Termo-Estatística (*2013*)

5ª Aula

Probabilidade e Distribuição Binomial

Prof. Alvaro Vannucci

- Na última apresentação vimos :

- Problema envolvendo bolas de bilhar – em número de 6 - que queremos colocar nas 6 caçapas de uma mesa de bilhar. De quantas maneiras conseguimos fazer isto?

- Se todas forem distinguíveis, teremos **6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 6! maneiras possíveis.**

- No caso de se ter 10 bolas sendo 4 delas número 5 e 2 bolas número 6, o número de ***Combinações*** possíveis :

$$\frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6!}{4!(6-4)!}$$

- De forma que a expressão geral das possíveis ***Combinações*** será:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Vimos também que, o cálculo da probabilidade de ocorrer um resultado (ou um conjunto de resultados) que satisfaça uma condição ou exigência ***E***, é feito utilizando a expressão:

$$p(E) = \frac{n^{o}\ \text{de resultados favoráveis a E}}{n^{o}\ \text{total de resultados possíveis}}$$

- Sempre lembrando que:

1ª) O cálculo de probabilidade que ***evento A ou evento B*** (**independentes**) ocorram, é dado por: $P = P(A) + P(B)$

2ª) O cálculo de probabilidade que ***evento A e evento B*** (**independentes**) ocorram, é dado por: $P = P(A) \cdot P(B)$

Distribuição de Densidade de Probabilidade Binomial

- Um ***Experimento Estatístico*** possui 3 aspectos em comum:

- Possui mais de um resultado (‘***cara***’ ou ‘***coroa***’, por ex.).

- Cada resultado possível pode ser especificado com antecedência (vai dar ‘***cara***’ ou ‘***coroa***’).

- Cada resultado possui uma probabilidade específica dele ocorrer - ou não (probabilidade ½, no caso de ***cara*** ou ***coroa***)

- Como veremos, uma ***distribuição binomial*** descreve adequadamente ***Experimentos Estatísticos*** que possuem estas características, ou seja:

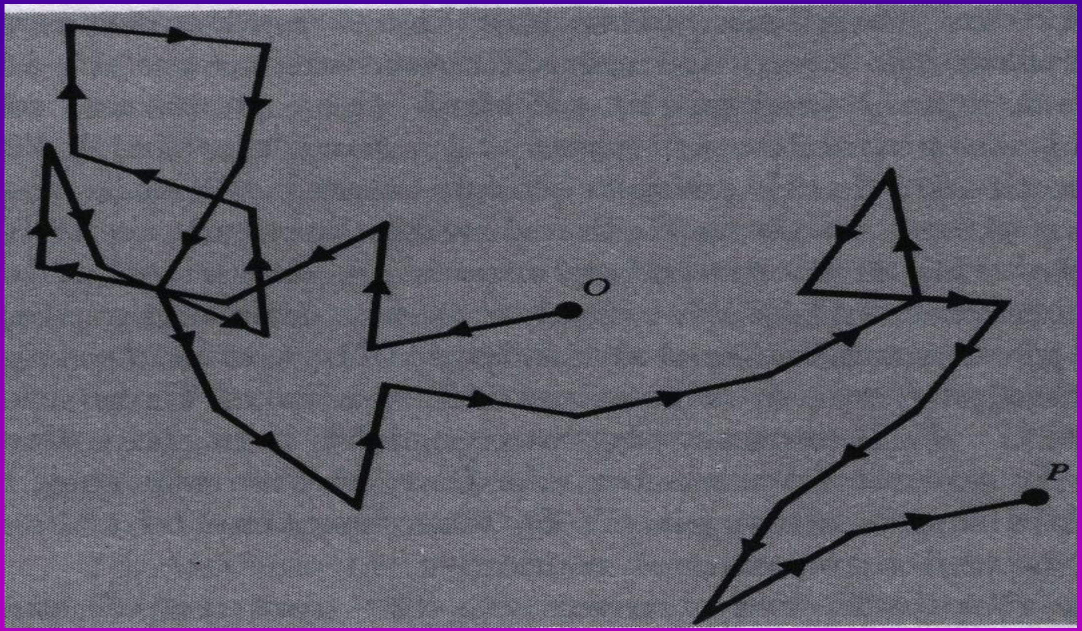
- O experimento é realizado em ***n*** repetidas tentativas.

- Cada tentativa realizada fornece ***um*** de **apenas** ***dois*** resultados possíveis - que estaremos designando por ***sucesso*** (***p***) ou ***fracasso*** (***q*** = 1- ***p***).

- A probabilidade de ***sucesso*** (***p***) ***mantêm-se a mesma*** durante todo o experimento.

- Cada nova tentativa é ***independente*** das tentativas realizadas anteriormente.

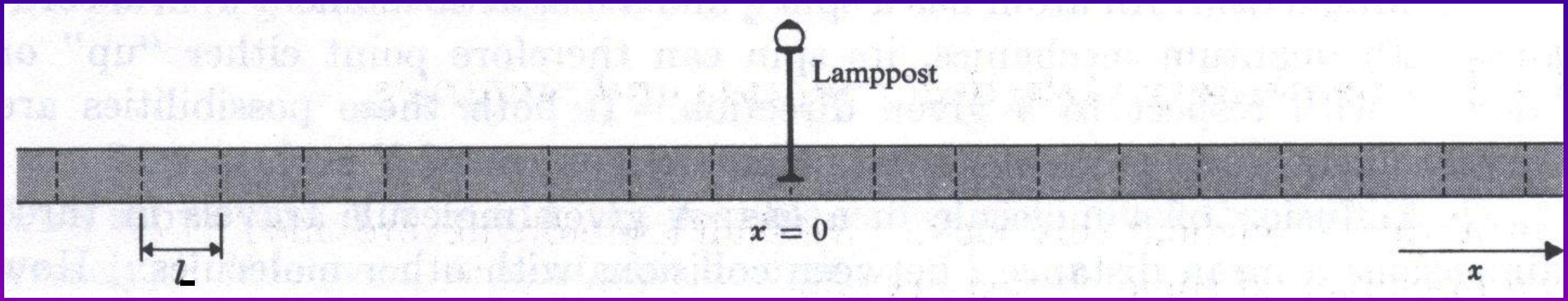
• O problema dos '***sucessivos deslocamentos aleatórios***' (***random - DRUNK - walk***) será um bom exemplo para discutirmos a questão de ***Experimentos Estatísticos***.



• Vamos considerar cada deslocamento ***(passo*** dado pela pessoa) como tendo sempre o mesmo comprimento ***L***.

• E vamos chamar de ***p*** a probabilidade de passo para a direita e de ***q = 1-p*** a probabilidade de passo para a esquerda (em ***1D***) que podem – ou não (rua inclinada, por ex.) – ser iguais (***1/2***).

• Na figura abaixo, em ***1D***, vemos que a posição final será $\boldsymbol{x = mL}$; sendo que $\boldsymbol{m}$ poderá ser *maior*, *menor* ou *igual* a zero.



• Pergunta: após N passos aleatórios, qual a probabilidade de ocorrer um deslocamento $\boldsymbol{x = mL}$, com $-N \leq \boldsymbol{m} \leq N$?

• Ou seja, qual é a probabilidade de se ter o deslocamento (posição) final sendo dado por $\boldsymbol{x = mL}$ após N passos, sendo $\boldsymbol{n_1}$ para a direita e $\boldsymbol{n_2}$ para a esquerda (tendo-se $\boldsymbol{n_1 + n_2 = N}$).

• Note que $\boldsymbol{m = n_1 - n_2}$; como $\boldsymbol{n_2 = N - n_1} \rightarrow \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n_1 - N + n_1} =$ $\boldsymbol{= 2n_1 - N}$ ($\therefore$ se N é ***par/impar***, possíveis $\boldsymbol{m}$ serão ***par/impar***).

