Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *19ª Aula* (15/10/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- Circuito LC: energia acumula-se alternadamente no indutor e no capacitor; assim como no sistema massa-mola.

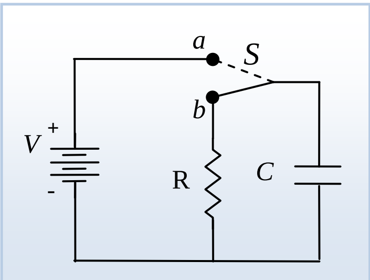
- Em qualquer instante:

$$U_{\text{sistema}} = U_C(t) + U_L(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{1}{2}LI^2(t) = \frac{Q^2_{\max}}{2C} = \frac{1}{2}LI^2_{\max} = cte$$

- Sendo que

$$\begin{cases} Q(t) = Q_{\max}\cos(\omega t + \delta) \\ I = \dfrac{dQ}{dt} \Rightarrow I(t) = -I_{\max}\sin(\omega t + \delta) \end{cases} \quad ; \quad \boxed{I_{\max} = \omega Q_{\max}} \;\; e \;\; \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Circuito RC



$$\begin{cases} \text{chave S em (a): carrega-se o capacitor} \\ \text{chave S em (b): descarrega-se o capacitor} \end{cases}$$

➢ A equação que rege a descarga do capacitor é dada por: $Q(t) = Q_{\max}e^{-t/\tau}$; sendo $\tau = RC$ a *constante de tempo* do circuito RC.

➢ Lembrando que $C = \dfrac{Q}{V}$ e substituindo na equação acima, tem-se a equação que fornece a tensão no capacitor (V_C) em função do tempo:

➢ $\boxed{V_C(t) = \dfrac{Q_{\max}}{C}e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad V_C(t) = V_{\max}e^{-t/\tau}}$; sendo $V_{\max}$ a tensão no capacitor em t = 0.

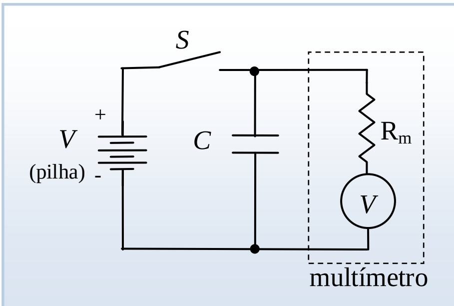
- Chamando $t_{1/2}$ o tempo necessário para que a tensão no capacitor caia à metade de seu valor inicial (em t = 0), ou seja, $V\left(t=t_{1/2}\right)=\frac{1}{2}V_{\max}$, então (substituindo):

$$\frac{V_{\max}}{2}=V_{\max}e^{-t_{1/2}/\tau} \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{t_{1/2}}{\tau} \quad\Rightarrow\quad \tau=\frac{t_{1/2}}{\ln(1/2)}\approx 1{,}44\,t_{1/2}$$

- De forma que medindo-se $t_{1/2}$ tem-se o $\tau_{\text{circuito}}=RC$.

Experimento nº 3 do lab. de eletromagnetismo (*descarga RC medida com cronômetro*)

- Material utilizado: um capacitor de 1 µF, uma pilha de 1,5V, um cronômetro e um multímetro digital (com impedância R ~10 MΩ)
- Montagem:



- Medindo

$$V_{\text{pilha}}=1{,}52V \quad\Rightarrow\quad \frac{V_{\max}}{2}=0{,}76V$$

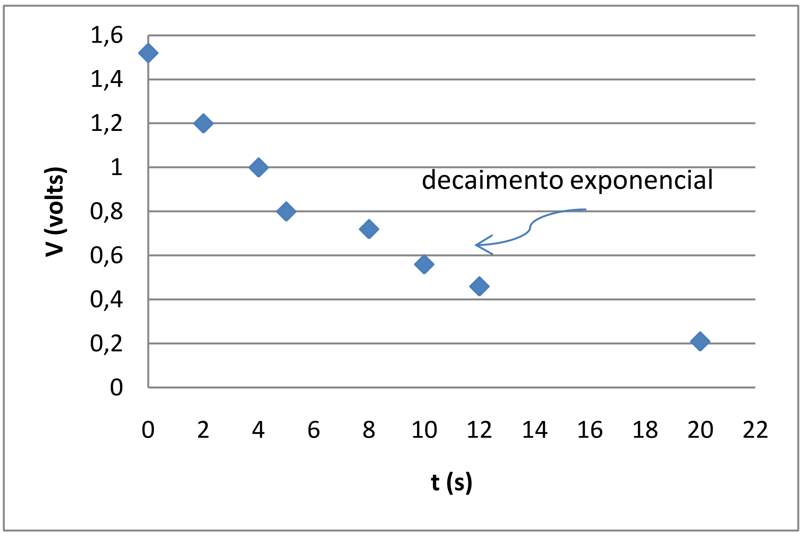
- Então:

