# Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *5ª Aula* (13/08/2012)

***Prof. Alvaro Vannucci***

---

**Na última aula vimos**:

- Energia armazenada no capacitor: $U = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}CV^2$
- Sendo que *Capacitância*: $C = \dfrac{Q}{V}$
- Capacitor de placas paralelas: $\begin{cases} C = \dfrac{\epsilon_0 A}{d} \\ V = Ed \end{cases}$
- Densidade volumétrica de energia: $u = \dfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ de forma que $U = \int u\, dV = \dfrac{\epsilon_0}{2}\int E^2 dV$

---

- Cavendish e Faraday descobriram, independentemente, que a capacitância se modifica quando um material dielétrico é inserido entre as placas de um capacitor isolado (desconectado da bateria, de forma que $Q$ se mantenha constante).
- Eles observaram que se todo o espaço disponível é preenchido pelo dielétrico, a capacitância aumenta pelo fator $K$ (relação ar/vácuo) que só depende do tipo de dielétrico usado:

$$C = KC_0 \;\; ; \;\; K \equiv \text{constante dielétrica do material}$$

- Para o vácuo/ar: $K$ = 1 (não tem unidade) e, portanto, $K \geq 1$.
- Agora, sendo $Q$ constante e $C = \dfrac{Q}{V}$ $\longrightarrow$ na equação acima,

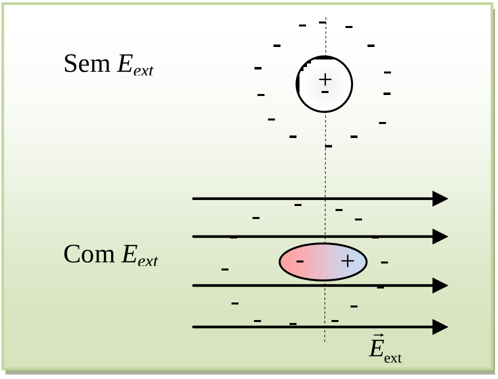
$$\frac{\cancel{Q}}{V} = K\frac{\cancel{Q}}{V_0} \;\;\Rightarrow\;\; V = \frac{V_0}{K} \;\;\; \therefore \text{a ddp diminui}$$

> Note: se o capacitor não estiver isolado, mas matem-se conectado com a bateria: $U = \frac{1}{2}CV^2$ $\longrightarrow$ a energia armazenada aumenta.

- E tomando o capacitor de placas paralelas infinitas: $\begin{cases} V_0 = E_0 d \\ V \;= Ed \end{cases} \;\;\Rightarrow$

$\frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} \Rightarrow E = \frac{VE_0}{V_0} = \frac{\cancel{V_0} E_0}{K \cancel{V_0}}$ e, portanto, o campo $E$ também diminui! (pelo fator $K$)

- Como entender fisicamente este resultado?
- Supor uma molécula (átomo) submetida a um campo elétrico externo (produzida por um capacitor de placas paralelas, por exemplo).




- O campo $E_{ext}$ atuando nos prótons, elétrons, provoca um deslocamento dos "*centros de carga*".
- Ocorre então, a polarização do meio dielétrico através da formação de pequenos dipolos elétricos $\vec{p}_i = q\vec{l}$
- Havendo N moléculas no meio → têm-se $N$ dipolos elétricos:

$$\vec{p}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \quad \longrightarrow \text{por unidade de volume: } \vec{P} = \frac{\vec{p}_{\text{total}}}{\text{volume}} \equiv \text{vetor de polarização}$$

Unidade de $\vec{P}$: $\frac{\text{C}\,\cancel{\text{m}}}{\text{m}^{\cancel{3}}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

- Note que é razoável supor que quanto mais intenso for $\vec{E}_{\text{ext}}$, maior será a polarização resultante (das moléculas), de forma que:

$$\vec{P} = \epsilon_0\, \chi \vec{E}_{\text{resultante}} \quad \rightarrow \quad \left(\tfrac{C}{m^2} = \tfrac{F}{m^2} \cdot \chi \cdot \tfrac{V}{m}\right)$$