• Agora, sendo ***p*** a probabilidade de um passo para a direita e de ***q* = 1- *p*** a probabilidade de um passo para a esquerda, a probabilidade de serem dado n_1 passos para a direita *e* n_2 passos para a esquerda será:

$$\underbrace{(p \cdot p \cdot p \,.....\, p)}_{(n_1 \text{ termos})} \cdot \underbrace{(q \cdot q \cdot q \,.....\, q)}_{(n_2 \text{ termos})} = p^{n_1} q^{n_2}$$

• Há muitas maneiras possíveis para que os passos sejam dados. Note, porém, que estes n_1 e n_2 passos, por se tratarem de ***grandezas indistinguíveis***, o número de possibilidades (combinações possíveis) será:

$$\frac{N!}{n_1!\,n_2!} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$; como no caso das bolas de bilhar

• Desta forma, ***a <u>probabilidade de que aconteça</u> <u>uma certa sequência de passos</u>*** (***p*** passos para a <u>direita</u> e ***q = 1- p*** passos para a <u>esquerda</u>), será fornecida multiplicando-se a <u>probabilidade</u> desta sequência ($p^{n_1} \cdot q^{n_2}$) pelo <u>*número de combinações*</u> possíveis, ou seja:

$$P_{N,n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\ p^{n_1}\ q^{N-n_1}$$

• Que representa a ***probabilidade*** (***P***) de se <u>obter sucesso</u> ***n_1* vezes** de ***N tentativas*** em um experimento.

• Esta expressão corresponde à chamada "***Distribuição de Densidade de Probabilidade Binomial***"

Supor agora uma moeda sendo lançada ***5 vezes seguidas***, de forma independente. Qual a probabilidade de se obter ***3 caras***?

- Vamos resolver este problema de 2 modos diferentes.

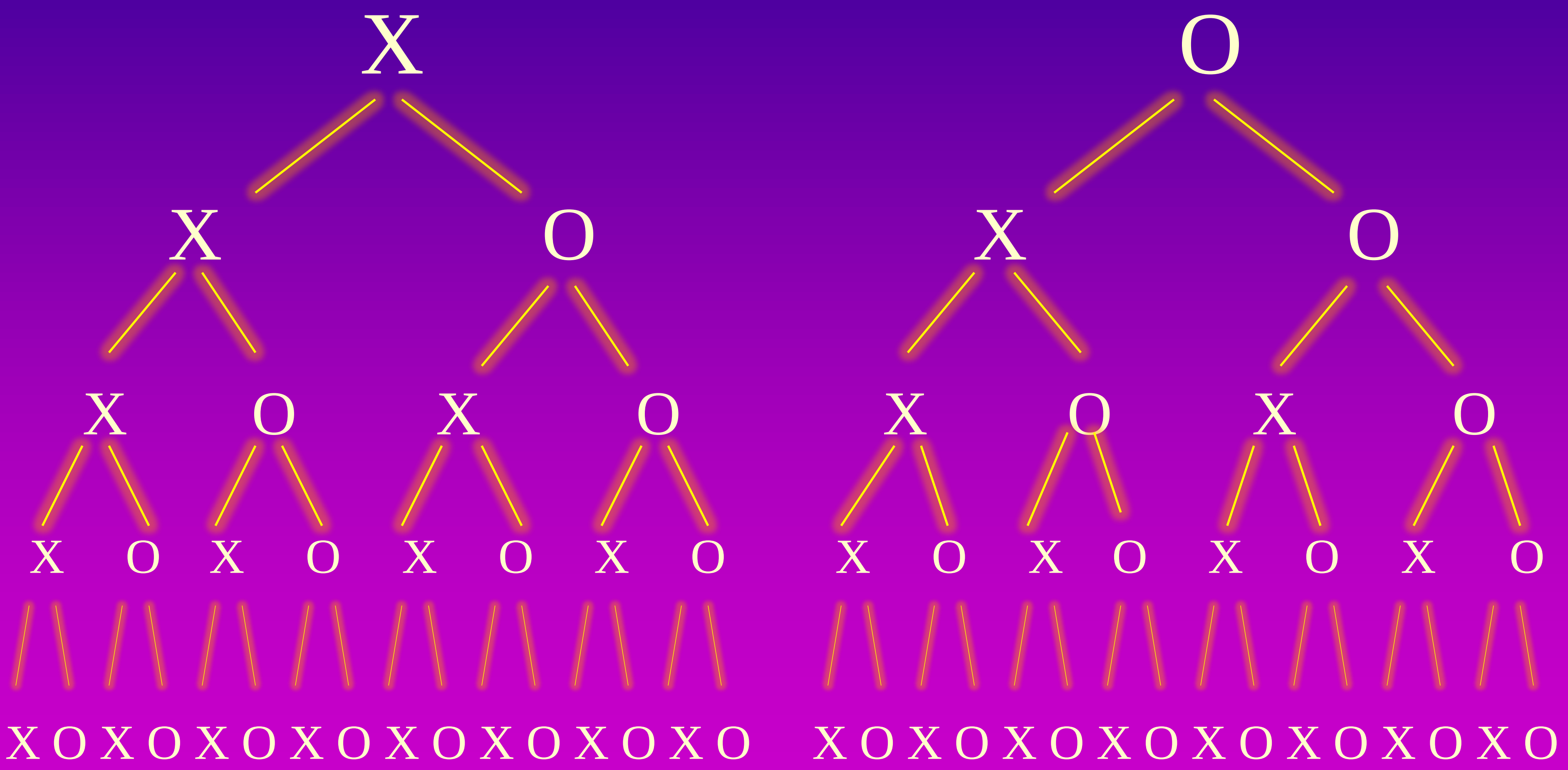
- Inicialmente, vamos utilizar a expressão básica de cálculo de probabilidade:

$$\boxed{p\,(E) = \frac{n^o \text{ de resultados favoráveis a E}}{n^o \text{ total de resultados possíveis}}}$$

- Precisamos saber o nº total de resultados possíveis e os que satisfazem a nossa exigência (3 caras em 5 lançamentos)

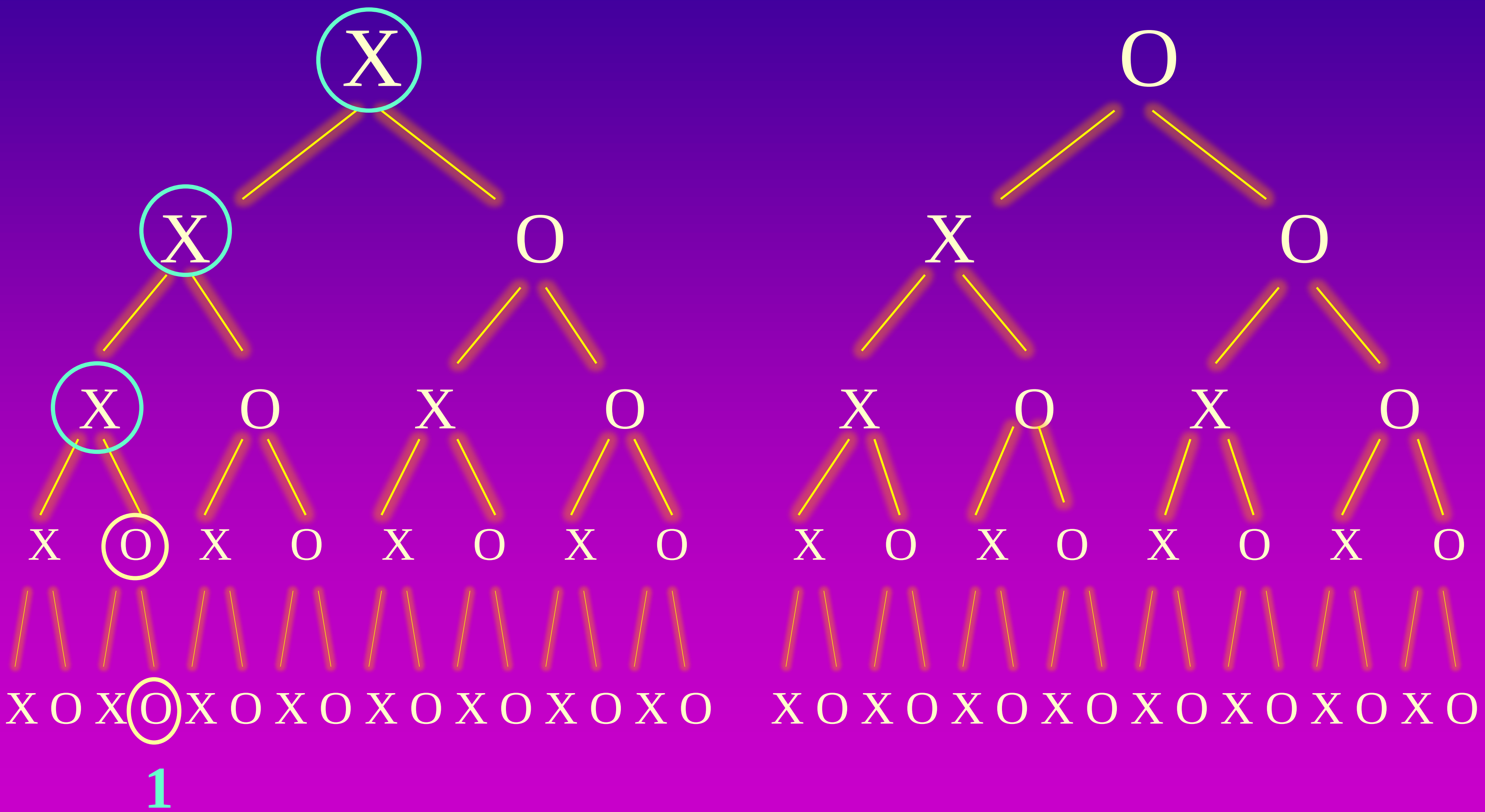
- Qual seria o *Número Total* de resultados possíveis?

