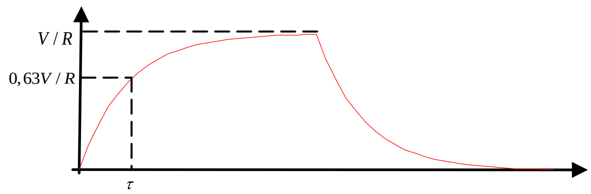
Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *18ª Aula* (11/10/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

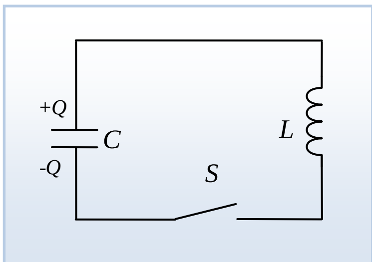
Na última aula vimos:

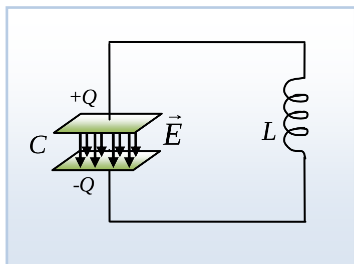
- Circuito RL $\begin{cases} \text{na subida da corrente:} & \boxed{I(t) = \dfrac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_{\max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \\ \text{na descida} \qquad\qquad : & \boxed{I(t) = I_0 e^{-t/\tau}} \end{cases}$

- Sendo que $\tau = \frac{L}{R}$



Circuito *LC* (*R* = 0)

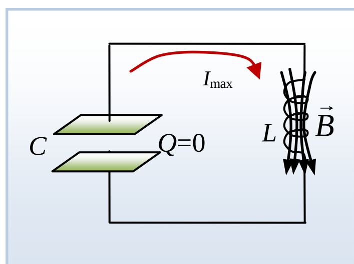




- Supor capacitor inicialmente (t = 0) carregado com carga $Q_{\max}$, que começa a se descarregar quando a chave S se fecha.

- Ou seja, em exatamente t = 0, a corrente ainda não começou a circular, ou seja I (t = 0) = 0, de forma que neste instante só há energia na forma de campo elétrico:

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} \qquad \text{e} \qquad U_L = 0$$

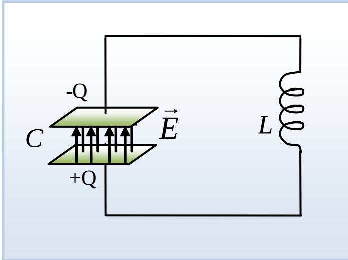


- Em um instante posterior, observa-se que o capacitor descarrega-se totalmente, quando a corrente que flui pelo circuito alcança seu valor máximo. I (t) = $I_{\max}$.

- Nesta situação de $I_{\max}$: $U_L^{\max} = \dfrac{1}{2} L I_{\max}^2 = U_C^{\max}$

Estamos desprezando os efeitos resistivos

- Na sequência, a corrente vai diminuindo enquanto as cargas vão acumulando-se no capacitor, polarizando-o inversamente.



- Sistema assemelha-se então ao arranjo massa-mola sendo que

$$\begin{cases} E_{\text{ind}} = E_{\text{cin}} \\ E_{\text{cap}} = E_{\text{pot}} \end{cases}$$

- Observe que, para um instante qualquer, podemos escrever:

$$U_{\text{sistema}} = U_C(t) + U_L(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2}LI(t)^2 = cte$$

- Derivando última igualdade no tempo $\left(\frac{dU}{dt} \equiv \text{potência}\right)$:

$$\frac{1}{\cancel{2}C}\cancel{2}Q\cancel{\frac{dQ}{dt}} + \frac{1}{\cancel{2}}L\cancel{2}\cancel{I}\frac{dI}{dt} = 0 \text{ ; sendo que } \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$$

- Então

$$\frac{Q}{C} = -L\frac{d^2Q}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC}} \qquad (*)$$

- Equações diferenciais deste tipo indicam que a solução procurada deve constituir-se de funções seno, cosseno ou exponencial, pois são as únicas que resultam nelas mesmas após serem derivadas duas vezes.