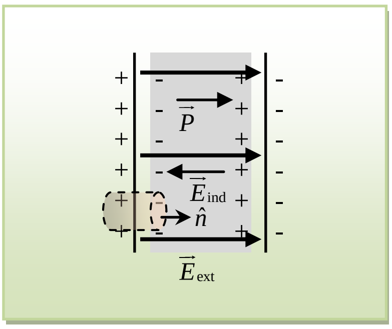
(no interior do dielétrico)

permissividade elétrica

suceptibilidade elétrica (do meio)

(ou $N/C$)

- Na situação em que existirem tanto cargas livres quanto cargas de polarização, como calcular campo $\vec{E}_{\text{resultante}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{induzido}}$ ?
- Se possível, usar a Lei de Gauss:
$\oint \epsilon_0 \vec{E}_{\text{res}} \cdot \hat{n}\, dA = \underset{\text{total}}{Q_{\text{int.}}} + Q_{\text{livre}} + Q_{\text{polariz.}}$
- No caso de um capacitor de placas paralelas, por exemplo, como é apresentado na figura ao lado.



- Como a carga de polarização está relacionada com o fluxo de $\vec{P}$ através da superfície gaussiana cilíndrica:

$$\oint \vec{P}\cdot\hat{n}\, dA = -Q_{\text{polarização}}$$

note que se o cilindro gaussiano for desenhado no outro lado: $\vec{P}\cdot\hat{n} = -P$

- De forma que:

$$\oint \epsilon_0 \vec{E}_{\text{res}}\cdot\hat{n}\, dA = Q_{\text{livre}} - \oint \vec{P}\cdot\hat{n}\, dA \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint\left(\epsilon_0\vec{E}_{\text{res}} + \vec{P}\right)\cdot\hat{n}\, dA = Q_{\text{livre}}}$$

- Definindo $\boxed{\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}_{\text{res}} + \vec{P}}$ ≡ ***Vetor Deslocamento Elétrico***,

$$\boxed{\oint \vec{D}\cdot\hat{n}\, dA = q_{\text{int. livre}}}$$ Não depende das cargas de polarização!

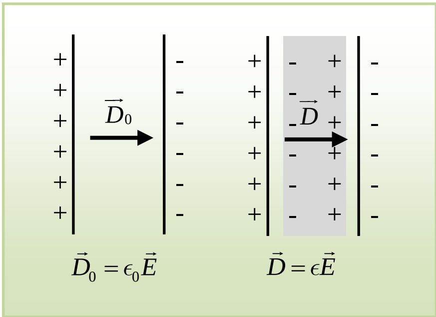
Substituindo

$$\begin{cases}\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}\end{cases} \Rightarrow \quad \vec{D} = \underbrace{\epsilon_0(1-\chi)}_{\equiv\epsilon}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{D} = \epsilon\vec{E}}$$

- No vácuo $\vec{P} = 0 \Rightarrow \chi = 0 \Rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$

- E <u>lembrar sempre</u> $\vec{D}$ está sempre relacionado com <u>*cargas livres*</u>.

- Aplicando este resultado para capacitores isolados sem e com dielétrico:

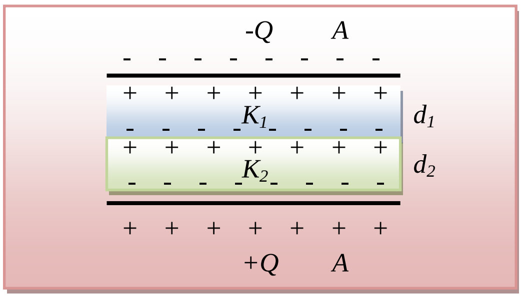



- 

- Neste caso, como a densidade de carga livre não se modifica (capacitores isolados): $\vec{D}_0 = \vec{D}$

- Portanto $\epsilon_0 \cancel{\vec{E}_0} = \epsilon\vec{E} = \epsilon\dfrac{\cancel{\vec{E}_0}}{K} \rightarrow K = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0} \equiv$ *Constante Dielétrica*; que corresponde à *permissividade elétrica relativa*.

