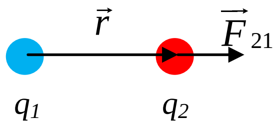
Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *2ª Aula* (02/08/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- Força de Coulomb entre 2 cargas pontuais:



; $$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

- Sendo a carga $q_1 = Q$ (extensa):

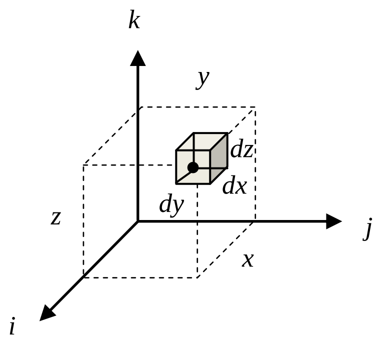
$$\vec{F}_{\text{em } q_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad \begin{cases} dq = \lambda dl \\ dq = \sigma dA \\ dq = \rho dV \end{cases}$$

- Por se tratar de expressão vetorial, investigar primeiro, observando a geometria do problema, a direção e sentido da força resultante.

- Muitas vezes facilita calcular primeiro o campo elétrico, $\boxed{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}}$, <u>depois</u> a força $\boxed{\vec{F} = q_0\vec{E}}$.

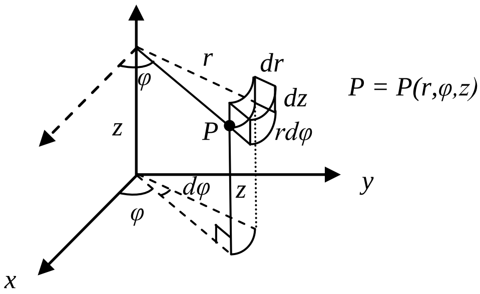
<u>*Cálculo de elementos de área e de volume*</u>

➢ Coordenadas cartesianas:



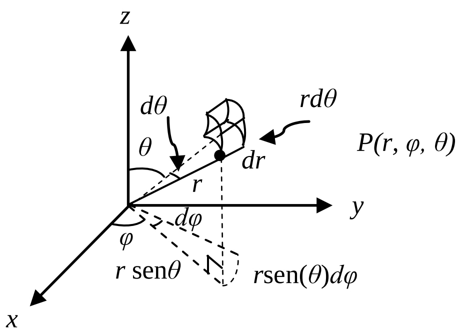
dV=dx dy dz ; obtido incrementando cada coordenada do sistema e multiplicando.

- Coordenadas cilíndricas:



$$dV = r dr\, d\varphi\, dz \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

- Coordenadas esféricas:

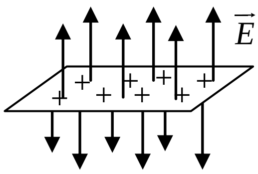


$$dV = (dr)(r d\theta)\,(r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi) \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

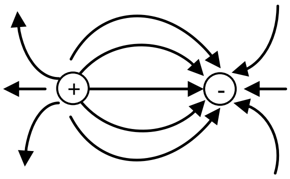
$$= r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

<u>Conceito de linhas de força</u> (campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$)

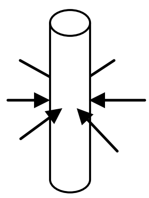
- Inicialmente idealizado por Michael Faraday (1971-1867) – ver experimento com limalhas e imã. Esse método permite avaliar qualitativamente e quantitativamente os campos (elétrico ou magnético) em uma certa região do espaço.
- Ou seja, conhecendo-se a estrutura das linhas de campo em uma certa região do espaço, a direção de $\vec{E}$ em cada ponto será tangente à linha naquele ponto, e o sentido de $\vec{E}$ será a da linha naquele ponto.
- **Exemplos.**
  - ✓ O plano infinito uniformemente carregado com carga $+Q$.



