Termo-Estatística (2013)

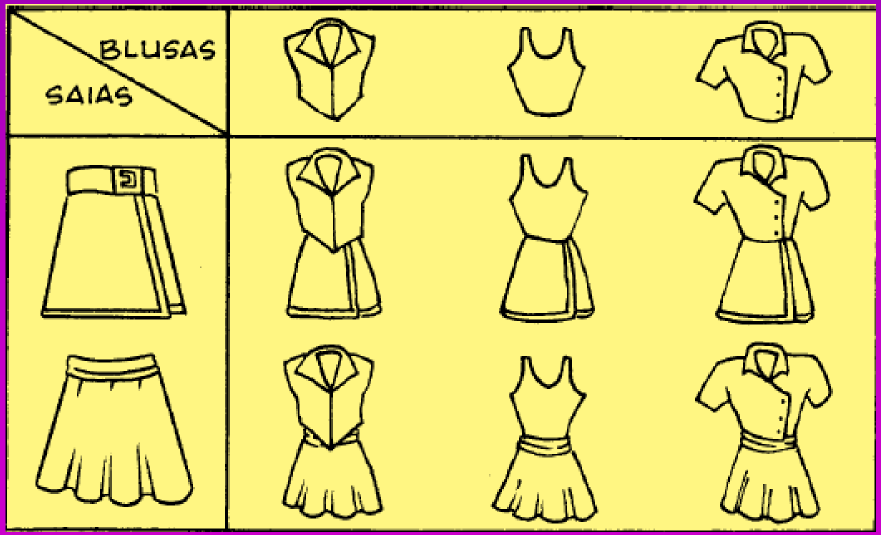
2ª Aula

Análise Combinatória e Probabilidade

Prof. Alvaro Vannucci

• Na ***Mecânica Estatística***, será muito útil a utilização dos conceitos básicos de ***Análise Combinatória*** e ***Probabilidade***.

• Por ex., uma garota vai sair com suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 3 blusas. <u>De quantas maneiras diferentes</u> ela pode se vestir?



• Decisões a serem tomadas:

d1: escolher uma dentre 3 blusas

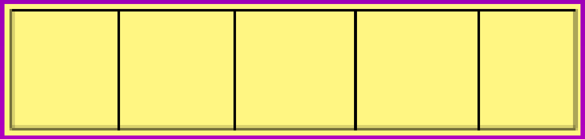
d2: escolher uma dentre 2 saias

Total de opções: **3 x 2 = 6**

PERMUTAÇÃO

- Da mesma forma, muitas vezes desejaremos saber de quantas maneiras podemos ***arrumar os elementos*** de um dado conjunto. Como descobrir o número total de possibilidades?

- Por exemplo, De quantas maneiras podemos arrumar ***5*** pessoas P1, P2, P3, P4 e P5 em fila indiana?



- As soluções serão do tipo:

P_1	P_3	P_5	P_2	P_4

P_5	P_2	P_1	P_3	P_4

... etc.

- Na escolha de uma pessoa para a ***1ª posição*** temos **5** opções. Para ***o 2º lugar***, como uma já foi escolhida, temos **4** opções. Para o ***3º lugar*** sobram **3** pessoas a serem escolhidas. Para o ***4º lugar*** **2** pessoas e, para o ***último lugar na fila***, sobra apenas a pessoa que ainda não foi escolhida.

- Ou seja, teremos: $\mathbf{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120}$ opções.

<u>Definição</u>: Dado um conjunto formado por ***n*** elementos, chama-se ***permutação*** desses ***n*** elementos qualquer seqüência de ***n*** elementos na qual apareçam todos os componentes do conjunto.

