Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *1ª Aula* (30/07/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

Revisão das Leis de Gauss, de Ampère e de Faraday

- *Eletrização*: as primeiras observações sobre eletrização ocorreram aproximadamente em aproximadamente 600 a.C. quando Tales de Mileto atritou âmbar (*ELEKTRON* em grego) em lã de carneiro e observou a atração de fiapos de palhas (como no *experimento do canudo + isopor e parede*)

- Mais ou menos nesta época, observou-se também que pedras de magnetita (provenientes de uma região da Grácia chamada Magnésia) atraiam farpas de ferro; mas os dois fenômenos não eram diferenciados.

- Somente em cerca de 1600 d.C. é que William Gilbert (médico da corte inglesa) mostrou a diferença entre a atração elétrica e magnética, e explicou o funcionamento da bússola: a Terra corresponderia a um grande imã.

- Em 1747, Benjamin Franklin propôs que todos os corpos possuiriam uma quantidade (natural) de "*Fluído Elétrico*".

- No processo de atrito, por exemplo, parte deste "fluido" seria então transferido de um corpo (-) para o outro (+)

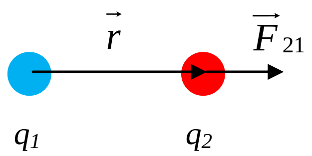
- Este modelo explicaria o eletroscópio, mas não o comportamento do pêndulo eletrostático (por que a repulsão após o contato?)

  Eletroscópio: http://fisica.uems.br/aprenda/eletroscopio/

  Pêndulo: http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_pendulo

- A explicação mais ou menos definitiva só ocorreu no final do século XIX e início do século XX, quando a estrutura atômica foi determinada: o elétron seria o grande responsável pelos fenômenos eletro-magnéticos.

- Mas foi Charles Coulomb (1736-1806) quem primeiro estabeleceu uma relação quantitativa envolvendo corpos com cargas:



$$\vec{F}_{21} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}$$

onde:

$\vec{F}_{21}$ é a força que age no corpo 2 devido ao corpo 1;

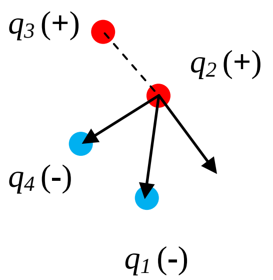
$\vec{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ é o versor do vetor que "une" as duas cargas (indica direção e sentido da força);

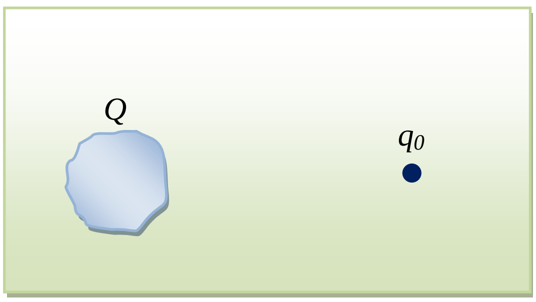
$k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \sim 9\times10^9 \ \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$ é a *constante eletrostática* (ou *de Coulomb*); e

$\epsilon_0 \sim 8{,}85\times10^{-12} \ \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ é a *permissividade elétrica do vácuo.*

- Tendo-se a força sobre q_2, têm-se as informações sobre o movimento (velocidade, aceleração, trajetória, etc.) da carga.

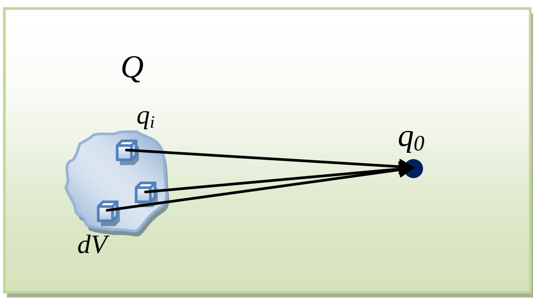
- No caso de haver diversas cargas: $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \ ...$





- E na situação em que uma carga de prova q_0 (pontual) é colocada próxima de outra carga Q não pontual (macroscópica)?

- Como calcular a força sobre q_0 neste caso (como localizar o vetor que liga as cargas?)



- Nestes casos podemos "dividir" Q e usar o "Princípio de Superposição" (já utilizado antes)

- Cada elemento de volume dV possui certa carga q_i de forma que

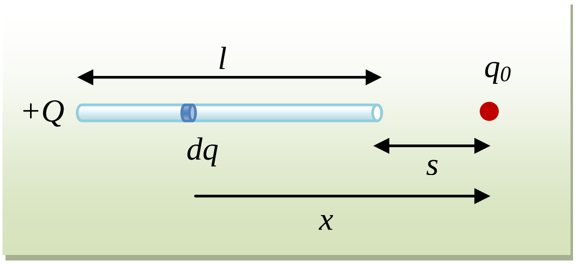
$$\vec{F}_{\text{em } q_0} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i k \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

- No limite em que $\Delta V \to 0 \ \Rightarrow \ q_i \to dq$ e $\boxed{\vec{F}_{\text{em } q_0} = \dfrac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \displaystyle\int \frac{dq}{r^2} \hat{r}}$ $\longrightarrow$ (note que trata-se de uma expressão vetorial).

- Observando a simetria do problema, muitas vezes fica fácil saber, de imediato, a direção e sentido da força resultante.

- Fica apenas faltando calcular o <u>módulo</u> da força sobre a carga de prova.

Exemplo 1. Um bastão de comprimento l possui carga $+Q$ uniformemente distribuída. Calcule a Força $\vec{F}$ sobre a carga de prova $+q_0$ localizada a uma distancia s de uma das extremidades.