- Realizando os lançamentos:

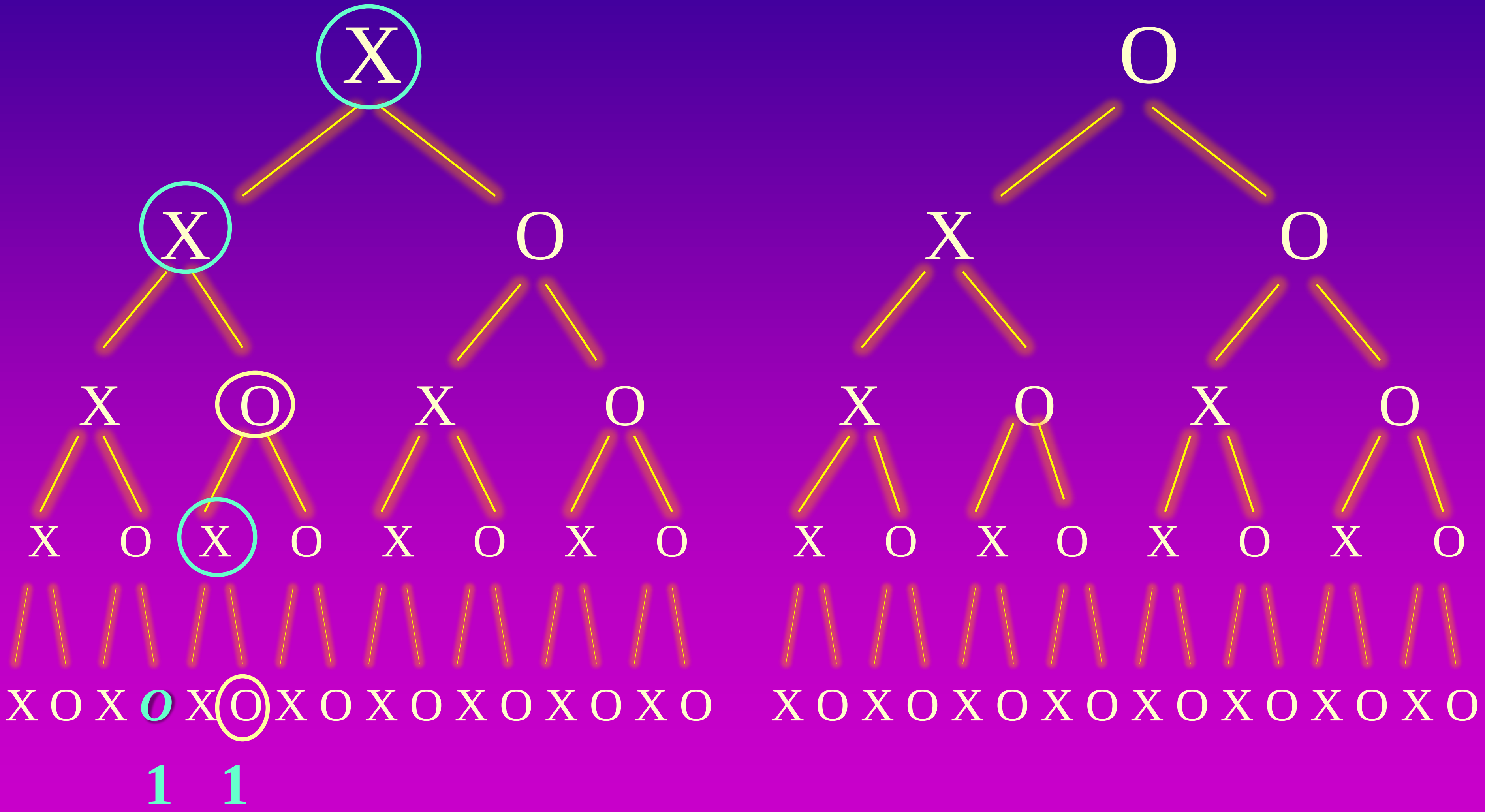


- Temos então que o *Número Total* de resultados possíveis é **32**

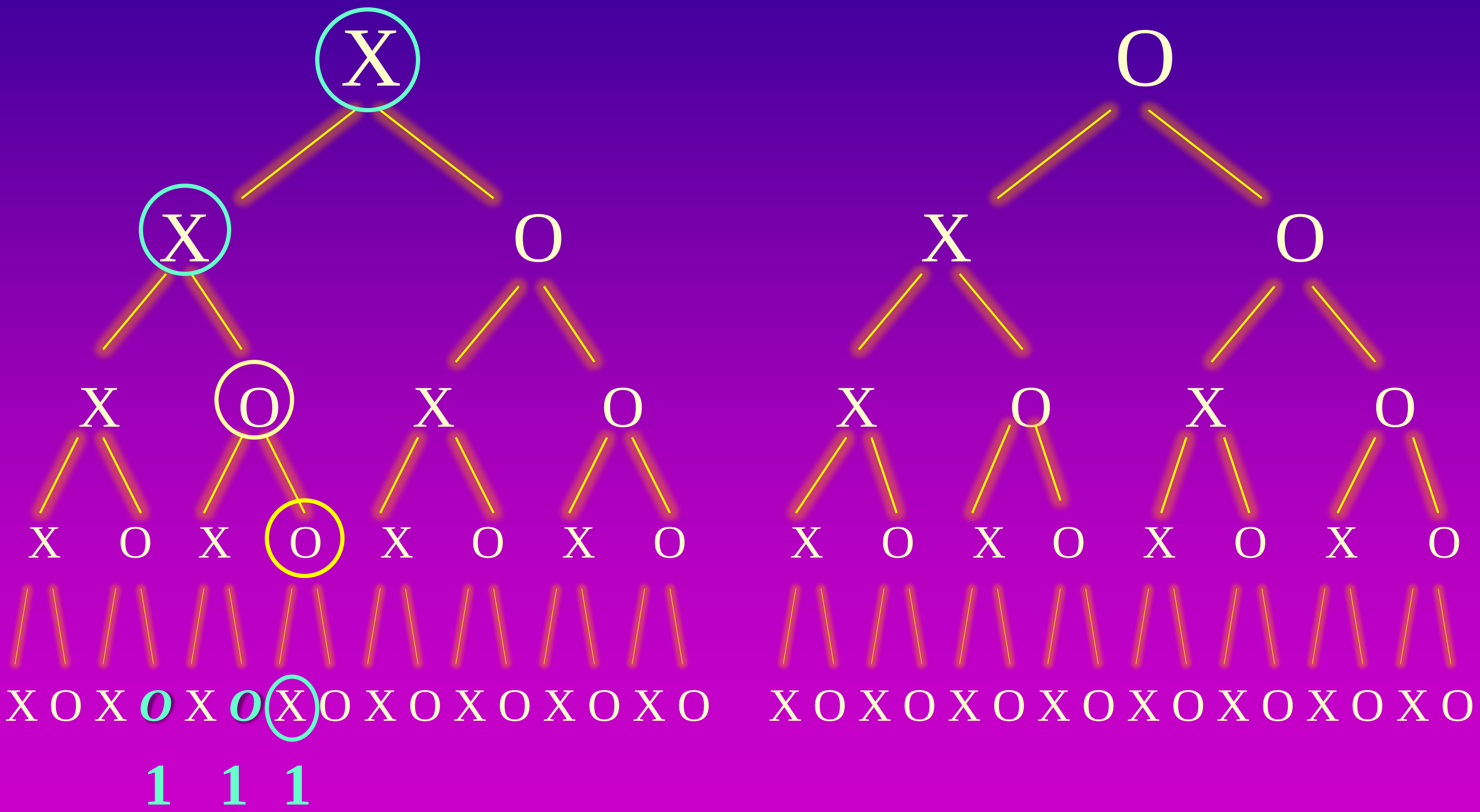
- E qual seria o número de <u>resultados favoráveis</u> (que satisfaz a nossa exigência de 3 caras) ?