$$\bar{t}_{1/2}=7{,}44s \quad\Rightarrow\quad \tau_{\exp}=1{,}44\,\bar{t}_{1/2}=10{,}7\,s \quad ;$$

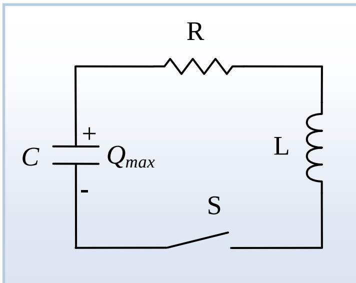
enquanto que: $\tau_{\text{teórico}}=RC=\left(10\times10^{6}\right)\left(1\times10^{-6}\right) \quad\Rightarrow\quad \tau_{\text{teórico}}\sim 10\,s$

- Curva de decaimento da tensão no capacitor. Medindo a tensão no capacitor a cada 2 s:

Tempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	...	20
Tensão (Volt)	1,52	1,2	1	0,8	0,72	0,56	0,46	...	0,21



Circuito RLC



- É um circuito que representa melhor o comportamento dos sistemas reais, uma vez que a energia total não é mais conservada, pois o resistor gera dissipação por efeito Joule.

- Assim, em termos das potências

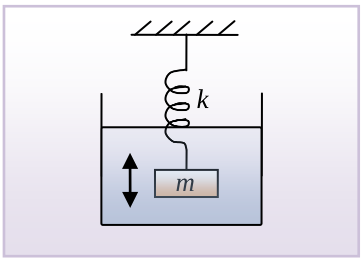
$$\frac{dU_L}{dt} + \frac{dU_C}{dt} + P_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) + RI^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad LI\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + RI^2 = 0$$

- Mas $I = \dfrac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{d^2Q}{dt^2}$, substituindo estas relações na equação acima

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

- Note que esta equação é análoga a do oscilador harmônico amortecido



$$F = -kx - bv = ma \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx$$

- Solução: novamente deve ser do tipo $Q = e^{\alpha t}$

- Derivando $\dfrac{dQ}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$ e $\dfrac{d^2Q}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$ substituindo na equação diferencial:

$$L\alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}} + R\alpha \cancel{e^{\alpha t}} + \frac{1}{C}\cancel{e^{\alpha t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\equiv\gamma\ (\text{cte})}\alpha + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\equiv\omega_0^2\ (\text{cte})} = 0$$

(Vou chamar depois ω_0 de "*frequência natural do sistema*")

- Então $\boxed{\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0} \rightarrow \alpha = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \dfrac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

- <u>1º Caso</u>:

- Note que quando $\dfrac{\gamma}{2} < \omega_0 \quad \left(\dfrac{\gamma^2}{4} < \omega_0{}^2\right)$:

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \ \text{; sendo } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

- Temos então duas soluções possíveis (positiva e negativa) de forma que a solução geral será a combinação linear:

$$Q(t) = ae^{(-\gamma/2 + i\omega)t} + be^{(-\gamma/2 - i\omega)t} = ae^{(-\gamma/2)t}e^{i\omega t} + be^{(-\gamma/2)t}e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t/2}\left(ae^{-\omega t} + be^{-i\omega t}\right)$$

- Aplicando a relação de Euler, $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$,

$$\boxed{Q(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \delta)} \equiv \text{"}\textbf{\textit{amortecimento subcrítico}}\text{"} \left(\frac{\gamma}{2} < \omega_0\right)$$