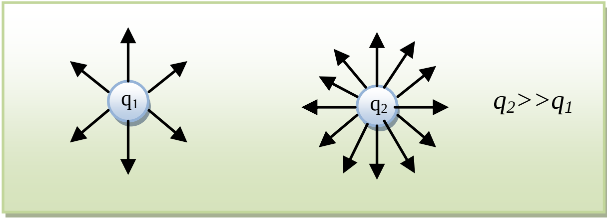
  - ✓ Configuração de dipolo elétrico



  - ✓ Cilindro muito comprido com carga – Q uniformemente distribuído.

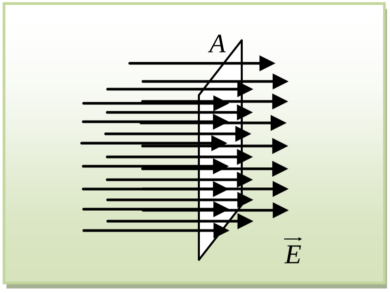


Note: a densidade de linhas em uma certa região indica a intensidade do campo.



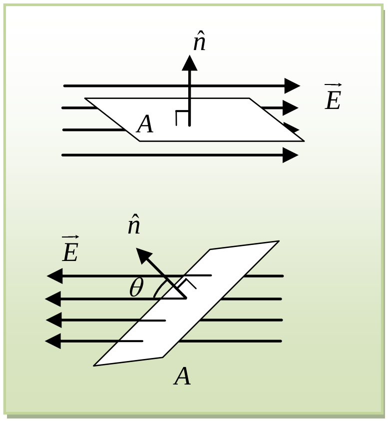
Conceito de *fluxo elétrico*

- Quantifica o campo (número de linhas de campo elétrico) que atravessa uma certa área *A*.



- Note que quanto maior *A* ou maior $\vec{E}$ $\longrightarrow$ maior será o fluxo ϕ:

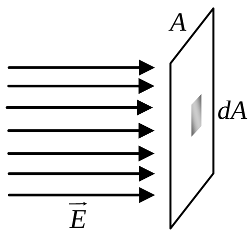
$$\boxed{\phi = E \cdot A = \left(\frac{N}{C}\right)\left(m^2\right)}$$



- Note também que ϕ deve depender, ainda, da orientação de *A* com respeito às linhas de campo $\vec{E}$, ou seja, admitindo um caráter vetorial para a área *A*, $\vec{A} = A\hat{n}$ onde $\hat{n}$ é o vetor normal a superfície *A*, então:

$$\phi = \vec{E}\cdot\vec{A} = EA\cos\theta = \left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right)A$$

- Na situação mais geral, envolvendo campos não uniformes, então o fluxo ϕ_i através de cada elemento de área ΔA_i será:



$$\phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i \Rightarrow \phi_{\text{total}} = \sum_i \phi_i = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

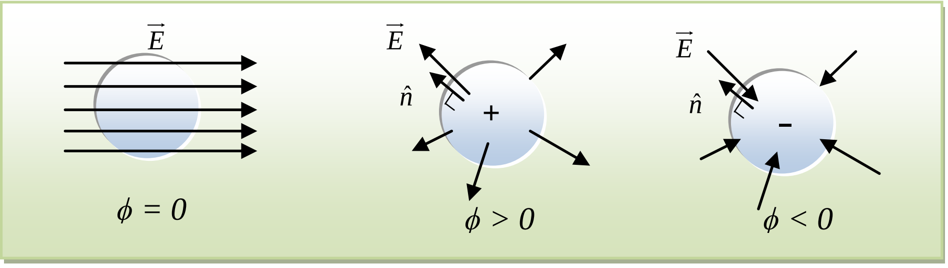
- De forma que, no limite $\Delta A_i \longrightarrow 0$, temos

$$\boxed{\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}_i = \int \vec{E}\cdot\hat{n}dA}$$

(obs.: a notação pode variar conforme o livro-texto.)

(observe que isso vale para qualquer campo vetorial!)

