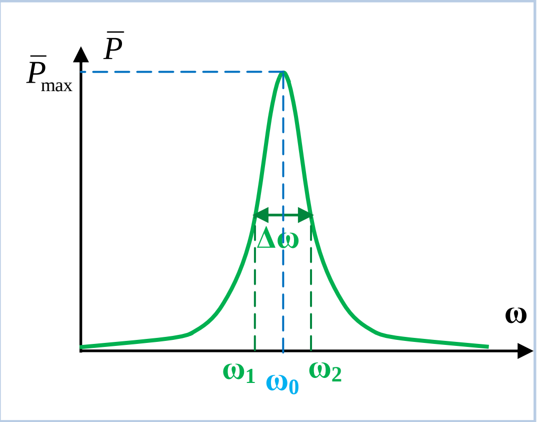
Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *23ª Aula* (29/10/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- *Fator de Qualidade* de um circuito RLC:

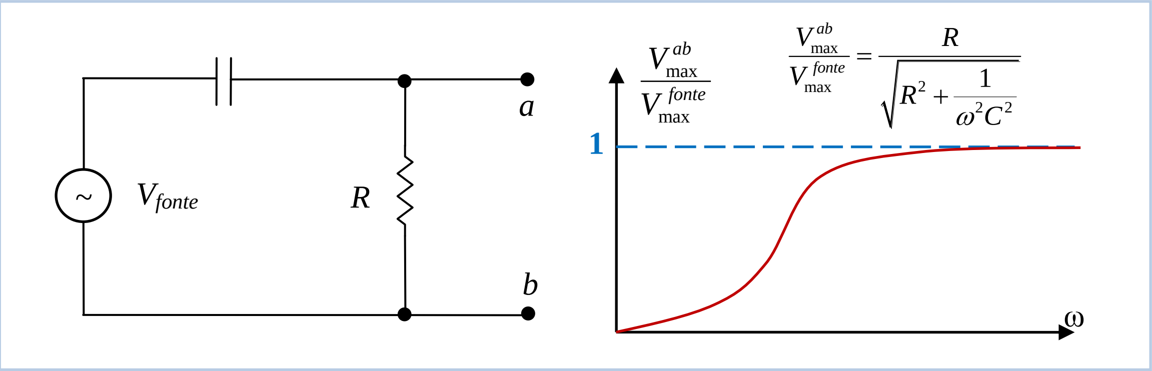
$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}\ ;\ \Delta\omega \equiv \text{"largura a meia-altura"}$$



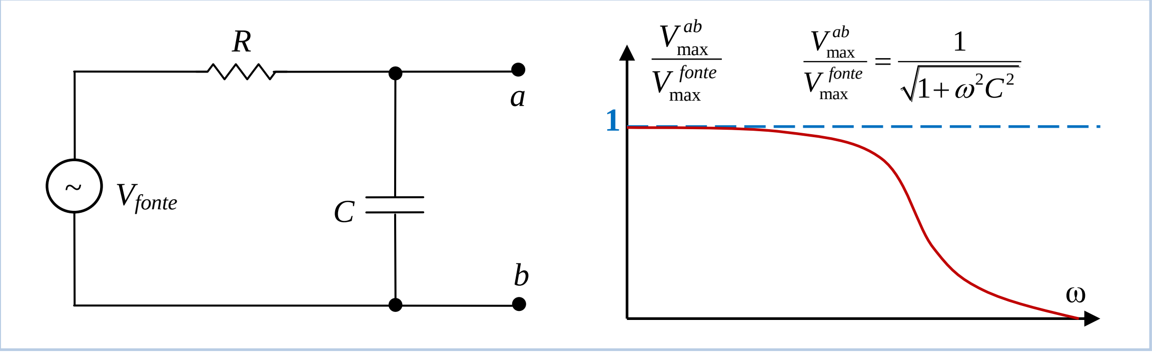
- $\bar{P}_{consumido} = I_{ef} V_{ef} \cos\phi$

($\cos\phi$ ≡ ***fator de potência***)

- Filtro "***passa-alta***":



- Filtro "***passa-abaixa***":



- Retomando as equações básicas do eletromagnetismo já vistas:

1. $\oint \vec{D}\cdot\hat{n}\,dA = q_{\text{int}} \quad = \quad \int \rho\, dV$ — Lei de Gauss
2. $\oint B\cdot\hat{n}\,dA = 0$ — Lei de Gauss para o Magnetismo
3. $\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA$ — Lei de Faraday
4. $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enl}^{real}$ — Lei de Ampère

- Estas quatro equações, como veremos, resultarão nas quatro equações de Maxwell que representam, para o Eletromagnetismo (clássico), o que as equações de Newton são para a Mecânica (clássica).