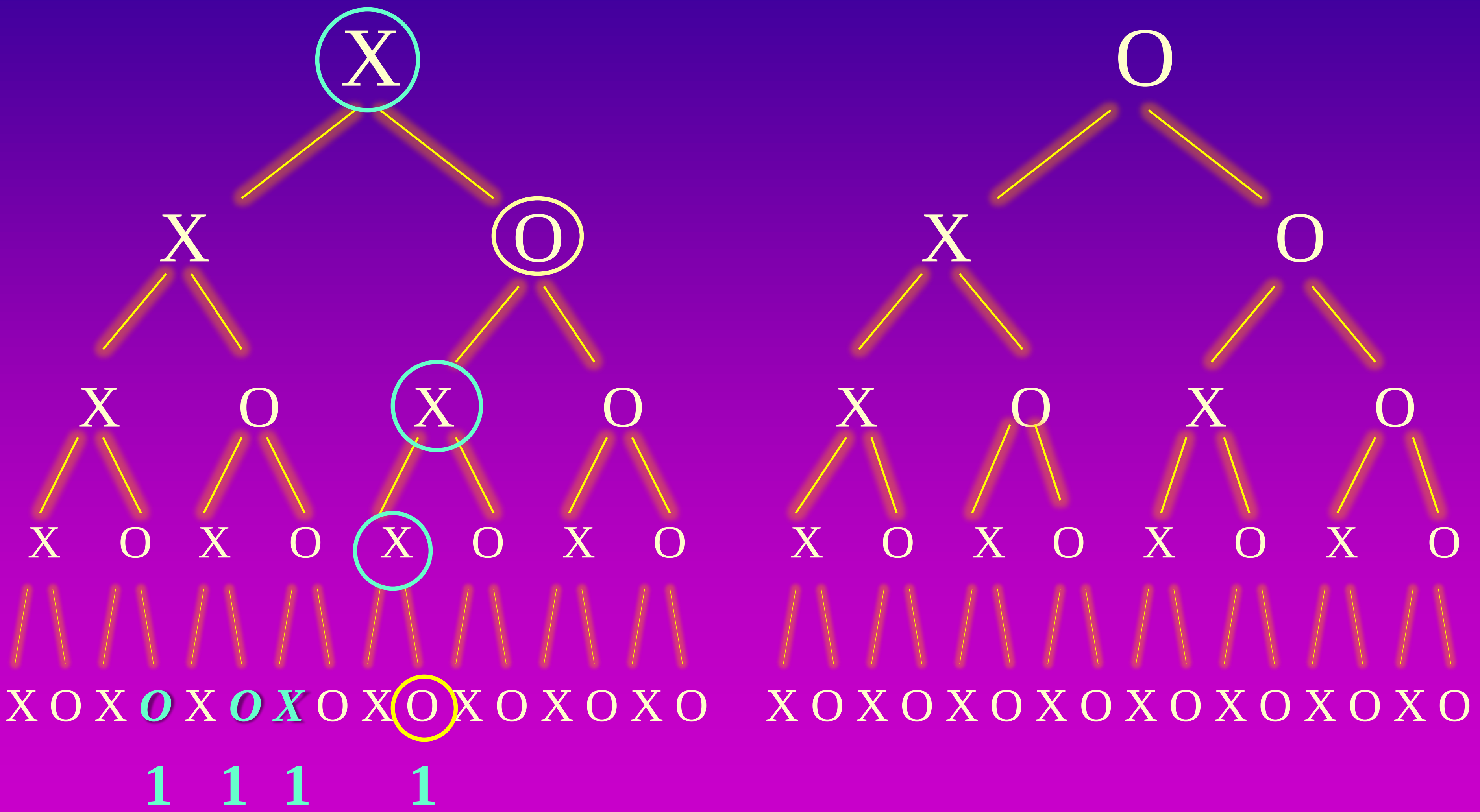
(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



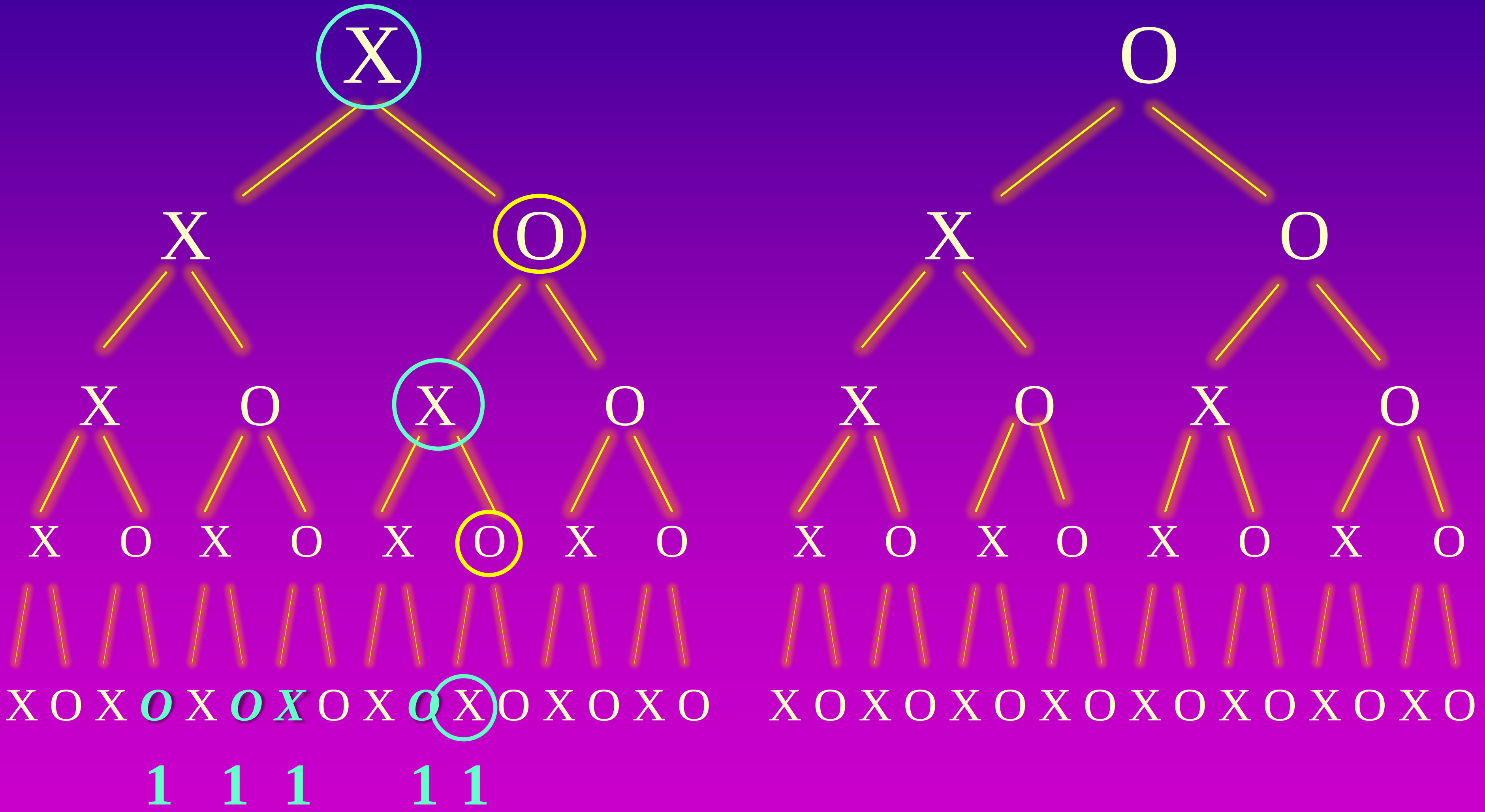
(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