- O grande mérito de Gauss foi associar o conceito de fluxo das linhas de campo $\vec{E}$ com as cargas no interior de uma superfície fechada (imaginária). Ou seja, o fluxo das linhas de campo quantifica as cargas no interior da superfície fechada:



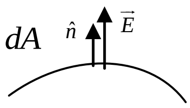
- E quanto maior/menor o fluxo, maior/menor a carga no interior dessa superfície. Ou seja:

$\boxed{\phi = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \dfrac{q_{int}}{\epsilon_0}}$ **(Lei de Gauss)** ; sendo que: $q_{int} = \int \rho dV; \int \sigma dA; \int \lambda dl$

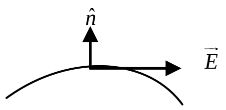
- Na verdade, a Lei de Gauss só será útil se a utilizarmos nas situações onde seja possível imaginar uma superfície fechada (gaussiana) de forma que satisfaça dois critérios:

   1. $\vec{E}$ deve ser <u>normal</u> ou <u>tangente</u> a qualquer ponto desta superfície, de forma que:

      a. Se normal (perpendicular), será paralela a $\hat{n}$: $\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint \vec{E}\, dA$



      b. Se tangente, $\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = 0$

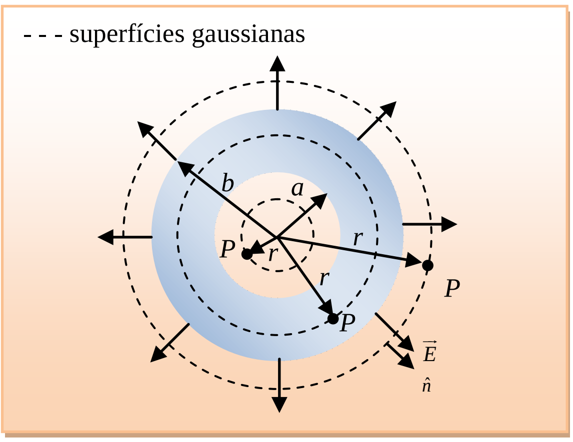


   2. Quando $\vec{E}$ for normal $\rightarrow \left|\vec{E}\right|$ deve ser constante em qualquer ponto da superfície:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = 0$$

- E lembre-se: a geometria do problema indica a forma da superfície gaussiana a ser escolhida.

Exemplo. Uma camada esférica (em azul) de raio interno *a* e raio externo *b*, está carregada com uma densidade de carga positiva $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{a}{r}$ $(a \le r \le b)$. Calcular o campo $\vec{E}$ em todo o espaço.



   i. *para* ***a < r < b***:

- Da *Lei de Gauss*:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint E\, dA = E \oint dA = 4\pi r^2 E$$

- Por outro lado:

$$q_{int} = \int \rho dV = \rho_0 a \int \left(\frac{1}{r}\right)\left(r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\right) \Rightarrow \rho_0 a \underbrace{\int_a^b r\,dr}_{\left.\frac{r^2}{2}\right|_a^b} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta}_{\left.-\cos\theta\right|_0^\pi = 2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$\therefore\; q_{int} = 2\pi\rho_0 a\left(b^2 - a^2\right) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{{}^{2}\cancel{4}\pi r^2}\,\frac{\cancel{2}\pi\,\rho_0 a\left(b^2 - a^2\right)}{\epsilon_0}$$

- Finalmente:

$$\boxed{\vec{E}\left(a < r < b\right) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\frac{\left(b^2 - a^2\right)}{r^2}\hat{r}}$$

ii. Para $r < a$:

$$q_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}\left(r < a\right) = 0}$$

iii. Para $r > b$: Mesmo procedimento que em (i); necessitando apenas mudar os limites de integração da integral para o cálculo da q_{int}:

$$\therefore q_{int} = 4\pi\rho_0 a \int_a^r r'\,dr' = 2\pi\rho_0 a\left(r^2 - a^2\right)$$

$$\therefore E = \frac{1}{{}^{2}\cancel{4}\pi r^2}\,\frac{\cancel{2}\pi\,\rho_0 a\left(r^2 - a^2\right)}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}\left(r > b\right) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\frac{\left(r^2 - a^2\right)}{r^2}\hat{r}}$$