Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *3ª Aula* (06/08/2012)

Na última aula vimos:

- Lei de Gauss:

$$\phi_E = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

➢ Existindo $\vec{E} \rightarrow$ carga de prova q_0 sente uma força $\vec{F} = q_0\vec{E}$ produzida pelo campo.

➢ Ocorrendo um deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$, o trabalho dW realizado *PELO CAMPO* será:

$\underline{dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}}$, de forma que o trabalho total realizado pelo campo $\vec{E}$ será:

$$\boxed{W = \int_{P1}^{P2} dW = q_0 \int_{P1}^{P2} \vec{E}\cdot d\vec{l}}\,.$$

➢ No entanto, estamos interessados que a carga se desloque bem devagar, com velocidade aproximadamente constante. Não queremos ΔE_c (variação considerável da energia cinética; mesmo porque cargas aceleradas irradiam); o que queremos é uma relação entre W e ΔE_{pot}.

➢ Para que isso ocorra, iremos considerar uma força externa do tipo $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{campo}\,\vec{E}}$; ou seja,

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -q_0\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{ext}} = -q_0 \int_{\text{pos. inicial}}^{\text{pos. final}} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

(<u>Este</u> será o trabalho que sempre estaremos calculando, a não ser que se mencione o contrário)

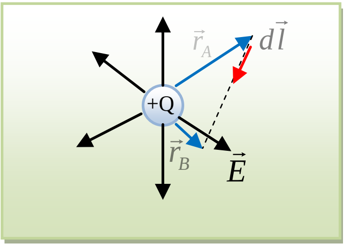
➢ Agora, da mesma maneira que podemos "interpretar" a expressão $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ como sendo uma espécie de força por unidade de carga (ou força sobre uma carga unitária $q_0 = 1$), também podemos pensar em definir uma grandeza "*Diferença de Potencial* (*d.d.p.*)" como sendo o trabalho realizado por um <u>agente externo</u> ao deslocar uma carga q_0 unitária entre dois pontos, A e B:

$$\frac{W_{AB}}{q_0} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Unidade: *Joule/Coulomb* ≡ *Volt*. Note que, se há trabalho realizado (com $\Delta E_c = 0$), há variação da energia potencial do sistema:

$$\boxed{W_{\text{realizado}} = \Delta U_{\text{sistema}}} \;\Rightarrow\; \boxed{(ddp)\quad V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

Exemplo. Determine a ddp entre os pontos A e B situados próximos de uma carga $+Q$.



$$ddp = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \text{ ; sendo}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{carga}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} \\ d\vec{l}_{\text{traj. qualquer}} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi} \quad \text{(coord. esféricas)} \end{cases}$$

- Assim:

$$ddp = V_B - V_A = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_{r_A}^{r_B}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_B - V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)}$$

- É muito útil e interessante definir o "potencial de um ponto" como sendo a ddp entre este ponto e outro de valor zero, geralmente localizado no infinito (às vezes, V (terra) = 0).

- No exemplo acima, supondo $\boldsymbol{r_A} = \infty$ e $\boldsymbol{r_B} = \mathbf{r}$ (qualquer), então o trabalho por unidade de carga para trazer q_0 do infinito até $\boldsymbol{r}$ sob ação de $\vec{E}_{\text{carga pontual}}$ será:

$$\frac{W}{q_0} = \frac{\Delta E_c}{q_0} = V_B - V_A = V(r) - \cancel{V(\infty)}^{=0} = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - 0\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}} \equiv \text{potencial em um ponto P qualquer a uma distância } r$$

de uma carga pontual Q.

- Ou seja, dado o potencial em um ponto qualquer do espaço, ele então indica qual é o trabalho que deve ser realizado por um agente externo para trazer uma carga unitária do infinito até aquele ponto; e este trabalho está relacionado com a variação da energia potencial do sistema.

- Agora quando temos um conjunto de pontos, formando uma superfície em que todos estão no mesmo potencial, então temos uma *superfície equipotencial*.

- Nesta situação, qual é o trabalho realizado (pelo agente externo) para deslocar a carga q_0 entre dois pontos (A e B) desta superfície?

