Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *17ª Aula* (08/10/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

Na última aula vimos:

- Energia armazenada em um circuito com corrente:

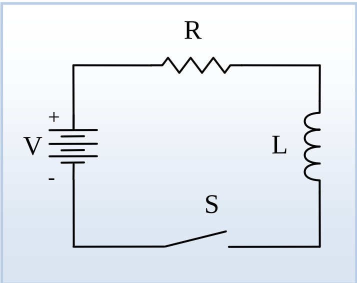
$$U = \frac{1}{2}LI^2; \; L = \frac{\phi}{I} = \frac{d\phi}{dI}$$

- Em termos da densidade do campo magnético: $u_M = \frac{1}{2\mu_0}B^2$, de forma que

$$U = \int u\,dV = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dV$$

- Indutância mútua $M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{d\phi_{12}}{dI_2}$

Circuito RL



- Consideramos um resistor, um indutor e uma bateria ligados em série, conforme a figura.

- Supondo a resistência da bateria desprezível, quando a chave S é ligada, uma corrente começa a circular no circuito.

- Devido ao aumento da corrente, o fluxo no indutor varia e, portanto, surge uma "***força contra-eletromotriz***" induzida: $\mathcal{E}_1 = -L\frac{dI}{dt}$, de forma a se opor ao aumento da corrente.

- Ou seja, o indutor atua como se fosse uma bateria com polaridade oposta à da bateria real, enquanto a corrente estiver aumentando.

- Em termos da conservação de energia no tempo: $P_{\text{fonte}} = P_L + P_R \quad \Rightarrow$

$$VI = \frac{dU_L}{dt} + RI^2; \quad U_L = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \frac{dU_L}{dt} = \left(\frac{1}{\cancel{2}}L\right)\left(\cancel{2}I\frac{dI}{dt}\right) \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad V\cancel{I} = L\cancel{I}\frac{dI}{dt} + RI^{\cancel{2}}$$

$$\boxed{V = -L\frac{dI}{dt} - RI = 0} \equiv \text{equação diferencial em termos da corrente no circuito} \quad (1)$$

- Resolução: dividindo tudo por R: $\underbrace{\frac{V}{R}-I}_{\equiv\xi}-\frac{L}{R}\frac{dI}{dt}=0$

- Então $\xi-\frac{L}{R}\frac{dI}{dt}=0$; e sendo $\xi=\frac{V}{R}-I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\frac{d\xi}{dI}=-1\Rightarrow dI=-d\xi\\ \text{para } I=0\Rightarrow \xi=\frac{V}{R}\end{cases}$

- Portanto: $\xi+\frac{L}{R}\frac{d\xi}{dt}=0\Rightarrow \xi=-\frac{L}{R}\frac{d\xi}{dt}\Rightarrow -\frac{R}{L}dt=\frac{d\xi}{\xi}\Rightarrow(\text{integrando})\Rightarrow$

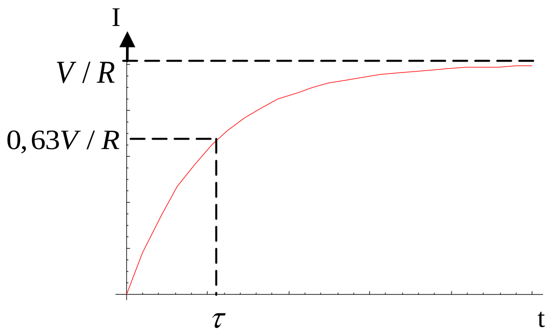
$$-\frac{R}{L}\int_0^t \quad \Rightarrow \int_{\frac{V}{R}}^{\frac{V}{R}-I}\frac{d\xi}{\xi} \quad \Rightarrow \quad -\frac{R}{L}t=\ln\left(\frac{\frac{V}{R}-I}{\frac{V}{R}}\right)=\ln\left(\frac{1-RI}{V}\right)$$

- Ou seja:

$$1-\frac{RI}{V}=e^{-\frac{R}{L}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{V}I=1-e^{-\frac{R}{L}t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(t)=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)} \quad (2)$$

- Gráfico desta função:

$$\begin{cases}\text{(i) para } t=0\Rightarrow I=0\\ \text{(ii) para } t\to\infty\Rightarrow I=\frac{V}{R}\end{cases}$$



- Note que chamando $L/R\equiv\tau$ $\equiv$ ***tempo característico*** ou "***constante de tempo***" do circuito RL:

- $I(t)=\underbrace{\frac{V}{R}}_{=I_{\text{máx}}}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$; e quando $t=\tau$:

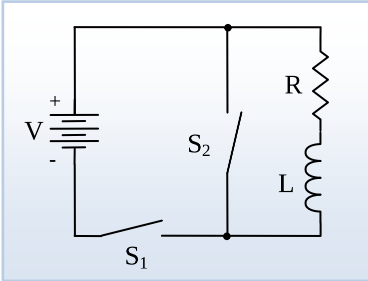
$$I(t=\tau)=\frac{V}{R}\left(1-e^{-1}\right)\approx\frac{V}{R}(1-0,37)=0,63\frac{V}{R}=0,63I_{\text{máx}}$$

- Para verificar que o resultado encontrado em (2) é de fato solução da equação diferencial (1)

$$\frac{dI}{dt}=\left(\frac{V}{\cancel{R}}\right)\left(+\frac{\cancel{R}}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{substituindo na equação diferencial (1):}$$

$$V=-\cancel{L}\frac{V}{\cancel{L}}e^{-\frac{R}{L}t}-\cancel{R}\frac{V}{\cancel{R}}+\cancel{R}\frac{V}{\cancel{R}}e^{-\frac{R}{L}t}=0\ \checkmark$$

- Supondo agora o circuito ao lado,



- Quando S_1 está fechada e S_2 aberta, então corrente passa a circular segundo a equação (2) já obtida.
- Se, em seguida, a chave S_1 é aberta e a S_2 fechada, simultaneamente, a corrente no circuito vai diminuir lentamente por causa do indutor.
- Para calcular a expressão do decaimento da corrente é só notar novamente que a energia do circuito terá que ser dissipada no resistor:

$$\boxed{P_L = P_R} \Rightarrow \boxed{-L\frac{dI}{dt} - RI = 0} \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow (\text{integrando}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow$$

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-t/\tau}}\; ; \; \tau = \tfrac{L}{R}$$