- <u>Cálculo do número de permutações</u>: o número de modos de ordenar ***n*** objetos distintos é:

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1}$$

$$(\mathbf{n!})$$

- Lembrando algumas regras básicas:

(i) $5! \cdot 4! = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)\,(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 120 \cdot 24 = \mathbf{2880}$

(ii) $8! = \mathbf{8 \cdot 7!}$

(iii) $$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 = \mathbf{20}$$

(iv) $$\frac{12!}{13!} = \frac{\cancel{12!}}{13 \cdot \cancel{12!}} = \frac{1}{13}$$

(v) $0! = 1$

- Outro Ex.: Quantos são os ***anagramas*** possíveis da palavra **MARTELO**?

- Cada anagrama da palavra **MARTELO** é uma ordenação das letras **M**, **A**, **R**, **T**, **E**, **L**, **O** (como as pessoas na fila); assim, o número de anagramas são as permutações possíveis.

- Ou seja: $\mathbf{7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040}$

- Agora, observe que em alguns problemas (que envolvem ***permutações*** dos elementos de um conjunto) podem existir ***restrições*** que devem ser levadas em conta.

Ex.: Quantos anagramas que começam e terminam com ***consoantes*** podemos formar a partir da palavra **MARTELO**?

- A ***consoante inicial*** pode ser escolhida de ***4*** maneiras e a ***consoante final*** de ***3*** maneiras. As ***5*** letras restantes serão permutadas no espaço entre as duas consoantes já escolhidas.

Portanto, a resposta é $4 \cdot 3 \cdot 5! = 1440$ anagramas.

- Outro ex.: Um grupo de cinco pessoas decide viajar de carro, mas apenas duas sabem dirigir. De quantas maneiras é possível dispor as cinco pessoas durante a viagem?

- O banco do motorista pode ser ocupado por uma das ***2*** pessoas que sabem guiar o carro e as ***outras 4*** podem ser permutadas pelos quatro lugares restantes, então teremos:

$$2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48 \text{ maneiras}$$

- Por estes exemplos vemos que em problemas envolvendo permutações dos elementos de um conjunto, com restrições, deve-se ter o cuidado de leva-las corretamente em conta.

Elementos distinguíveis e indistinguíves

- Ex. A palavra **MADEIRA** possui sete letras, sendo duas letras **A** e cinco letras *distintas*: **M**, **D**, **E**, **I**, **R**. Quantos anagramas diferentes podemos formar com a palavra?

- Se ***desconsiderássemos*** o fato que no caso temos **2** elementos indistinguíveis, a resolução seria: **7 · 6 · 5! = 5040**

- Isto porque, para arrumar as duas letras **A** (indistinguíveis) precisamos de ***2 posições***; sendo, para a primeira letra **A**, **7** posições disponíveis, e **6** posições disponíveis para a segunda letra **A** (pois uma das 7 posições já foi ocupada).

- Nas **5** posições restantes devemos permutar as outras **5** letras distintas, ou seja, **5! = 120** possibilidades.

- Agora, como as 2 letras A são indistinguíveis, para não contarmos duas vezes as posições que formam o mesmo anagrama (como, por exemplo, escolher a 2ª e 5ª posições e a 5ª e 2ª posições), uma **divisão por 2 se faz necessária**:

$$\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5! = 2520 \quad \text{ou:} \quad \frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot 5! = 2520$$

anagramas da palavra MADEIRA;

sendo que poderíamos ter trocado o numerador: **$7 \cdot 6 \cdot 5! = 7!$**

- Mas, e no caso de termos mais elementos indistinguíveis no conjunto?

• Por exemplo, supor ***6 bolas de bilhar*** - numeradas de 1 a 6 - que queremos colocar nas 6 caçapas de uma mesa de bilhar. De quantas maneiras diferentes podemos fazer isto?

• Pelo que já vimos, teremos **6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 6!**

• Agora, o que mudaria se tirássemos a bola de número ***6*** da mesa e a substituíssemos por uma outra bola número ***5***?

• Como as duas bolas (nº **5**) são agora ***indistinguíveis***, caimos no exemplo anterior, e uma divisão por 2! se faz necessária!

