Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *20ª Aula* (18/10/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

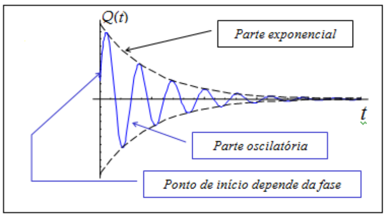
- Circuito RC: $V_C(t) = V_{\max} e^{-t/\tau}$; $\tau = RC$ e $V_{\max} = \dfrac{Q_{\max}}{R}$

- Para $t = t_{1/2}$: $\dfrac{V_{\max}}{2} = V_{\max} e^{-t_{1/2}/\tau} \Rightarrow \tau = \dfrac{t_{1/2}}{\ln(1/2)} \approx 1{,}44\, t_{1/2}$

- Circuito RLC: equação diferencial do circuito: $\boxed{L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q}{C} = 0}$

- Supondo solução do tipo $Q = e^{\alpha t}$, caímos em uma equação do segundo grau para valores possíveis de $\boldsymbol{\alpha}$: $\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$; onde:

$$\gamma = \frac{R}{L} \quad e \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



- 1º caso: $\dfrac{\gamma}{2} < \omega_0$: "***amortecimento subcrítico***".

- Então $\alpha = -\dfrac{\gamma}{2} \pm i\omega$; *sendo* $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\gamma^2}{4}}}$; de forma que a solução mais geral é $\boxed{Q(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \delta)}$

➢ <u>2º Caso</u>: $\dfrac{\gamma}{2} = \omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega_{\text{oscilação}} = 0$ e, portanto, $\alpha = \dfrac{\gamma}{2}$ apenas!

➢ Agora $\boxed{Q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt)}$

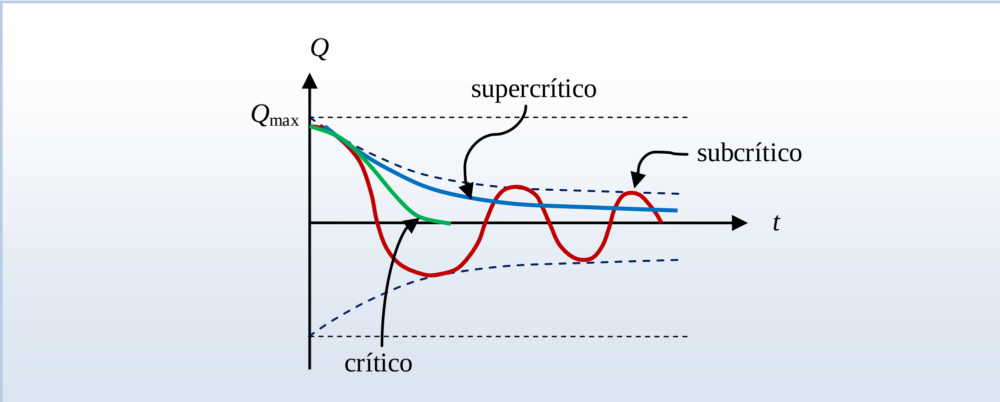
Termo adicionado para deixar a equação mais geral possível (note que derivando *Q(t)* duas vezes, este termo desaparece)

➢ Esta solução representa o "***amortecimento crítico***"

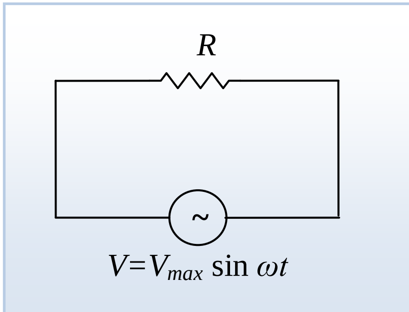
➢ <u>3º Caso</u>: $\dfrac{\gamma}{2} > \omega_0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\gamma^2}{4} - \omega_0 > 0$ e $\therefore \quad \pm\sqrt{\dfrac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = \beta$; que representa uma grandeza <u>real</u> (não há oscilações!)