- Inicialmente, será interessante representar estas equações na sua forma diferencial (o que irá simplificar o desenvolvimento dos nossos cálculos)

- Para mostrar isso, vamos lembrar, do cálculo III, os teoremas do ***Divergente*** e de ***Stokes***:

(1) Teorema do divergente $\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \int_V \left(\nabla\cdot\vec{F}\right) dV$

(2) Teorema de Stokes $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\,dA$

- Por exemplo, aplicando o teorema do divergente na primeira equação:

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\,dA = \int_V \left(\nabla\cdot\vec{D}\right) dV = q_{\text{int}}^{livre} = \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{livre}}$$

- Fazendo o mesmo na segunda equação: $\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$

- Aplicando o Teorema de Stokes na terceira equação:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\hat{n}\,dA = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = \int_S \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\hat{n}\,dA$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

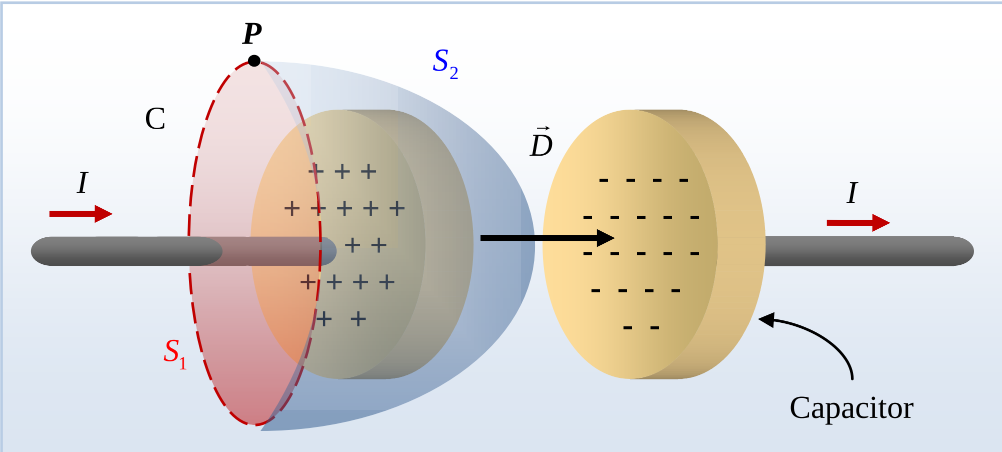
- Quanto à quarta equação:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\,dA = I_{env}^{real}\int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,dA$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla\times\vec{H} = \vec{J}}$$

- E também sempre lembrar: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$ e $\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$

- Na segunda metade do século XIX, Maxwell mostrou que a Lei de Ampère, quando aplicada ao problema de carga de um capacitor, levava a um resultado que era incoerente: algo estava "faltando" na formulação matemática.
- Na carga do capacitor de placas paralelas ao lado, realizada lentamente, para calcular o campo magnético no ponto P da figura:

