# Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *24ª Aula* (01/11/2012)

***Prof. Alvaro Vannucci***

---

**Na última aula vimos**:

- Equação da continuidade: $\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

- Aplicando os teoremas do divergente e de Stokes:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) dV \\ \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dA \end{cases}$$

Obtemos as quatro equações de Maxwell:

$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho}$ (Lei de Gauss)

$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$ (Lei de Gauss para o Magnetismo)

$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (Lei de Gauss)

$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ (Lei de Ampère)

- Lembrando que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e que ***no vácuo*** $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, então

1) $\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = 0}$

2) $\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$

3) $\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

4) $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

---

- Maxwell, buscando desacoplar as equações (3) e (4) que envolviam tanto $\vec{E}$ quanto $\vec{B}$, aplicou o ***operador rotacional*** em cada uma delas.

- Na equação (3) $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\xrightarrow{\text{(usando eq. 4)}}\underbrace{\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)}_{=0\text{ ; pela eq (1)}}-\nabla^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}$$

- Se for aplicado o rotacional na equação (4) teremos, da mesma maneira:

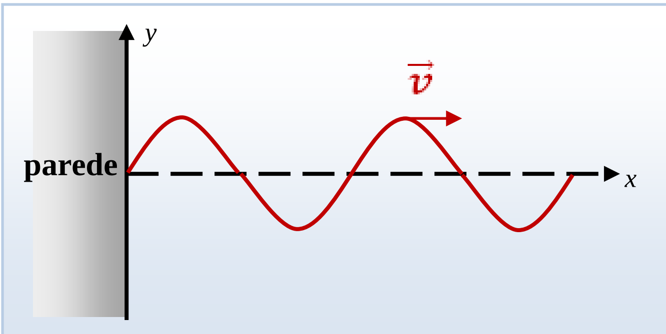
$$\boxed{\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0}$$

- Lembrando que o operador Laplaciano, sobre um vetor $\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$ é

$$\nabla^2\vec{F}=\frac{\partial^2F_x}{\partial x^2}\hat{i}+\frac{\partial^2F_y}{\partial y^2}\hat{j}+\frac{\partial^2F_z}{\partial z^2}\hat{k}$$

- Vemos que, cada componente das equações de onda $\vec{E}$ e $\vec{B}$ acima são muito semelhantes às que representam a propagação de uma onda em uma corda (em 1D):

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\equiv\text{equação de onda}$$

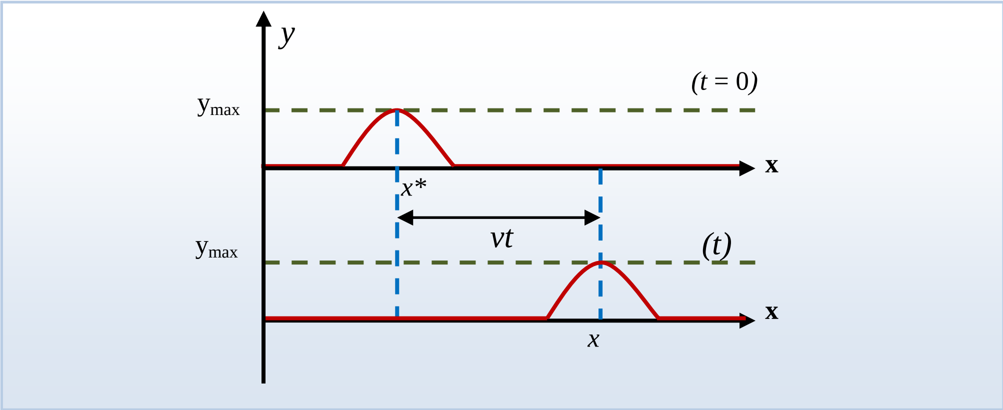



- Maxwell então percebeu, por comparação, que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ no vácuo se propagariam com velocidade v*

$$\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{v^{*2}}\quad\Rightarrow\quad v^*=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\left(8{,}85\times10^{12}\,\frac{C^2}{N^2\cdot m^2}\right)\left(4\pi\times10^{-7}\,\frac{Wb}{A\cdot m^2}\right)}}=2{,}995\times10^{8}\,\text{m/s}=c\ !!$$

- Vamos agora lembrar algumas propriedades de onda propagando-se em uma corda:

- Considere inicialmente apenas um “pulso de onda” em dois instantes diferentes:




- Note que em $t = 0$ o pulso pode ser representado por uma função $y = f(x)$; sendo que $y_{max} = f\,(x = x^*)$

- Após um tempo $t$, o pulso percorre distância $vt$ e a função que agora representa a onda na corda será $y_{max} = f(x - vt)$ (propagação no <u>sentido positivo</u> do eixo $x$)

- Ou seja, com o passar do tempo, o termo $vt$ cresce enquanto que os valores de x tornam-se cada vez maiores. Daí a necessidade do sinal (–): é para que o valor de $y_{max}$ acompanhe o pulso de onda.