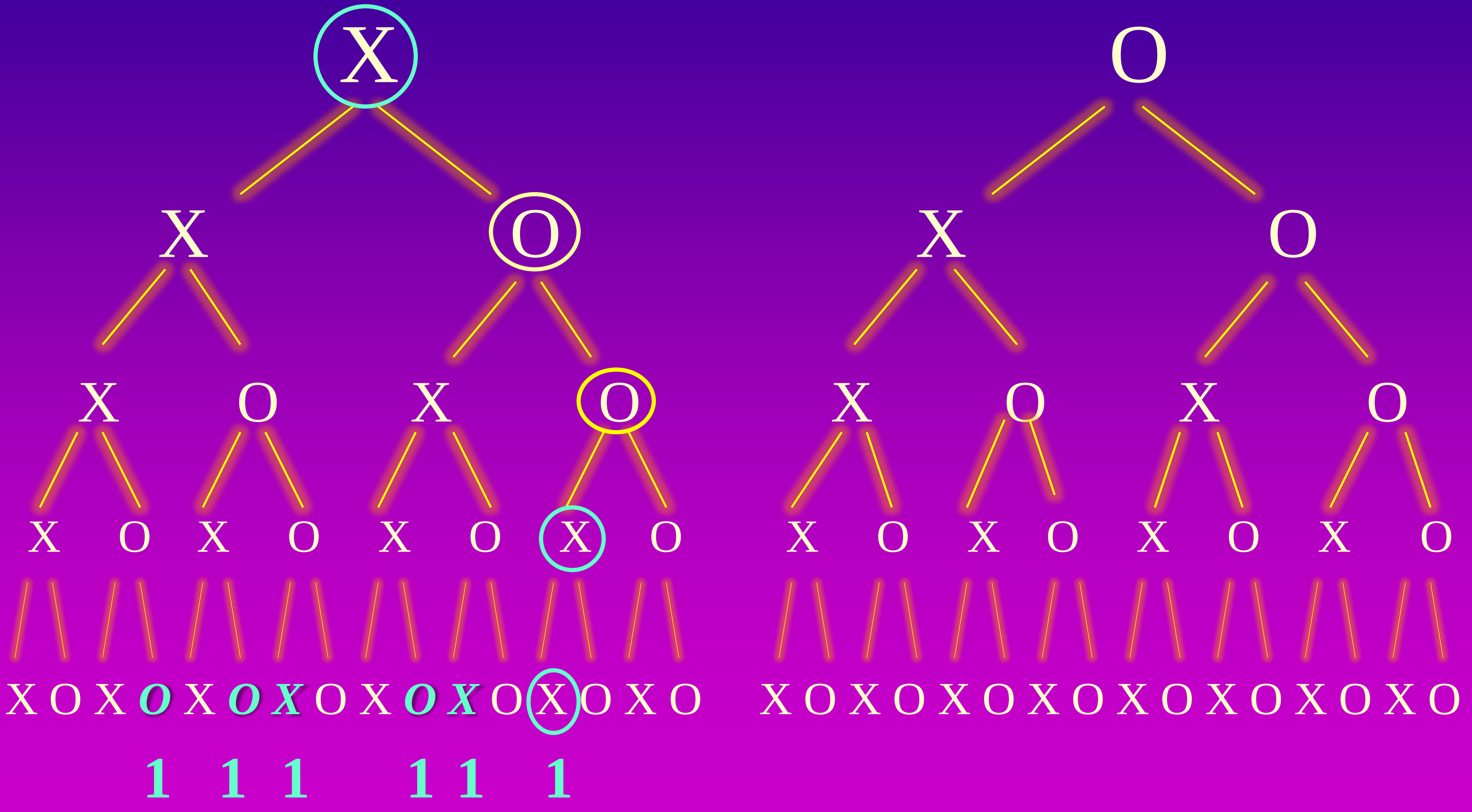
(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



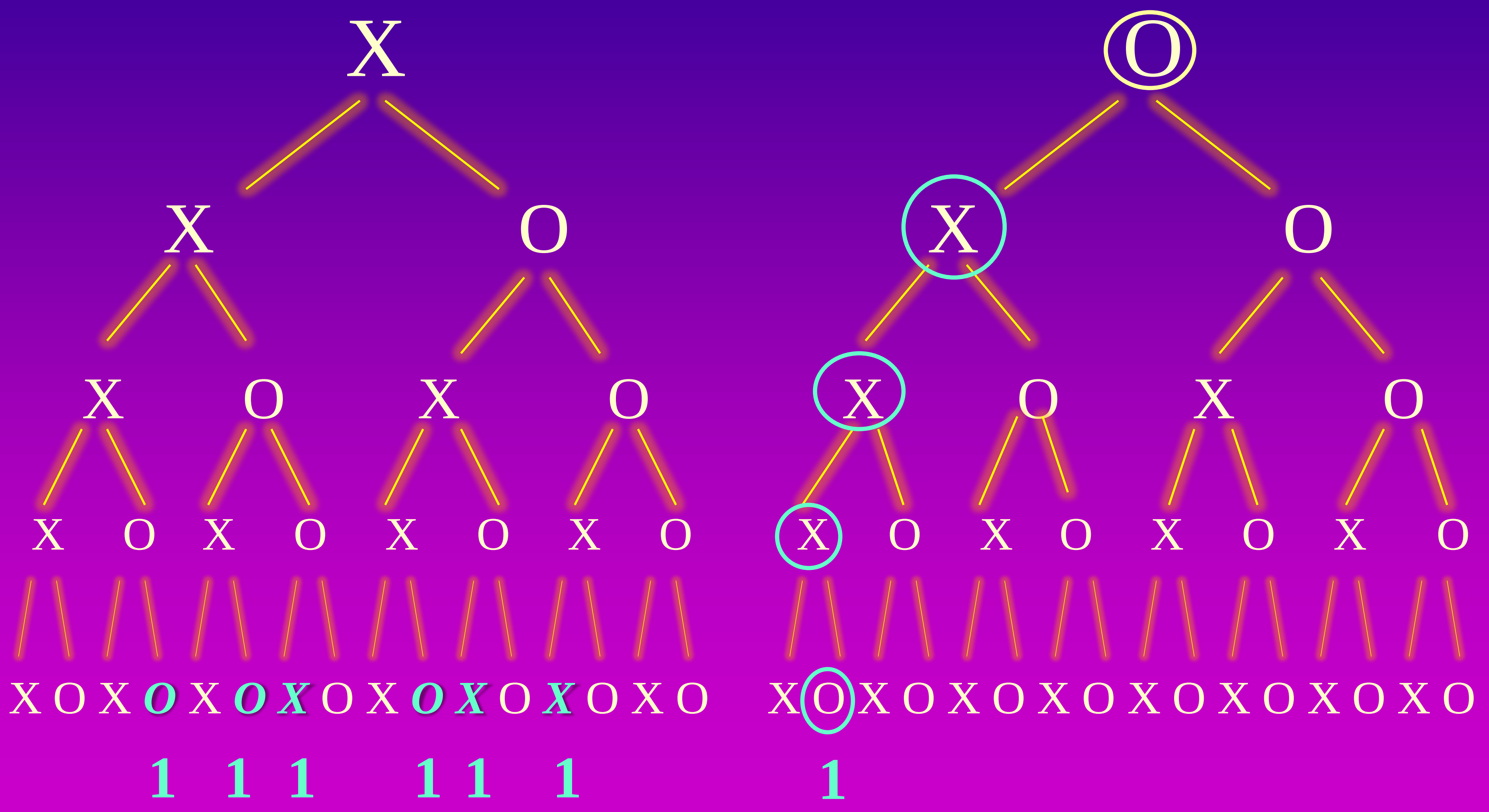
(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