- Sendo a $ddp = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{AB} = 0$ (por isso uma pilha descarregada não produz trabalho, por exemplo)

- Note que o potencial é uma grandeza escalar e, por isso, é mais fácil de calcular do que $\vec{E}$ ou $\vec{F}$. Conseguindo-se calculá-la, temos:

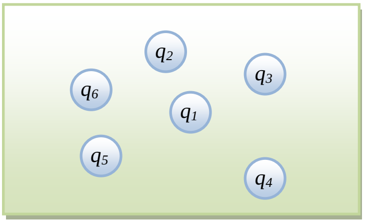
$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \quad \text{(coord. cartesianas)}$$

- Equivalentemente, em

$$\begin{cases} \text{coord. cilíndricas:} \quad \nabla_{\text{cil}} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \\ \text{coord. esféricas:} \quad \nabla_{\text{esf}} V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \end{cases}$$

- Na situação em que Q é uma carga extensa, o cálculo do potencial ao seu redor é calculado como:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}}$$



- Supor agora um conjunto de cargas pontuais fixas. Existe energia associada ao conjunto?

- *Sim*, porque há forças agindo sobre cada uma delas, de forma que, ao liberarmos as cargas, elas deslocam-se para o infinito (caso todas sejam positivas).

- Como passam a adquirir energia cinética (que inicialmente era nula), conclui-se que o conjunto possuía energia na forma de energia potencial.

- E o cálculo dessa energia (potencial) do conjunto pode ser feito considerando que se trata da mesma energia despendida para trazer cada uma delas do infinito até suas respectivas posições finais.

- Para posicionar a primeira carga q_1 (do infinito ao ponto 1), nenhum trabalho é realizado porque não há campo. $\boldsymbol{W_1 = 0}$.

- Trabalho para posicionar a segunda carga (do infinito ao ponto 2):

$$W_2 = (q_2)\left(-\int_{\infty}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}\right) = q_2 V_{21}$$

potencial no ponto 2 devido à carga 1

- Para posicionar a 3º carga:

$$W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

potenciais no ponto 3 devido às cargas 1 e 2

- E assim por diante. Conclusão: trabalho total (W_E) para posicionar todas as cargas será a energia do sistema:

$$W_E = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} + q_4 V_{41} + q_4 V_{42} + q_4 V_{43} + \ldots \qquad (1)$$

- Tomando uma parcela representativa desta soma:

$$q_3 V_{31} = (q_3)\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}}\right) = (q_1)\left(\frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}}\right) = (q_1)(V_{13})$$

- Podemos então escrever:

$$W_E = q_1 V_{12} + q_1 V_{13} + q_2 V_{23} + q_1 V_{14} + q_2 V_{24} + q_3 V_{34} + \ldots \qquad (2)$$

- Somando as equações (1) + (2):

$$2W_E = q_1 \underbrace{(V_{12} + V_{13} + V_{14} + \ldots)}_{\substack{\text{potencial no ponto 1} \\ \text{devido a todas as cargas,} \\ \text{menos a carga } q_1}} + q_2 \underbrace{(V_{21} + V_{23} + V_{24} + \ldots)}_{\substack{\text{potencial no ponto 2} \\ \text{devido a todas as cargas,} \\ \text{menos a carga } q_2}} + q_3 \underbrace{(V_{31} + V_{32} + V_{34} + \ldots)}_{\substack{\text{potencial no ponto 3} \\ \text{devido a todas as cargas,} \\ \text{menos a carga } q_3}} + \ldots$$

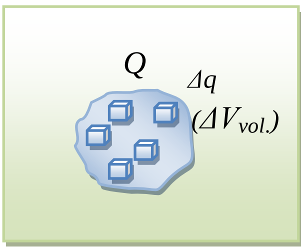
- Então:

$$2W_E = q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3 + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i = U} \quad \text{(energia do sistema)}$$

- No caso de uma distribuição contínua de cargas:

$$W_E \approx \frac{1}{2}\sum_i (\Delta q_i)(V_i) \ ; \ \text{sendo } \Delta q = \rho\, \Delta V_{vol.}$$

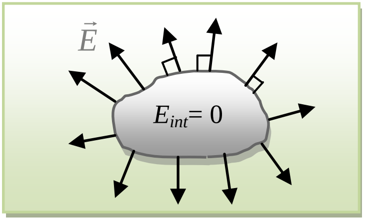


- E no limite em que $\Delta V_{Vol} \to 0$, temos:

$$\mathrm{U}_{\text{sistema}} = \mathrm{W}_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\int V dq\,; \ \text{e sendo } dq = \rho\, \Delta V_{Vol}, \text{ então}$$

$W_E = \frac{1}{2}\int \rho \, dV_{vol.}$ (essas duas últimas expressões não são tão úteis e, adiante, encontraremos outra mais apropriada).

- Mas antes disso, discutiremos campos em meios condutores e capacitores.
- <u>Corpos condutores</u>: Lembrar sempre que:



1. Campo $\vec{E}$ no interior de qualquer condutor é sempre zero

2. Direção de $\vec{E}$ em qualquer ponto da superfície de um condutor é sempre normal (perpendicular) à superfície.