Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *26ª Aula* (8/11/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

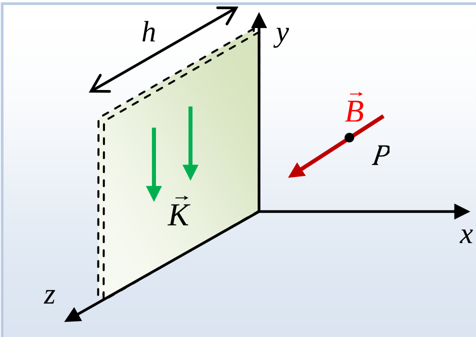
Na última aula vimos:

- $\boxed{\vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\vec{B}_0}$, de forma que mostramos: $\vec{E}_0\perp\vec{B}_0\perp\vec{k}$
- Tirando o módulo desta equação: $\boxed{E=cB}$ no vácuo.
- Densidade volumétrica de energia transportada pelas ondas EM:

$$\bar{u}\equiv\frac{\text{energia total}}{\text{volume}}=\frac{1}{2}\epsilon_0E_0^2\quad\left(\text{ou}\quad \bar{u}=\frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)$$

- Uma lâmina condutora superficial muito grande, percorrida por corrente $\vec{K}=\frac{I}{h}(\hat{y})$ cria um campo magnético em pontos muito próximos de sua superfície que é dado por:

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0K}{2}\hat{z}}$$



- Supondo agora que esta densidade de corrente na placa oscila na forma $K=K_0\cos\omega t$; então o campo B_z criado por esta corrente também oscilará da mesma maneira:

$$\boxed{B_z=\frac{\mu_0K}{2}\cos\omega t}$$

- Quanto a pontos mais afastados da placa, é razoável aceitar que a oscilação (alteração) do campo magnético não ocorrerá no mesmo instante, já que o “sinal” não se propagaria instantaneamente.
- De forma que ocorrerá um “atraso” em cada ponto do espaço, que irá depender da distância deste ponto à placa, além da velocidade de propagação do “sinal”, que consideremos como sendo a da luz.
- Desta maneira, pelo que discutimos duas aulas atrás:

$B_z(x,t) = \frac{\mu_0 K}{2}\cos(k_x x - \omega t)$; já que:

$$\cos(kx - \omega t) = \cos k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) = \cos k\left(x - \frac{\cancel{2\pi}}{T}\frac{\lambda}{\cancel{2\pi}}t\right) = \cos k\left(x - \frac{c\cancel{T}}{\cancel{T}}t\right) = \cos k(x - ct)$$

(como na propagação do pulso de onda visto na aula 24).

- Note que para $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(k_x x - \omega t) \to \cos(-\omega t) = \cos \omega t$, de forma que retornamos à situação inicial (original).

- Note agora que a partir da 3ª equação de Maxwell: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow$ associada a uma variação do campo magnético no tempo, deve ter um valor diferente de zero para o rotacional do campo elétrico.

- No exemplo que estamos discutindo, temos que:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(\frac{\mu_0 K}{2}\right)(-\omega)(-1)\sin(k_x x - \omega t)$$; na direção do eixo z.

- Ou seja: $\nabla \times \vec{E} = \frac{\mu_0 K}{2}\sin(k_x x - \omega t)\hat{z}$

- Se no lado direito da igualdade só tenho componente $\hat{z}$, isto significa que isto deve ocorrer também do lado esquerdo, <u>para qualquer ponto *x* do espaço e para um instante *t* qualquer</u>:

- $$\left(\nabla \times \vec{E}\right)_z = \left|\begin{matrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{matrix}\right|_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \overbrace{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}}^{=0}\right)\hat{z} = 0$$

- Desta forma:

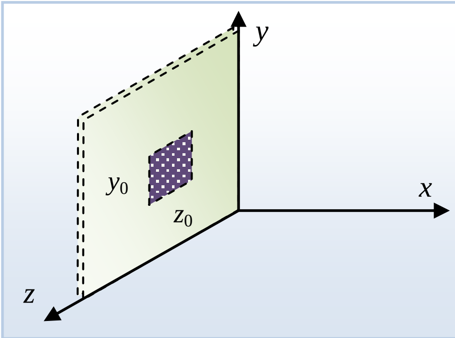
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2}\sin(k_x x - \omega t) \quad \Rightarrow \quad E_y = -\frac{\mu_0 K}{2}\int \sin(k_x x - \omega t)\,dx = (+)\frac{\mu_0 \omega K}{2}\frac{1}{k_x}\cos(k_x x - \omega t)$$

- Sendo que a constante de integração é nula por não haver carga resultante que provoque campo $\vec{E}$ estacionário.