- Solução: $Q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right) \equiv$ "***amortecimento supercrítico***"

- Representação gráfica dos três tipos de amortecimento:



Circuitos com tensão/corrente alternada



- Caso mais simples: <u>resistor</u> e <u>fonte AC</u>

- Balanço de energia no tempo ($P_{\text{gerada}} = P_{\text{dissipada}}$)

$$V\cancel{I} = RI^{\cancel{2}} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{V_{\max}}{R}\sin\omega t = I_{\max}\sin\omega t$$

- Observe, deste resultado, dois aspectos interessantes.

1º) $I_{\max} = \frac{V_{\max}}{R}$ corresponde ao valor de pico.

- Agora, na prática, o que realmente interessa saber é a potência média consumida em função do tempo; que corresponde ao *valor quadrático médio* (ou *valor eficaz* da corrente) elevado ao quadrado e multiplicado por R ($\bar{P} = RI_{\text{eficaz}}^2$).

- *Demonstração:*

$$\bar{P}_{\text{dissipada}} = R\overline{i^2} = R\overline{I_{\max}^2 \sin^2\omega t} = RI_{\max}^2\overline{\sin^2\omega t}\text{; sendo que:}$$

$$\overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\sin^2\omega t\,dt = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2\tau}\int_t^{t+\tau} \cos 2\omega t \, dt = \frac{1}{2\tau}\left(\cancel{t} + \tau - \cancel{t}\right) - \frac{1}{2\tau}\left(\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right)_t^{t+\tau} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega\tau}\underbrace{\left[\sin 2\omega(t+\tau) - \sin 2\omega t\right]}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} = \overline{\cos^2 \omega t}}$$

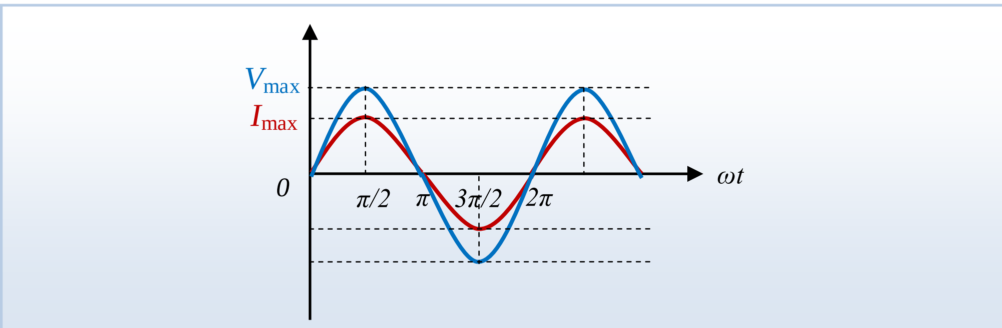
- Então:

$$\bar{P} = R\frac{1}{2}I_{\max}^2 = R\underbrace{\left(\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\right)^2}_{\equiv I_{eficaz} \approx 0{,}707\, I_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{P} = RI_{\text{eficaz}}^2}$$

- Por exemplo, quando medimos a tensão de rede elétrica doméstica V = 120 V, na verdade estamos medindo V_{ef} = 120 V. A tensão de pico será:

$$V_{\text{ef}} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad V_{\max} = \left(\sqrt{2}\right)(120) = 170\ V$$

2ª) Agora, das relações $\begin{cases} V = V_{\max} \sin \omega t \\ I = I_{\max} \sin \omega t \end{cases}$, vemos que as duas grandezas oscilam em fase

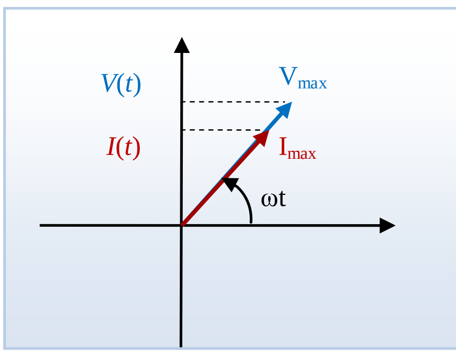


- Uma maneira conveniente de mostrar esta variação em fase, destas duas grandezas, é através de um "***diagrama de fasores***".