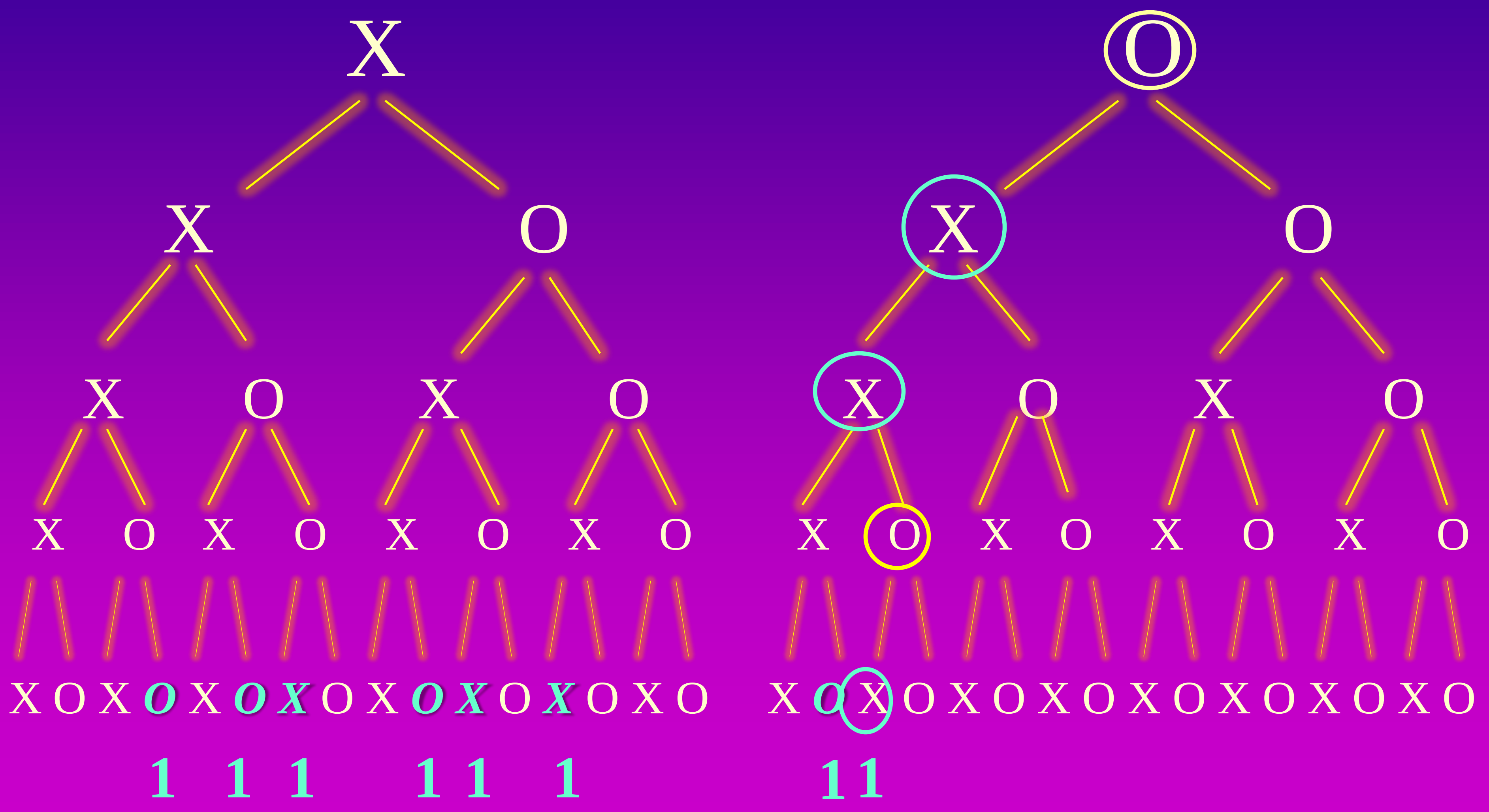
(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



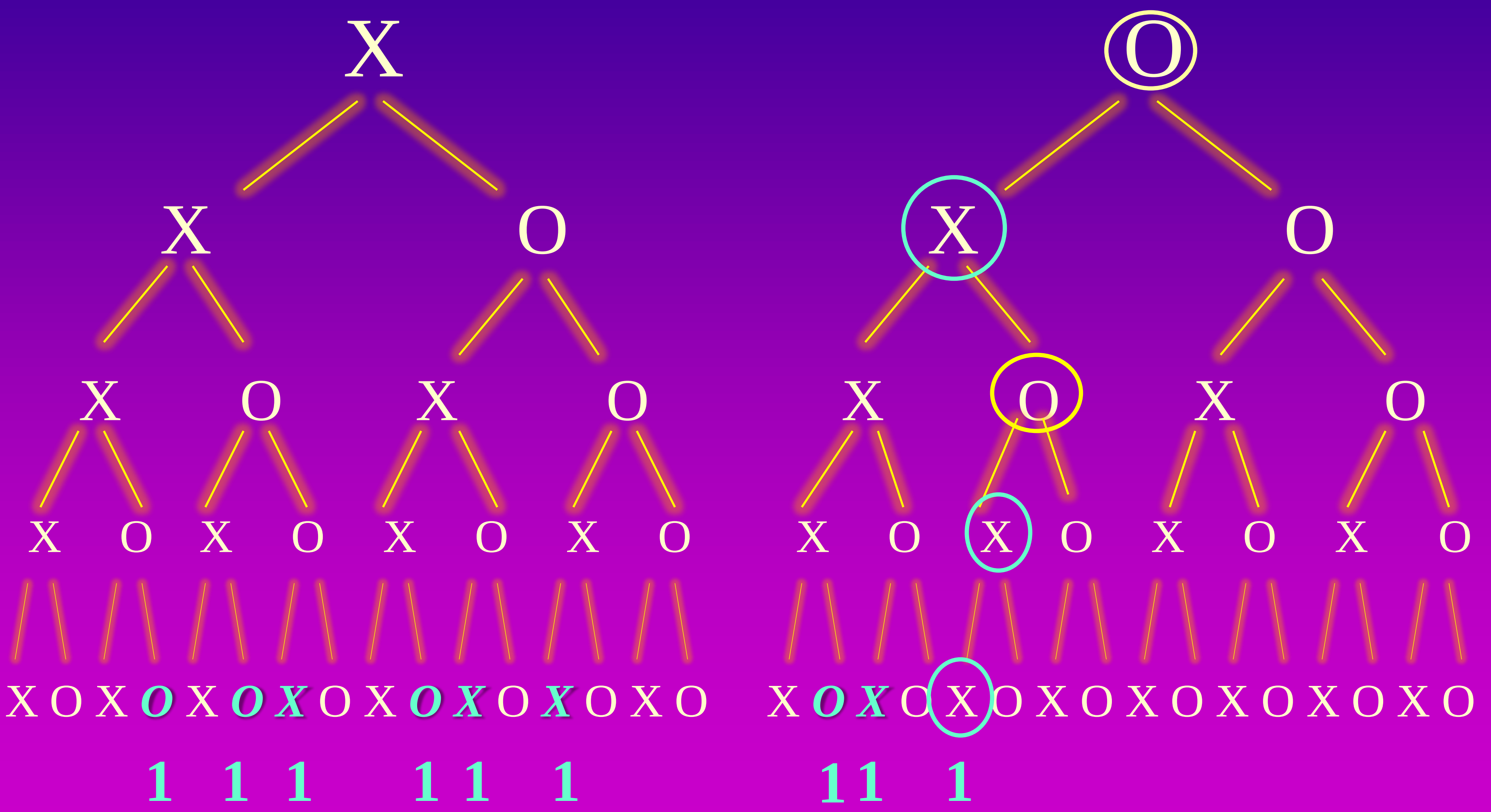
(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



