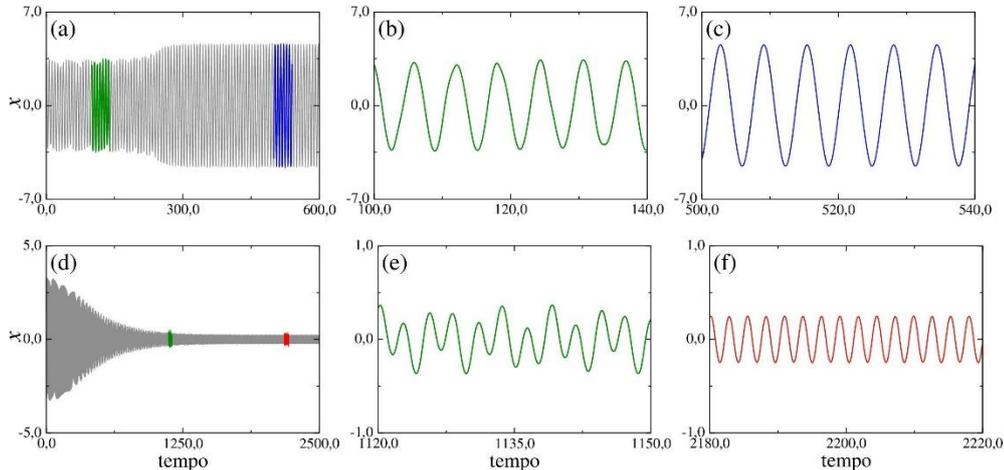


Figura 5: Séries temporais da variável dinâmica x para duas condições iniciais que diferem ligeiramente apenas pelo valor da posição inicial: $x_0=3,2$ (a)-(c) e $x_0=3,1$ (b)-(f). A fase inicial, φ_0 , foi definida como zero, assim como as velocidades iniciais de translação e de rotação, \dot{x}_0 e $\dot{\varphi}_0$. Os parâmetros do sistema são iguais: $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0,02$, $\beta_2 = 1,5$ e $\alpha = 3,5$.

Na Figura 6(a), é apresentado um plano de fase, com a velocidade \dot{x} versus deslocamento x , dos dois atratores ilustrados nas Figuras 5(c) e 5(f). Neste caso, a coexistência de atratores está associada ao efeito Sommerfeld (GONZÁLEZ-CARBAJAL 2023, FELIX e BALTHAZAR 2009), mostrado na Figura 6(b).

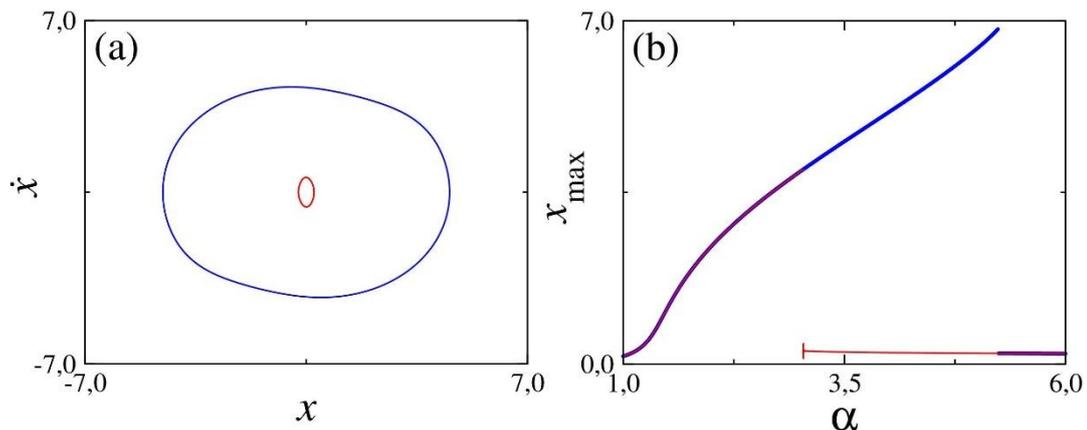


Figura 6: (a) Plano de fase da velocidade, \dot{x} , em função do deslocamento, x , ilustrando a coexistência de atratores. O atrator representado em azul corresponde à série temporal apresentada na Figura 5(c), enquanto o atrator em vermelho corresponde à Figura 5(f). (b) Efeito Sommerfeld para o valor máximo local de x (proporcional à amplitude da oscilação) em função do parâmetro α (termo relacionado à fonte de energia do motor).

Ao aumentar lentamente o parâmetro de controle α , observamos na Figura 6(b), o comportamento da curva representada em azul: um aumento na amplitude de oscilação, seguido por uma mudança abrupta para outro atrator de menor amplitude

de oscilação do bloco. Por outro lado, ao diminuir lentamente o parâmetro de controle a partir de uma condição inicial no atrator de baixa amplitude de oscilação, representado na linha vermelha, observamos um fenômeno de histerese, o que implica na coexistência de atratores.