- A mais geral delas é a função exponencial, do tipo $e^{\alpha t}$, sendo α uma constante a ser determinada. Derivando:

- $\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = \alpha e^{\alpha t} \\ \dfrac{d^2Q}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t} \end{cases}$, substituindo na equação diferencial (*):

$$\alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}} = -\frac{1}{LC}\cancel{e^{\alpha t}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{-\frac{1}{LC}} = \sqrt{-1}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm\frac{i}{\sqrt{LC}}$$

- Ou seja, as soluções possíveis da equação (*) serão: $\begin{cases} Q_1 = e^{+it/\sqrt{LC}} \\ Q_2 = e^{-it/\sqrt{LC}} \end{cases}$

- Solução geral será a combinação linear destas soluções particulares:

- $\boxed{Q = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}}$; onde fizemos $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$

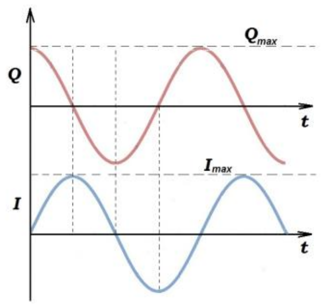
- Aplicando a relação de Euler: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

- $\boxed{Q = Q_{\max}\cos(\omega t + \delta)}$, sendo $Q_{\max}$ e δ duas constantes que dependem das condições iniciais do problema.

- Note que $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ≡ frequência angular de oscilação da carga no circuito, que depende dos valores de L e C.

- Agora, como $I = \dfrac{dQ}{dt}$ $\Rightarrow$ $\boxed{I(t) = -\omega Q_{\max}\sin(\omega t + \delta)}$; $\boxed{\omega Q_{\max} = I_{\max}}$

- E observe que a carga e a corrente no circuito atingem seus valores de máximo/mínimo em instantes diferentes, defasadas de π/2 (diferença de fase de 90°) uma da outra:

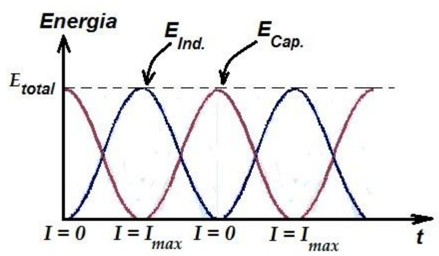


- Quanto à energia total, em um instante *t* qualquer:

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_{\max}^2}{2C}\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}LI_{\max}^2\sin^2(\omega t + \delta);$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Ou seja, o máximo/mínimo de energia em cada componente do circuito também é atingido em instantes diferentes, só que agora com diferença de fase de π (180°)



- E, não havendo dissipação, temos novamente:

$$\frac{Q_{\max}^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_{\max}^2 = U_{\text{total}} = cte$$

- **Exemplo**: Um circuito *LC* possui *L* = 2,8 mH e *C* = 9 pF. O Capacitor é carregado com uma tensão de 12 V e, depois, é colocado em curto-circuito com o indutor. Desprezando qualquer efeito resistivo do circuito, calcule: a) a frequência *f* de oscilação das cargas; b) os valores de $Q_{\max}$ e $I_{\max}$; c)A variação da carga e da corrente em função do tempo: *Q* (t) e *I* (t) .

a) $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$; $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{(2{,}8\times10^{-3})(9\times10^{-12})}} \Rightarrow \omega = 6{,}3\times10^6\ s^{-1}$;

$$\therefore \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 10^6 \text{ Hz}$$

b) $C = Q/V \quad \Rightarrow \quad Q_{\max} = CV_{\max} = \left(9\times10^{-12}\right)\left(12\right) = 1,08\times10^{-10}$ C

$$I_{\max} = \omega Q_{\max} = 2\pi f\, Q_{\max} = \; 6,8\times10^{-4} \text{ A}$$

c) $Q = Q_{\max}\cos\left(\omega t + \delta\right) \quad \Rightarrow \quad$ para t = 0, $Q = Q_{\max}\cos\left(\delta\right)$.

Mas também em t = 0 s, $Q = Q_{\max} \quad \therefore \quad \cos\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$.

Assim:

$$\boxed{Q\left(t\right) = 1,08\times10^{-10}\cos\left(10^{6}t\right)} \quad ; \quad \boxed{I\left(t\right) = -6,8\times10^{-4}\cos\left(10^{6}t\right)}$$