- Da mesma maneira, se o pulso de onda se propaga <u>no sentido inverso</u> (valores de $x$ decrescentes) então:

$$y_{max} = f(x + vt)$$

- No caso de uma onda senoidal/cossenoidal propagando-se na corda no sentido de <u>valores crescentes</u> de $x$:

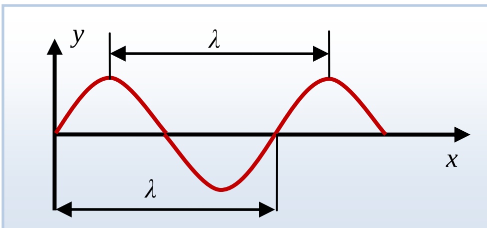
$\boxed{y(x,t) = y_{max} \cos\,(kx - \omega t)}$ ; que é a solução da <u>equação de onda</u> $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$

- Sendo que **k** ≡ ***número de onda***; que indica quantas partes inteiras de uma onda estão contidas no intervalo de 2 π metros de corda.

- Ou seja, $k = 2\pi/\lambda$, **λ ≡ *comprimento de onda***

- E também:

$$\begin{cases} \lambda = vT = \dfrac{v}{f} \\ \omega = 2\pi f \quad \equiv \quad \text{frequência angular (em s}^{-1}\text{)} \end{cases}$$




- Analogamente, podemos estabelecer como soluções para as equações de onda dos campos elétricos e magnéticos:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right) \end{cases}$$ que correspondem à aproximação de ”***onda plana***”

- Sendo que:

  i. $\vec{k}$ ≡ “vetor de onda” ($\left|\vec{k}\right| = k \equiv$ número de onda) que define a direção e sentido de propagação da onda

  ii. $\left|\vec{E}\right|$ e $\left|\vec{B}\right|$ representam as amplitudes máximas de $\vec{E}$ e $\vec{B}$

  iii. $\vec{r}$ define certa direção no espaço de forma que $\vec{k} \cdot \vec{r}$ é a projeção de $\vec{k}$ nesta direção.

- Exemplo: Dado $\vec{E} = 20\cos\left(3x - 6\times10^8 t\right)\hat{i}$ ($SI$) para uma onda eletromagnética, calcular:

  a) a direção de propagação de onda e o número da onda

  b) sua amplitude

  c) o comprimento de onda

  d) a velocidade da onda

- Comparando com $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$:

  a) $\vec{k} \cdot \vec{r} = \left(k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k}\right)\cdot\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = xk_x + yk_y + zk_z$. Comparando com a expressão do enunciado: $k_x = 3$, $k_y = k_z = 0$, e, portanto, $\vec{k} = 3\hat{i}$ e $k = 3$ m$^{-1}$.

  b) $E_0$ = 20 V/m

  c) K = 3π/λ = 3 m$^{-1}$ → λ = π = 3,14 m

  d) λ = v/f → v = λf = (λ)(ω/2π) = (π)(6 × 10$^8$/2 π) = 3× 10$^8$ = c.

- Agora, uma questão a ser respondida: a onda que corresponde a $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilando será do tipo *transversal* ou *longitudinal*?

- Para descobrir isto, vamos escrever $\vec{E}$, por exemplo, em coordenadas cartesianas:

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} = \left(E_{0x}\hat{i} + E_{0y}\hat{j} + E_{0z}\hat{k}\right)\cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$$

Sendo que $\begin{cases} \vec{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k} \\ \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$

- Tomando a 1ª equação de Maxwell no vácuo e lembrando que ela deve valer para qualquer **x** e qualquer **t**.

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=-E_{0x}k_x\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)-E_{0y}k_y\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)=-E_{0z}k_z\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad \nabla\cdot\vec{E}=-\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\underbrace{\left(E_{0x}k_x+E_{0y}k_y+E_{0z}k_z\right)}_{=\vec{k}\cdot\vec{E}_0}=0$$

- Ou seja, $\vec{k}\cdot\vec{E}_0\left[-\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right]=0$ <u>sempre</u> (para valores quaisquer de $x$ ou $t$)!

- Portanto $\boxed{\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0}$, e, igualmente, $\boxed{\vec{k}\cdot\vec{B}_0=0}$

- Destes resultados concluímos que $\vec{k}\perp\vec{E}_0$ e $\vec{k}\perp\vec{B}_0$ ; e lembrando que $\vec{k}$ fornece a direção e o sentido de propagação da onda, então a onda eletromagnética é do tipo ***transversal***.