Discussões e conclusão

Como mostrado por meio dos experimentos e da simulação numérica, a excitação do movimento oscilatório ressonante do suporte por um rotor com carga desbalanceada afeta significativamente a velocidade de rotação do motor, como apontado por Sommerfeld (SOMMERFELD 1902). No caso do experimento quantitativo e da correspondente modelagem numérica, observa-se que a coexistência de atratores está relacionada a uma histerese, dois efeitos que só podem ser observados em sistemas dinâmicos não lineares.

A histerese pode ser entendida considerando que cada atrator tem uma bacia de atração (isto é, um conjunto de condições iniciais que levam o sistema para a órbita relacionada àquele atrator) que não se altera de forma significativa para pequenas modificações do parâmetro de controle enquanto as duas órbitas forem estáveis. Assim, ao alterar lentamente um dos parâmetros de controle do sistema a tendência é que ele continue no mesmo atrator. Por esse motivo, ao se aumentar a tensão de alimentação, o que se observa é a manutenção do sistema no atrator relacionado ao regime de oscilação de amplitude elevada, até a tensão na qual ocorre a perda de estabilidade desta órbita e resta apenas o outro atrator (o que, no caso do exemplo numérico mostrado na Figura 6, ocorre para $\alpha \approx 5,5$), ao passo que, quando na condição de rotação elevada, baixando-se a tensão o sistema continua nesta condição enquanto a órbita for estável (no caso da Figura 6, até $\alpha \approx 3,1$).

Este problema será utilizado como uma das atividades da disciplina de Introdução ao Caos do Instituto de Física da USP, oferecida como optativa para alunos de licenciatura e dos bacharelados em Física e Física Médica do IFUSP, pois apesar de não haver um atrator caótico na configuração considerada, este problema envolve diversos conceitos relacionados a sistemas dinâmicos não lineares o que o torna adequado a uma disciplina que lida com esse conteúdo. Uma das formas de fazer aparecer comportamento caótico neste tipo de sistema é introduzindo-se colisões, como em (SOUZA 2005).

Este problema também pode ser utilizado para ilustrar o fenômeno da ressonância. Uma das assinaturas claras da ocorrência de ressonância neste sistema é o fato do período do movimento oscilatório se manter igual ao período das oscilações naturais do suporte para uma ampla faixa de valores da tensão aplicada ao motor (subindo a tensão na faixa entre $\sim 0,7$ e $\sim 3,0$ V, o período não sofre alterações perceptíveis em medidas com incerteza de $\sim 0,004$ s, ao passo que a amplitude do movimento aumenta uma ordem de grandeza). Do ponto de vista energético, isso indica que a energia adicional fornecida ao sistema quando se aumenta a tensão aplicada no motor é utilizada basicamente para excitar o movimento oscilatório da base, o que implica na redução da eficiência energética associada ao movimento de rotação do motor.

Referências

ECKERT, M., *The Sommerfeld effect: theory and history of a remarkable resonance phenomenon*, Eur. J. Phys. **17** (1996) 285.

- FELIX, J. L. P. e BALTHAZAR, J. M., *Comments on a nonlinear and nonideal electromechanical damping vibration absorber, Sommerfeld effect and energy transfer*, *Nonlinear Dynamics* **55** (2009) 1.
- GONZÁLEZ-CARBAJAL, J. *et al.*, *Sommerfeld effect in a vibrocompaction process*, *International Journal of Mechanical Sciences* **254** (2023) 108407.
- GUIMARÃES-FILHO, Z., *Materiais suplementares sobre o efeito Sommerfeld*, <https://fap.if.usp.br/~zwinglio/sommerfeld.html>. Acessado pela última vez em 07/09/2024.
- KAPITANIAK, M. *et al.*, *Synchronous motion of two vertically excited planar elastic pendula*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **18** (2013) 2088.
- SINHA, A. *et al.*, *Sommerfeld effect in a single-DOF system with base excitation from motor driven mechanism*, *Mechanism and Machine Theory* **148** (2020) 103808.
- SOMMERFELD, A., *Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*, *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* **46** (1902) 391.
- SOUZA, S. L. T. *et al.*, *Impact dampers for controlling chaos in systems with limited power supply*, *Journal of Sound and Vibration* **279** (2005) 955.
- SOUZA, S. L. T. *et al.*, *Characterization in bi-parameter space of a non-ideal oscillator*, *Physica A* **466** (2017) 224.
- THE NOBEL PRIZE ORGANISATION, *Nomination Archive: Arnold Sommerfeld*, https://www.nobelprize.org/nomination/archive/show_people.php?id=8661. Acessado pela última vez em 02/09/2024.
- WARMINSKI, J. e KECIK, K. *Instabilities in the main parametric resonance area of a mechanical system with a pendulum*, *Journal of Sound and Vibration* **322** (2009) 612.