- Então, para pontos fora da placa, temos:

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 K_0}{2}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\hat{z} \\ \vec{E} = \frac{\mu_0 \omega K_0}{2k_x}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\hat{y} \end{cases}$$; e o sinal propaga-se na direção de $\hat{x}$.

- Como vemos, os campos estão oscilando em fase em cada ponto do espaço.
- Uma questão a ser respondida: considerando esses campos fora da placa, há alguma energia associada a eles? E de onde viria esta energia.
- Certamente, ela vem do gerador que sustenta a corrente na placa; e vamos considerar este fato no nosso problema.
- Para calcularmos uma expressão para esta energia que se propaga, e que tem origem na placa condutora, vamos considerar uma pequena área $y_0 z_0$ da placa.



- E vamos calcular a energia emitida por esta unidade de área de placa, por unidade de tempo, considerando que esta energia vem do gerador (que aplica uma diferença de potencial $\mathcal{E}$ nessa área da placa). Consideraremos que não há perdas por efeito Joule.
- Então:

$$\frac{E}{(\Delta t)(A)} = \frac{P}{A} = \frac{\mathcal{E} I}{y_0 z_0} \text{; sendo } \begin{cases} \mathcal{E} \equiv ddp = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E)(y_0) \\ I = K\, z_0 \end{cases}$$

- De forma que: $\frac{P}{A} = \frac{(E\, \cancel{y_0})(K\, \cancel{z_0})}{\cancel{y_0 z_0}} = EK$; sendo que metade da energia (potência) do gerador se propaga para um lado da placa e a outra metade para o lado oposto.
- Assim, no sentido de x positivo: $\boxed{\frac{P}{A} = \frac{EK}{2}}$
- Mas, como vimos, $B = \frac{\mu_0 K}{2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2B}{\mu_0}$; que, substituindo acima:
- $\frac{P}{A} = \frac{E}{2}\frac{2B}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} E_{rad} B_{rad} \quad \rightarrow$ é o resultante que queremos obter.
- Definimos então: $\frac{\text{Potência da onda}}{\text{Área (que ela atravessa)}} \equiv |\vec{S}| \equiv$ **Vetor de Poynting**.
- Ou seja $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}}$ (note o produto vetorial de $\vec{E}$ por $\vec{H}$ fornecendo a direção e sentido de propagação da onda)
- De forma que o *Vetor de Poynting* possui:

i. ***Módulo***: corresponde à energia por unidade de tempo, por unidade de área, transportada pela onda

ii. ***Direção e sentido***: o mesmo do vetor de onda $\vec{k}$

iii. ***Unidade***: W/m^2

- Note que, como tanto $\vec{E}$ quanto $\vec{B}$ oscilam (em fase), então $\vec{S}$ também oscila.
- Chamamos de "**intensidade da onda eletromagnética**" o valor <u>médio do módulo do vetor de Poynting</u>: $\boxed{I = \bar{S}}$
- Observe que existe uma relação entre a intensidade e a densidade volumétrica de energia da onda:

$$I = \bar{S} = \left\langle |\vec{S}| \right\rangle = \frac{1}{\mu_0} \overline{\left\{ \left[E_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]\left[B_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]\left[\sin 90^o\right] \right\}}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \overline{\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_0{}^2}{c}$$

- Multiplicando e dividindo por c: $I = \dfrac{1}{2\mu_0 c^2} cE_0{}^2 = \dfrac{\epsilon_0 \cancel{\mu_0}}{2\cancel{\mu_0}} cE_0{}^2$
- Lembrando que $\bar{u} = \dfrac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = c\bar{u}}$
- Retornando ao feixe luminoso, quadrado (A = 10^{-2} m^2) de potência P = 3 W, discutido anteriormente:

  a) Qual é a intensidade do feixe?

  b) Determine E_0 a partir do item acima e compare com o resultado obtido antes.

a) $I = \bar{S} = \dfrac{\text{Potência}}{\text{Área atravessada}} \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{3\text{ W}}{10^{-2}\text{ m}^2} = 300\dfrac{W}{\text{m}^2}$

b) $I = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \sqrt{2I\mu_0 c} = 475\text{ V/m}$

--------------- x x x --------------

- Veremos, na próxima aula, duas propriedades interessantes das ondas eletromagnéticas:

1. As ondas EM transferem momento (e energia) ao incidirem em uma superfície, e, portanto, exercem uma "***Pressão de Radiação***".

2. As ondas EM podem ser ***polarizadas***.