**Exemplo**. Obter a capacitância equivalente para as configurações abaixo com dielétricos $K_1$, $\epsilon_1$ e $K_2$, $\epsilon_2$, supondo capacitores isolados:



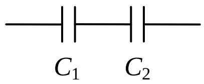

**<u>Caso 1</u>:**

- Quero $C_{eq} = \dfrac{Q}{V}$

- Como $V_1 = E_1 d_1$ e $V_2 = E_2 d_2$; sendo que $V_1 + V_2 = V$ (diferença de potencial entre as placas do capacitor).

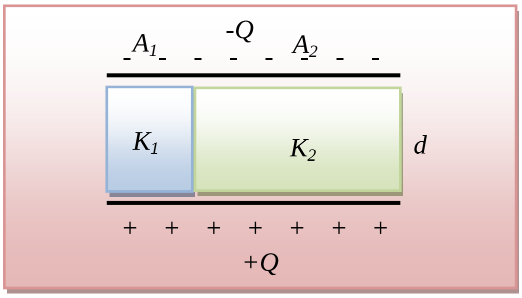
- Então $V = d_1E_1 + d_2E_2 = d_1\dfrac{E_0}{K_1} + d_2\dfrac{E_0}{K_2}$ onde $\sigma = Q/A$.

- Assim: $V = \underbrace{\dfrac{d_1 Q}{K_1\epsilon_0 A}}_{\epsilon_1} + \underbrace{\dfrac{d_2 Q}{K_2\epsilon_0 A}}_{\epsilon_2} = Q\left[\underbrace{\dfrac{d_1}{\epsilon_1 A}}_{1/C_1} + \underbrace{\dfrac{d_2}{\epsilon_2 A}}_{1/C_2}\right]$

- Portanto, $\dfrac{V}{Q} = \boxed{\dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$ $\equiv$ capacitores em série ( 

)
(ver na figura a distribuição das cargas de polarização)

## Caso 2:




- Note agora que sendo a polarização das moléculas diferente em casa meio, o campo resultanto, e, consequentemente, a distribuição de cargas, também não será a mesma!

- Então $\sigma_1 = Q_1/A_1$ e $\sigma_2 = Q_2/A_2$; onde
$Q_1 + Q_2 = Q$

- Além disso, como as superfícies metálicas devem corresponder a equipotenciais, então as diferenças de potenciais serão iguais: $V_1 = V_2 = V$; e, consequentemente, o campo elétrico resultante nos dois dielétricos deve ser igual $E_1 = E_2 = E_0 = Vd$. Como $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon}$, temos então

campo resultante

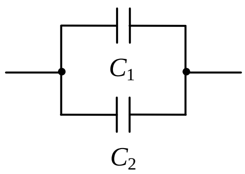
cargas livres

$$\begin{cases} E_0 = \dfrac{\sigma_1}{\epsilon_1} \\ E_0 = \dfrac{\sigma_2}{\epsilon_2} \end{cases} \xrightarrow{\text{(subst. os } \sigma\text{'s)}} \begin{cases} Q_1 = \epsilon_1 A_1 E_0 \\ Q_2 = \epsilon_2 A_2 E_0 \end{cases}$$

cargas livres

- Ou seja,

$Q = Q_1 + Q_2 = \epsilon_1 A_1 E_0 + \epsilon_2 A_2 E_0$. Como $V = E_0 d$, $Q = \left(\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2\right)\dfrac{V}{d}$, e, portanto:

$\dfrac{Q}{V} = C_{eq} = \underbrace{\dfrac{\epsilon_1 A_1}{d}}_{=C_1} + \underbrace{\dfrac{\epsilon_2 A_2}{d}}_{=C_2} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$ $\equiv$ capacitores em paralelo! ( 

)