• Ou seja, teremos $\boxed{\dfrac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4! = \dfrac{6!}{2} = \dfrac{6!}{2!}}$ possibilidades

• E se tirassemos também a bola de número ***4*** da mesa e a substituíssemos por uma outra bola número ***5***? Teríamos agora 3 elementos ***distinguíveis*** e 3 elementos ***indistinguíveis***.

• Observe que as ***3*** bolas ***indistinguíveis*** (todas de número 5) resulta em $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ situações idênticas, que devem ser diminuídas do número total, supondo todas distinguíveis.

• Neste caso teríamos $\boxed{6!/3!}$ Possibilidades (resultados finais).

• De forma mais geral, podemos escrever:

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!}}$$

; onde ***n*** é o ***número total*** de elementos e ***p*** o número de elementos ***indistinguíveis***

- Finalmente, supor que na mesa de bilhar se tenha ***6*** bolas brancas, e ***4*** bolas vermelhas, totalizando 10 bolas.

- Neste caso a combinação resulta: $\dfrac{10!}{6!\cdot 4!} = \dfrac{10!}{6!(10-6)!}$

- Este tipo de aplicação, que envolve a combinação de objetos indistinguíveis separados em dois grupos (***p*** e ***n-p***), nos será particularmente útil no campo da ***Mecânica Estatística***.

- Isto porque será aplicado nas situações em que temos um certo número ***n*** de objetos indistinguíveis (partículas) que desejaremos alocar de uma certa maneira (em ***p*** estados disponíveis).

- De forma que a expressão geral das possíveis *Combinações* será:

$$C^{n}_{p,n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ex.: ***Dez*** acidentados de um ônibus chegam em um hospital e é preciso escolher ***5*** para ocupar os leitos (os outros ficariam em macas, no corredor do hospital). De quantas formas poderíamos escolher 5 pessoas para ficarem nos leitos?

- Veja que o problema trata-se de escolher as combinações onde ***n = 10*** (número de '*elementos disponíveis*') e ***p = 5*** (número de '*elementos a serem escolhidos*').

- Aplicando a expressão anterior: $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_5^{10} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (\cancel{5!})} = \frac{30240}{120} = 252$$

- Há, então, ***252*** formas de escolher as ***5*** pessoas que irão ocupar os ***5*** leitos.

Outro ex.: Supor que em uma empresa 15 funcionários se inscreveram para o time de futebol da casa, dizendo que aceitam jogar em qualquer posição. De quantas formas é possível escolher os 11 jogadores do time?

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Sendo ***n*** = 15 e ***p*** =11:

$$C_{11}^{15} = \frac{15!}{11!(15-11)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{32760}{24} = 1365$$

- Notação: muitas vezes encontramos

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$$

<u>*Cálculo de PROBABILIDADE*</u>

• Sabemos que lançando uma moeda para o alto, a probabilidade de dar '***cara***' ou '***coroa***' é de ***50%*** (ou ½ = 0,5).

• Tendo lançado a moeda ***3*** vêzes <u>consecutivamente</u>, e nas três vezes saiu "***cara***", qual é a probabilidade de, no <u>lançamento seguinte</u>, sair ***novamente cara***?

• "*Reformulando*" a pergunta: vou lançar uma moeda 4 vêzes, consecutivamente. Qual é a probabilidade de sair '***cara***' <u>em todos os lançamentos</u>?