Vejamos:

1) Analisando a direção e o sentido da força sobre q_0: $\vec{F} = F\,\vec{i}$
2) Calculando contribuição dF (em módulo) devido a um dq característico, a uma distância x de q_0 :

$$F = \int dF = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{x^2}$$

3) Carga uniformemente distribuída (linearmente, no caso):

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl \Rightarrow \int dq = \int \lambda dl \Rightarrow Q = \lambda \int dl = \lambda l \Rightarrow \lambda = \frac{Q}{l}$$

Lembre: Quando a carga é uniformemente distribuída sobre uma <u>superfície</u> ou <u>volume</u> temos, analogamente:

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{dq}{dA} \Rightarrow \boxed{\mathrm{dq} = \sigma dA} & \text{(superfície)} \\ \rho = \dfrac{dq}{dV} \Rightarrow \boxed{dq = \rho dV} & \text{(volume)} \end{cases}$$

Então:

$$F = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_s^{s+l}\frac{\lambda dx}{x^2} = \frac{\lambda q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_s^{s+l} x^{-2}dx = \frac{\lambda q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x^{-2}}{-1}\right]_s^{s+l}$$

$$= \frac{\lambda q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s+l} - \frac{1}{s}\right] = \frac{\lambda q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-\cancel{s}+\cancel{s}+l}{s(s+l)}\right] \quad e \therefore \quad \vec{F} = \frac{q_0\,\overbrace{\lambda l}^{=Q}}{4\pi\epsilon_0 s(s+l)}$$

- Observe que no limite $s \gg l$, $\underline{F = \dfrac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 s^2}}$ que corresponde ao caso de carga pontual.

- Agora, e quando não se tem uma carga de prova pontual, mas sim uma outra carga extensa? Neste caso, como no caso gravitacional, fica mais fácil introduzir o conceito de ***campo***.

- Inicialmente vamos considerar que o campo elétrico $\vec{E}$ corresponde à propriedade que possui os pontos espaciais ao redor de uma carga Q (pontual) qualquer, de forma que uma carga de prova q_0 ali colocada sente uma força: $\vec{F} = q_0 \vec{E}$; $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$

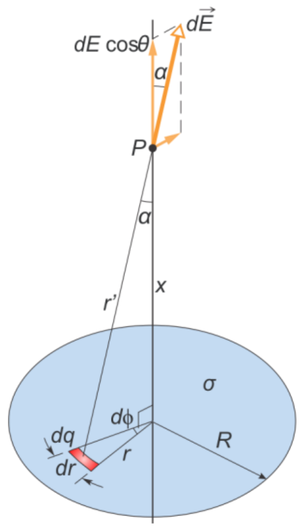
- Não sendo Q uma carga pontual, a expressão de $\vec{E}$ será diferente. Observe que no *exemplo 1*, temos que o campo de uma barra ao longo de sua direção i é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\overbrace{\lambda l}^{=Q}}{4\pi\epsilon_0 s(s+l)}\hat{i}$$

- Ou seja, a introdução do conceito de campo ajuda a resolver problemas mais complexos (interação entre duas cargas macroscópicas, por exemplo) já que o problema pode ser "dividido":

  1. Calcula-se o campo devido a uma das cargas, e
  2. Calcula-se a força sofrida pela segunda carga sob efeito desse campo (nesse caso a segunda carga deve ser bem menor que a primeira para que a mesma não perturbe o campo, e este possa ser desconsiderada).

Exemplo 2. Um disco fino de raio R é carregado com uma densidade superficial de cargas σ constante. Qual é o campo elétrico no eixo do disco a uma distância x do seu centro?



elemento de carga: $dq = \sigma dA$

- A simetria do problema sugere o uso de coordenadas polares.
  (elemento de área: $dA = (dr)(rd\phi)$)

- De forma que: $d\vec{E} = \dfrac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\hat{r}'$

Sendo que $\vec{E} = \int d\vec{E}_{\text{(sobre todos elementos de carga do disco)}}$

- Analisando o caráter vetorial do campo $\vec{E}$ resultante, vemos que para todo elemento de carga dq do disco haverá um outro, diametralmente oposto, de forma que as componentes paralelas ao plano do disco cancelam-se.

- Assim: $\vec{E} = E\hat{i}$ e, neste caso, só é preciso achar o módulo de $\vec{E}$.

- Ou seja, $E = \displaystyle\int_{\text{disco todo}} dE\cos\alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{r'}$, onde x é fixo e $\therefore\ E = E(x)$

- Então: $E = \displaystyle\int_{\text{disco todo}} \frac{\sigma dA}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\frac{x}{r'} = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{disco todo}} \frac{rdrd\phi}{r'^3}$; e como $r'^2 = x^2 + r^2$, então:

$$E(x)=\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi}$$

- Então $E(x)=\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\displaystyle\int_0^R \frac{r\,dr}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$ → agora o problema resume-se à resolução matemática.

- Note que chamando $x^2+r'^2=\xi \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dr}=2r \to dr=\dfrac{1}{2r}d\xi \\ \text{e os limites de integração:}\begin{cases} r=0\to\xi=x^2 \\ r=R\to\xi=x^2+R^2 \end{cases}\end{cases}$

- Portanto, a integral: $I=\displaystyle\int_0^R \frac{rdr}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}=\int_{x^2}^{x^2+R^2}\frac{1}{\xi^{3/2}}\cancel{r}\frac{1}{2\cancel{r}}d\xi=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{1/2}\right)\xi^{-1/2}\Big|_{x^2}^{x^2+R^2}$

- ou seja, $\boxed{\vec{E}=\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\dfrac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\right)\hat{i}}$.

Veremos, na próxima aula, uma maneira fácil de se obter os vários elementos de área/volume para diferentes geometrias.