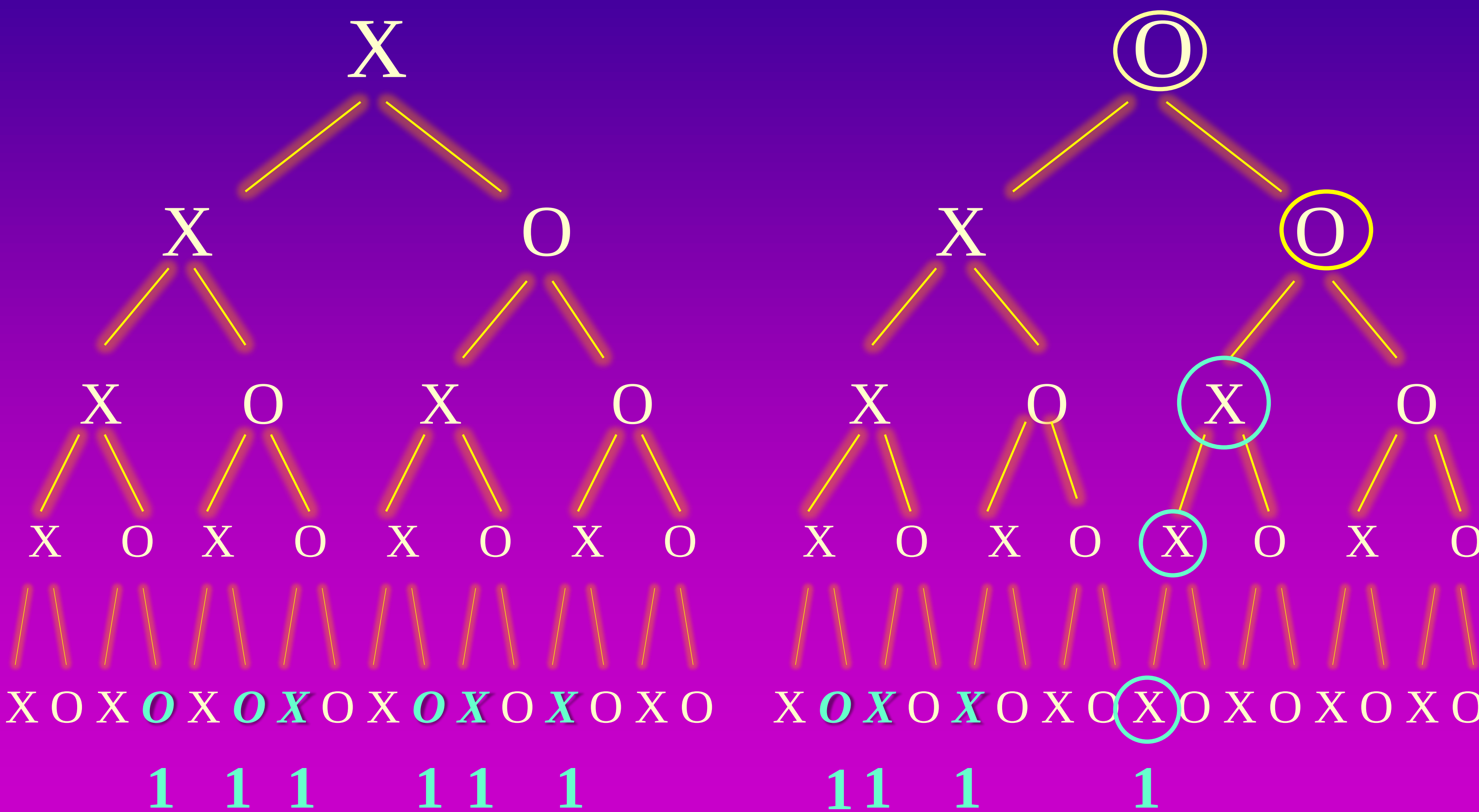
(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



(exigência de 3 caras em 5 lançamentos)



∴ 10 sucessos em 32 resultados possíveis: **P = 10/32 = 31,3%**

- Construindo uma tabela com estes 10 resultados favoráveis:

XXXOO	XXOXO	XXOOX	XOXXO	XOXOX
XOOXX	OXXXO	OXXOX	OXOXX	OOXXX

- Agora, utilizando a expressão de ***Distribuição Binomial***:

$$P_{N,n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\ \mathrm{p}^{\mathrm{n}_1}\ \mathrm{q}^{\mathrm{N - n}_1}$$

a probabilidade de sair ‘cara’ ***3 vêzes em 5 lançamentos*** *será*:

($N = 5$ e $n_1 = 3$; sendo $p = ½$ e $q = 1 - ½ = ½$)

$$P_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2!}\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}\ ;\ ou\ \boxed{31{,}3\%}$$

- E veja que interessante: =10 =1/32 (10/32 = 5/16)

- Vejamos outro exemplo, agora com $p \neq q$:

- Dois times de futebol, ***A*** e ***B***, jogam entre si ***6 vezes***. Qual a probabilidade do time ***A*** ***<u>ganhar</u>*** ***4 jogos*** (g,p,e) .

- Neste caso temos:

$$N = 6\ ;\ n_1 = 4;\ p = 1/3 \text{ e } q = 1 - 1/3 = 2/3 :$$

$$P_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^{6-4} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 2}\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{20}{243}$$

ou 8,2%

Utilizando Tabelas e Gráficos

• Um lote de peças automotivas foi produzido pela fábrica com ***30%*** delas ***defeituosas***. Escolhendo aleatoriamente ***5 peças para teste***: *a)* quais as probabilidades de se retirar(em) **0**, **1**, **2**, **3**, **4** e **5** peça(s) defeituosa(s)? *b)* construa um gráfico da distribuição de probabilidade correspondente.

• Note que agora temos: $N=5$; $\mathbf{n_1}=(0,1,2,3,4,5)$; $\mathbf{p}=0,3$; $\mathbf{q}=0,7$

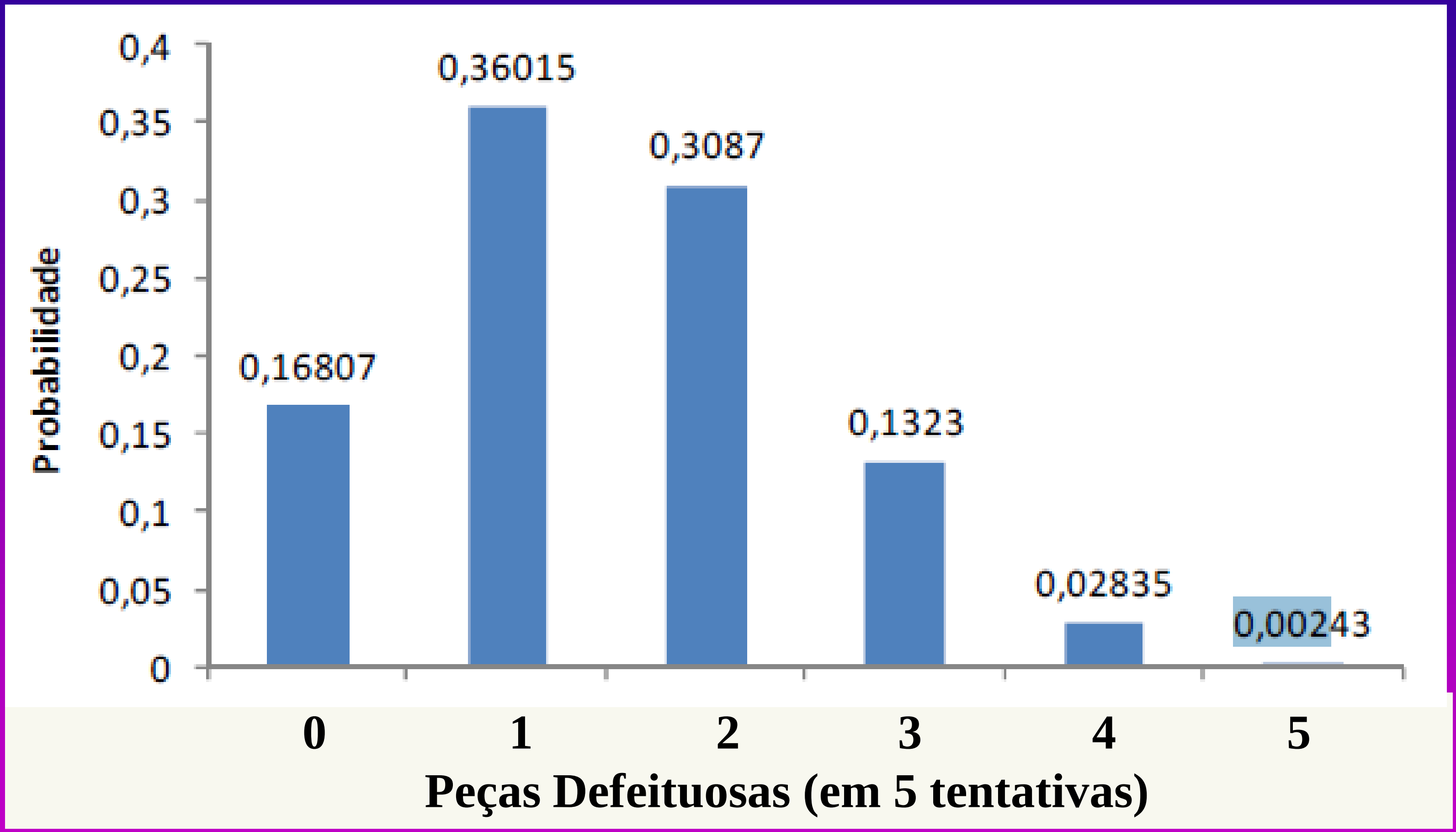
• Calculando para $\mathbf{n_1} = 0$:

$$P_{N,n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\, p^{n_1}\, q^{N-n_1}$$

$$P_{5,0} = \frac{5!}{0!(5-0)!}(0,3)^0(0,7)^{5-0} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!}}(1)(0,168) = 0,168$$