• São questões diferentes! Resps: ***½*** e ***½ • ½ • ½ • ½ = 1/16***

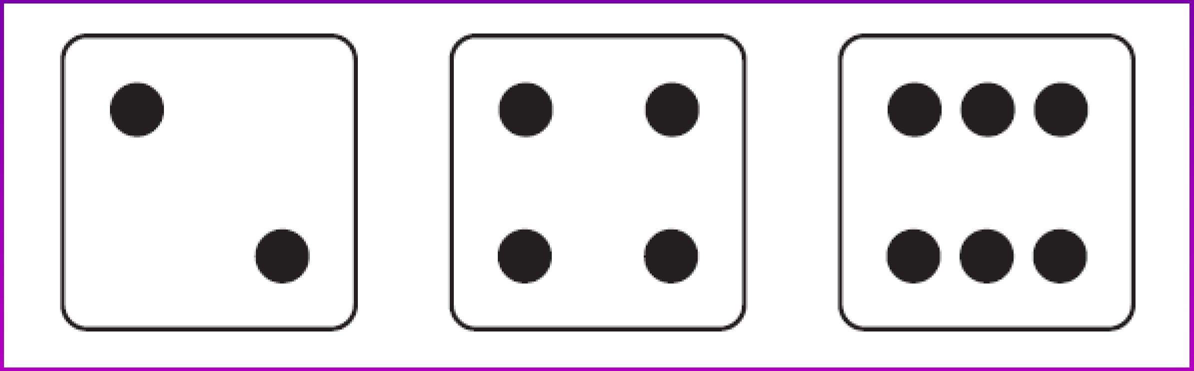
- Ou seja, quando dizemos que a probabilidade é ***½*** (50%) isso não significa que, a cada 2 lançamentos, um vai ser '***cara***' e o outro vai ser '***coroa***'. O fato da probabilidade ser ***½*** (ou 50%) quer dizer apenas que ***as chances são iguais*** e que, se fizermos muitos lançamentos, é provável que, aproximada-mente, metade deles dê '***cara***', e a outra metade '***coroa***'.

- De forma geral, o cálculo da probabilidade de ocorrer um resultado (ou um conjunto de resultados) que satisfaça uma ***condição*** ou ***exigência E***, é feito utilizando a expressão:

$$\boxed{p\,(E) = \frac{n^o \text{ de resultados favoráveis a } E}{n^o \text{ total de resultados possíveis}}}$$

Ex.: No lançamento de um dado, qual a probabilidade do resultado ser um número ***par***?

• Para que o resultado seja ***par*** devemos ter uma das possibi-lidades:



• Ou seja, ***3 resultados favoráveis*** (2, 4, 6) ***de um total de 6 resultados possíveis*** (1, 2, 3, 4, 5, 6). As <u>chances</u> de dar um resultado ***par*** são <u>3 num total de 6</u>. Então, podemos dizer que a probabilidade de isso acontecer é ***3/6 = 1/2*** .

- Utilizando a expressão anterior:

$$P\,(\text{par}) = \frac{\text{n}^\text{o}\text{ de resultados favoráveis a E}}{\text{n}^\text{o}\text{ total de resultados possíveis}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

- E não esquecer:

1ª) O cálculo de probabilidade que ***evento A <u>ou</u> evento B*** (<u>independentes</u>) ocorram, é dado por: $\boxed{P = P(A) + P(B)}$

2ª) O cálculo de probabilidade que ***evento A <u>e</u> evento B*** (<u>independentes</u>) ocorram, é dado por: $\boxed{P = P(A) \cdot P(B)}$

Ex. Uma empresa tem 30 funcionários, sendo ***10 canhotos*** e ***25 que vão de ônibus*** para o trabalho. Qual a probabilidade de um desses empregados, escolhido ao acaso (*de forma independente*), ser canhoto **e** ir de ônibus para o trabalho?

• Calculando: P = P(A) • P(B) = 10/30 • 25/30 = 5/18 = 27,8%

Ex. Uma caixa contém 10 bolas sendo que ***3 são azuis*** e ***3 são vermelhas***. Qual é a probabilidade de se tirar uma bola azul **ou** vermelha em uma tentativa?

• As ***bolas com estas cores*** são ***3+3 (=6) em 10***. Desta forma, a probabilidade de se tirar uma delas será 6/10 = 3/5 , ou 60%

• Ou então: P(A) = 3/10 e P(B) = 3/10. Portanto, para tirar uma **OU** outra: P = 3/10 **+** 3/10 = 60%.