Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *4ª Aula* (09/08/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- $W_{\text{agente externo}} = \Delta E_{pot} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_B - U_A$

- $(ddp)\ V_B - V_A = \dfrac{W}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

- Supondo $V(r = \infty) = 0 \rightarrow$ (carga pontual) $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{r}$ (grandeza escalar!)

- Para o cálculo do potencial para uma distribuição qualquer de cargas:

  $$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V \quad \text{e} \quad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

- Cálculo da energia (potencial) associada a um conjunto de cargas puntiformes:

  A energia associada ao conjunto corresponde à mesma energia gasta (pelo agente externo) para trazê-las do infinito.

  Para se posicionar a primeira carga (trazê-la do infinito ao ponto 1), não há trabalho realizado porque não há campo.

  Trabalho para posicionar a segunda carga (do infinito ao ponto 2):

  $$W_2 = (q_2)\left(-\int_\infty^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = (q_2)(V_{21})$$

  potencial no ponto 2 devido à carga 1

  Trabalho para posicionar a 3ª carga (do infinito ao ponto 3):

  $$W_3 = (q_3)(V_{31}) + (q_3)(V_{32})$$

  potenciais no ponto 3 devido às cargas 1 e 2

  E o mesmo para as outras cargas

  Conclusão: o trabalho total (W_E) para posicionar todas as cargas será a energia potencial relacionada ao sistema

$$W_E = q_2V_{21} + q_3V_{31} + q_2V_{32} + q_4V_{41} + q_4V_{42} + q_4V_{43} + ... \quad (1)$$

Tomando uma parcela representativa desta soma:

$$q_3V_{31} = (q_3)\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}}\right) = (q_1)\left(\frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}}\right) = (q_1)V_{13}$$

Posso então escrever

$$W_E = q_1V_{12} + q_1V_{13} + q_2V_{23} + q_1V_{14} + q_2V_{24} + q_3V_{34} + ... \quad (2)$$

Somando (1) e (2):

Potencial no ponto 2 (em q_2) devido à todas as cargas, menos q_2

$$2W_E = q_1(V_{12} + V_{13} + V_{14} + ...) + q_2(V_{21} + V_{23} + V_{24} + ...) + q_3(V_{31} + V_{32} + V_{34} + ...) + ...$$

Potencial no ponto 1 (em q_1) devido à todas as cargas, menos q_1

Então

$$2W_E = q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3 + ... \quad \Rightarrow \quad W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_iV_i = E_{\text{pot}}$$

No caso de uma <u>distribuição contínua</u> de cargas:

$$W_E \approx \frac{1}{2}\sum_i (\Delta q_i)(V_i) \quad \text{onde } \Delta q = \rho\Delta Vol.$$

No limite em que $\Delta Vol \rightarrow 0$, temos $E_{\text{pot}} = U = W_E = \frac{1}{2}\int V dq$.

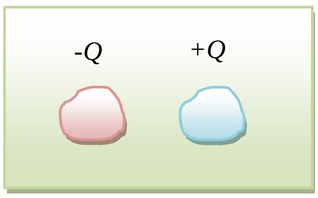
E sendo $dq = \rho\Delta Vol$, então $U = \frac{1}{2}\int \rho dVol$.

- Meios condutores

i) Campo $\vec{E}$ no interior é sempre zero

ii) Direção de $\vec{E}$ na superfície é sempre normal (perpendicular) à superfície.

Capacitor: corresponde basicamente a dois condutores com cargas $+Q$ e $-Q$, separados por um meio dielétrico (pelo ar/vácuo, por ex.)