- Um fasor será representado por uma "*flecha*" que gira no sentido anti-horário com variação angular ωt e que tem as propriedades:

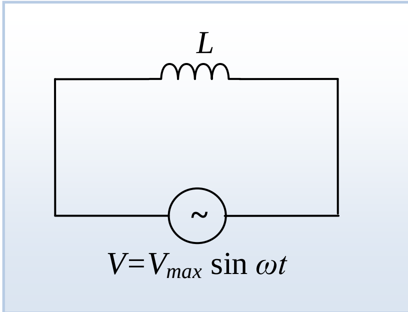
(i) o comprimento (módulo) do fasor corresponde ao valor máximo da grandeza considerada

(ii) sua projeção sobre o eixo vertical fornece o valor instantâneo da grandeza.



- No caso do circuito *resistor + fonte AC*:

- No caso de um *indutor* conectado a uma *fonte AC*:



- Balanço de energia: $VI = \dfrac{d\,\overset{\frac{1}{2}LI^2}{U_L}}{dt} = \dfrac{1}{\cancel{2}} L \cdot \cancel{2} I \dfrac{dI}{dt}$

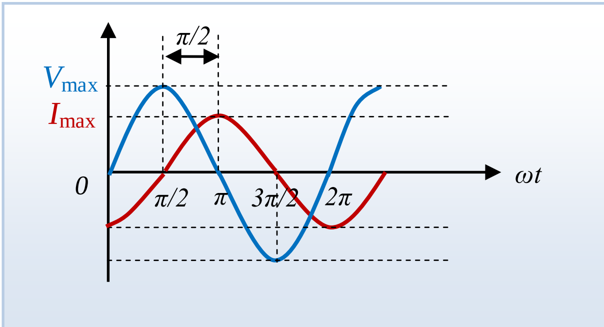
$$\Rightarrow V = L\frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad dI = \frac{V}{L}dt = \frac{V_{\max}}{L}\sin(\omega t)\,dt$$

$$\xrightarrow{\text{(integrando)}} \quad I = -\frac{V_{\max}}{\omega L}\cos(\omega t) = -I_{\max}\cos(\omega t)\ ;$$

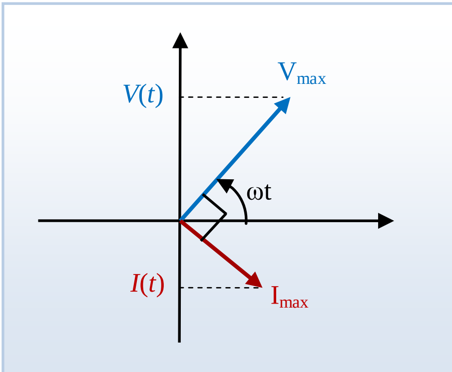
sendo que a constante de integração foi desprezada, pois depende das condições iniciais que não tem importância neste caso.

- Construindo um gráfico de I(t) e V(t):

ωt	(V) sin ωt	(I) -cos ωt
0	0	-1
π/2	1	0
π	0	1
3π/2	-1	0
2π	0	-1



- Diagrama de fasores correspondentes:



- Note finalmente que, do resultado obtido,

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad V_{\max} = \omega L I_{\max}$$

- Sendo $\boxed{\chi_L = \omega L}$ a ***Reatância indutiva*** ;

  e para qualquer *t*: $\boxed{V(t) = \chi_L I(t)}$

- Não esqueça! Apesar de a reatância ter unidade de Ohms, <u>não há dissipação de energia</u> no indutor ideal.

- E note também que a reatância indutiva cresce com o aumento de frequência da fonte!