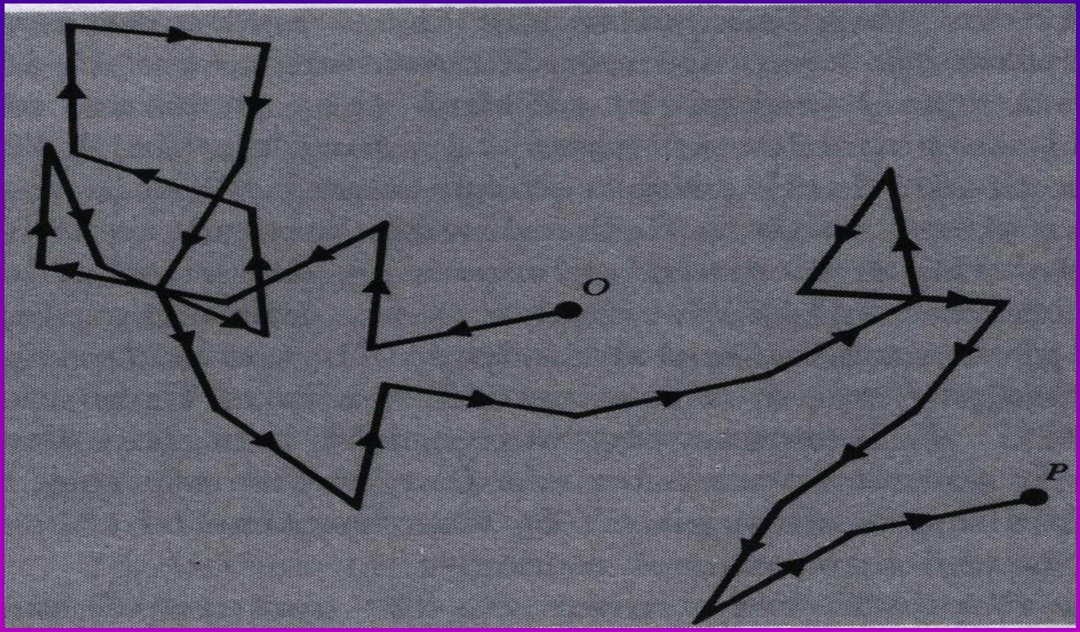
• Igualmente: $P_{5,1} = 0,360$, $P_{5,2} = 0,309$, $P_{5,3} = 0,132$, $P_{5,4} = 0,028$, e $P_{5,5} = 0,002$

b) Construindo o histograma correspondente:



- Você esperava esta ***assimetria*** no formato? E se a probabilidade fosse $p = ½ = 0,5$?

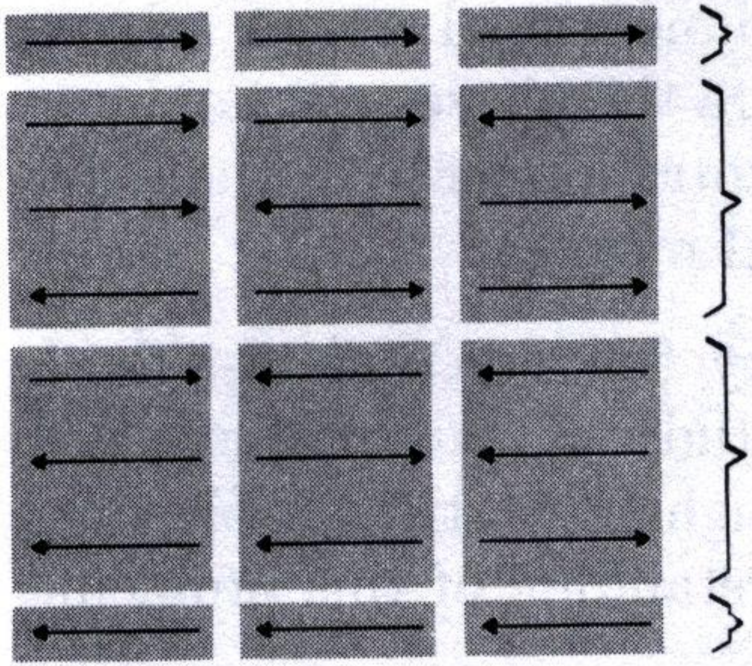
• Retomando o problema do Passeio Aleatório (Random-Walk)



• Supor a situação em que ***N=3 passos***. a) Qual é a probabilidade de que 2 passos sejam dados para a direita e um para a esquerda (em qualquer ordem)? b) Qual é a probabilidade de que os ***3*** passos sejam para a direita?

• Construindo uma tabela acerca das possibilidades:

N = 3



n_1	n_2	m
3	0	3
2	1	1
1	2	−1
0	3	−3

($x = mL$)

• Vemos que a probabilidade correspondente a serem dados <u>2 passos para direita e um para esquerda</u>, ou os <u>3 passos para a direita</u>, será ***3/8*** e ***1/8***, respectivamente.

• Utilizando agora a expressão da Distribuição Binomial de Probabilidade, para estes 2 casos, teremos:

$$P_{N,n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\, p^{n_1}\, q^{N-n_1}$$

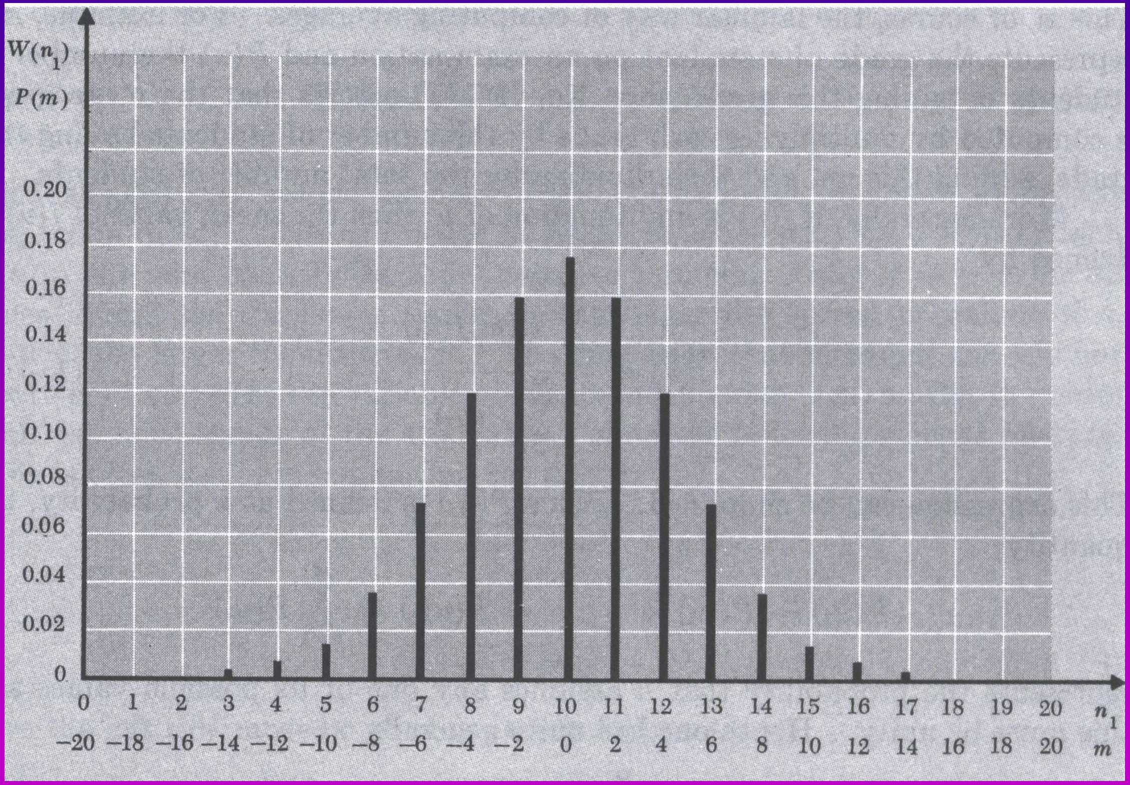
1º caso: 2 direita, 1 esquerda

$$P_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

2º caso: 3 para direita

$$P_{3,3} = \frac{3!}{3!(3-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

• Fazendo o mesmo para ***N=20*** passos, dados aleatoriamente a partir do ponto **x=0** (***x=mL***), tanto para a esquerda quanto para a direira (com probabilidades ***1/2***), e construindo um gráfico:



• Note que ao se realizar uma medida, o local de maior proba-bilidade (***valor esperado***) será em torno da origem (***x=mL=0***), correpondente a $\langle n_1 \rangle = Np$ (= 20 x ½) = 10 passos p/ direita.