- Havendo cargas de sinais contrários $\rightarrow$ há *ddp*; sendo a constante proporcionalidade:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \left(\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} \equiv \text{farad} \right)$$

- Agora, para se formar um capacitor, é preciso que se transfira cargas de um condutor para outro $\rightarrow$ trabalho é realizado (pela bateria, por exemplo)

- Supor que em um instante de tempo t qualquer, uma carga $q'(t)$ já tinha sido deslocada, de forma que naquele instante a *ddp* será:

$$V(t) = \frac{q'(t)}{C}$$

- Note agora que o trabalho dW para transferir o próximo elemento de carga dq será:

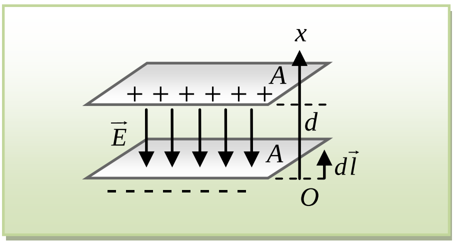
$$dW = Vdq' = \frac{q'dq'}{C}$$

- Considerando finalmente o processo todo de carga do capacitor:

$$W = \int_{\text{total}} dW = \int_0^Q \frac{1}{C} q'dq' = \frac{1}{2C} q'^2 \Big|_0^Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = U = \frac{Q^2}{2C}};$$

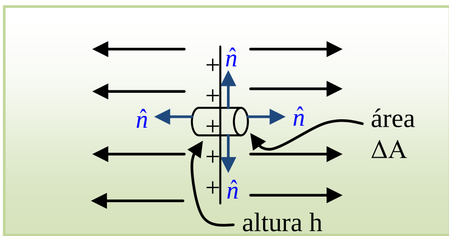
ou então $\left(C = \dfrac{Q}{V} \right)$: $\quad U = \dfrac{C^{\cancel{2}} V^2}{2\cancel{C}} \therefore \quad \boxed{U = \dfrac{CV^2}{2}}$ (vale para qualquer capacitor!)

- Capacitor mais simples: ***Placas Paralelas***.



- Capacitor ideal: $d \ll$ que as dimensões da placa (desprezam-se assim os efeitos de borda)

- Neste caso: $\vec{E} = E(\hat{i})$, e o cálculo de $|\vec{E}|$ faz-se através da lei de Gauss, considerando-se uma superfície gaussiana cilíndrica:



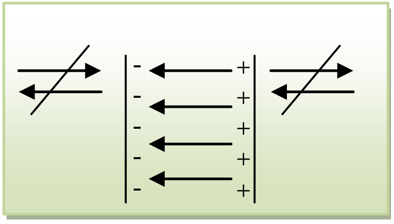
$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$: onde:

$$\begin{cases} \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \int\limits_{\substack{\text{tampa}\\ \text{direita}}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA + \int\limits_{\substack{\text{tampa}\\ \text{esq.}}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA + \cancel{\int\limits_{\text{lateral}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA} = 2E\Delta A \\ \dfrac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \displaystyle\int \frac{\sigma\,dA}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int dA = \frac{\sigma\Delta A}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{(note que trata-se de uma constante!)}$$

- No caso do capacitor, por ter duas placas infinitas (com $+Q$ e $-Q$):

$$E_{\text{capacitor}} = 2\times\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



- Sendo $\sigma = \dfrac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{Q}{\epsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad Q = \epsilon_0 EA \quad (1)$

- Mas a *ddp*: $V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^d E_{\text{acima}}\,dl \quad \Rightarrow \quad V = Ed \quad (2)$

- Como $C = \dfrac{Q}{V}$ de (1) e (2): $C = \dfrac{\epsilon_0 EA}{Ed}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_{\substack{\text{placas}\\ \text{paralelas}}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

- Lembrando finalmente que $U_{\text{cap}} = \frac{1}{2}CV^2$; e usando (2) e (3) acima:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{\cancel{d}}\times E^2 d^{\cancel{2}} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.\underbrace{Ad}_{=\text{volume}} \qquad \therefore \qquad \boxed{\frac{U}{\text{volume}} = u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$$

densidade volumétrica de energia
armazenada no capacitor

- De forma que a energia total a ser calculada, para qualquer configuração de campo elétrico no espaço:

$$\boxed{U = \int u\,dV \quad \Rightarrow \quad U = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 dV}$$