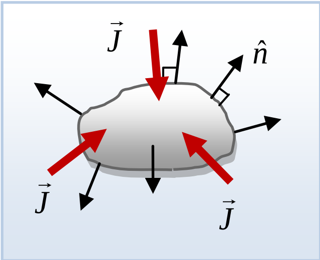


- $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enl}^{real}$ sendo que a circuitação (C) escolhida passando pelo ponto P (em vermelho) está mostrada na figura.
- Agora, substituindo $I_{enl} = \int \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA$; ou seja, a corrente enlaçada corresponde a uma densidade de corrente $\vec{J}$ atravessando uma superfície.
- Mas, qual é a superfície estaríamos considerando?
- Certamente será uma superfície definida pela circuitação C escolhida para efetuar a integral.
- Mas observe que ela não é única! A circuitação C define tanto a superfície S_1 (em vermelho) como também a superfície S_2 (em azul) da figura!
- E o que é mais notável: se formos calcular o fluxo de $\vec{J}$ através desta superfície S_2, para termos a corrente enlaçada, ele seria zero! (já que nenhuma carga atravessa S_2 enquanto o capacitor é carregado).
- Maxwell percebeu então que a Lei de Ampère como originalmente escrita, não conseguiria ser aplicada em todas as situações.
- Ele percebeu ainda que, embora nenhuma carga estivesse atravessando S_2, havia uma variação de fluxo do campo $\vec{E}$, devido ao acúmulo de cargas nas placas do capacitor, atravessando esta segunda superfície.
- Ele concluiu então que um termo devia ser adicionado à equação de Ampère para torná-la mais geral.

- Para descobrir que termo estava faltando, ele utilizou-se da equação da continuidade:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

- Esta equação pode ser facilmente obtida se observamos uma superfície fechada qualquer e calculamos o fluxo de cargas através dessa superfície (para obter a corrente total que a penetra).



- Cálculo da corrente: $I = -\oint \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA$

- Nesta última equação, vamos aplicar o teorema do Divergente:

$-\oint \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA = -\int_V \left(\nabla \cdot \vec{J}\right) dV$ e usar que

$$I = \frac{dQ}{dt}; \quad Q = \int \rho dV \quad \Rightarrow \quad I = \frac{d}{dt}\int \rho dV \xrightarrow{\text{volume constate}} I = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

- Portanto $\int_V \left(\nabla \cdot \vec{J}\right) dV + \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$ = **"equação da continuidade"**

- Esta equação informa que o fluxo da densidade de corrente através de uma superfície fechada qualquer acarreta uma variação da carga no seu interior.

- Ou seja, se $\vec{J} < 0 \quad (> 0) \rightarrow$ corrente flui para fora (para dentro) do volume correspondente à superfície fechada e, portanto, a carga interna diminui (aumenta).

- Retornando ao problema do capacitor sendo carregado lentamente, vamos observar o seguinte:

- 1º) Se aplicarmos a Lei de Ampère tomando a superfície S_1 (determinada pela circuitação C), temos:

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enl} = I = \oint_{S_1} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA$ (≡ fluxo de $\vec{J}$ através de S_1)

- Enquanto que, aplicando a Lei de Ampère à superfície S_2 (também delimitada pela circuitação C), então

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enl} = \oint_{S_2} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA = 0$ (não há fluxo através de S_2)

- Claramente estes dois resultados são inconsistentes, já que levam à situação:

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{J}\cdot\hat{n}\,dA \neq 0 \;\; (\textit{ou seja, nem toda carga que entra, sai})$$

- Consequentemente, do teorema do Divergente, temos que $\nabla\cdot\vec{J}\neq 0$ (resultado indica corretamente que as cargas estão acumulando-se nas placas do capacitor).

- 2º) Porém, se decidirmos aplicar diretamente no problema a Lei de Ampère na mesma forma diferencial, então, tomando o divergente dos dois lados:

$$\underbrace{\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)}_{=0}=\nabla\cdot\vec{J} \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\vec{J}=0 \text{ sempre (inconsistente com o resultado anterior)}$$

O divergente do rotacional é ***sempre*** zero!

- Para contornar esta contradição, Maxwell considerou que a Lei de Ampère precisava ser complementada:

- Observando que a Lei de Gauss na forma diferencial é $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$, ele teve a idéia de escrever a equação de continuidade da forma

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0$$

- De forma que não mais teremos $\nabla\cdot\vec{J}=0$ na Lei de Ampère, se $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ for a ela acrescentada.

- Ou seja, acrescentando o termo $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ à Lei de Ampère, ela passa a ter validade mais geral.

- Então, $\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$

"corrente de deslocamento"

- E isto completa **as quatro equações de Maxwell:**

1) $\boxed{\nabla\cdot\vec{D}=\rho}$

2) $\boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0}$

3) $\boxed{\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$

4) $\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$

- Sendo que ***no vácuo***, não havendo cargas ou corrente: $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$

- Portanto, no vácuo:

1) $\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = 0}$

2) $\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$

3) $\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

4) $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$