Eletricidade e Magnetismo II – Licenciatura: *16ª Aula* (04/10/2012)

Prof. Alvaro Vannucci

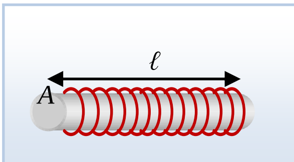
Na última aula vimos:

- Da Lei de Faraday: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi}{dt} = -\dfrac{d\phi}{dI}\dfrac{dI}{dt} = -L\dfrac{dI}{dt}$

- Para N espiras: $L = N\dfrac{d\phi^{1\,espira}}{dI}$

- Transformador $\mathcal{E}_2^{ef} = \dfrac{N_2}{N_1}\mathcal{E}_1^{ef}$

- Calculamos a indutância de um solenoide de comprimento ℓ e seção transversal de área A



- Calculando $\phi_{1\text{ esp}} = \int \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = \int B\,dA\,;\; B_{sol} = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$

- Então

$$\phi_{1\text{ esp}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} IA \Rightarrow \left(L = N\frac{d\phi}{dt} \right) \Rightarrow \boxed{L(\text{solenoide}) = \frac{\mu_0 A N^2}{\ell}}$$

Energia associada a um campo magnético

- Como discutimos, o efeito indutivo age no sentido de se opor a qualquer variação da corrente que flui pelo circuito (alimentado por uma fonte de tensão).

- Agora, para que se tenha a geração de corrente elétrica no circuito, a fonte precisa realizar trabalho (sobre o circuito).

- Consideremos então que a potência instantânea gerada pela fonte (agente externo) é injetada no circuito (vencendo a sua "inércia"), criando uma corrente I:

- $\underbrace{P_{\text{fonte}}}_{=\mathcal{E}I} = P_{\text{circuito}} = \dfrac{d}{dt}\left(U_{\text{circuito}}\right)$

A energia cedida pela fonte é introduzida no circuito

- Então $\boxed{\mathcal{E}I = \frac{dU}{dt}} \Rightarrow \left(\frac{d\phi}{dt}\right)(I) = \frac{dU}{dt} \Rightarrow \left(\underbrace{\frac{d\phi}{dI}}_{=L}\frac{dI}{dt}\right)(I) = \frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad dU = LIdI$

Integrando,

$$\int_0^U dU = L\int_0^I IdI \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{indutor}} = \frac{1}{2}LI^2}$$

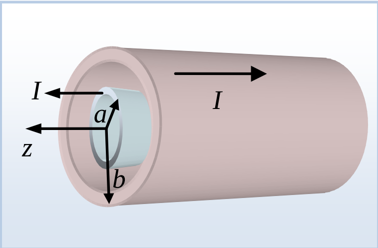
resultado que vale para qualquer indutor

- Compare este resultado com o já obtido para a o capacitor: $U_{\text{cap}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
- Agora, retornando ao solenoide do exercício anterior

$$U_{\text{circuito}} = \frac{1}{2}LI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N^2\mu_0 A}{\ell}\right)\left(I^2\right) = (\underline{\text{x e ÷ tudo por } \ell\mu_0}) = \left(\frac{1}{2\mu_0}\right)\underbrace{\left(\frac{N^2\mu_0{}^2 I^2}{\ell^2}\right)}_{\equiv B^2}\underbrace{(A\ell)}_{\equiv\text{volume}}$$

$$\therefore \quad \boxed{U_{\text{circuito}} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 V}$$

- É conveniente definir $u_M = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{U}{V}$ ≡ ***densidade volumétrica de energia magnética***
- De forma que $\boxed{U = \int u_M dV}$
- **Exemplo**: um cabo coaxial construído por duas cascas cilíndricas finas e muito longas, de comprimento ℓ. A casca interna tem raio ***a*** e o condutor externo raio ***b*** ($b > a$), ambos percorridos por correntes $+I$ e $-I$, respectivamente. Calcule a auto-indutância do sistema e a energia magnética total armazenada.



- Cálculo do campo entre os dois condutores:

$$B(a < r < b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \quad \text{(pela lei de Ampère)}$$

- Cálculo da indutância:

$$L = \frac{d\phi}{dI}; \quad \phi = \int \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA, \text{ sendo } dA = drdz$$

$$\therefore \quad \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{1}{r}dr\int_0^{\ell} dz \Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \therefore \quad L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Cálculo da energia:

$$u = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\cancel{\mu_0}}\frac{\mu_0^{\cancel{2}} I^2}{4\pi^2 r^2} \quad \Rightarrow \quad U = \int u dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2}\int \frac{1}{r^2} r dr d\varphi$$

$$U = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2}\int_a^b \frac{1}{r}dr\int_0^{\ell} dz\int_a^b d\varphi = \frac{\mu_0 I^2}{\cancel{8}^{4}\pi^{\cancel{2}}}\cancel{2}\cancel{\pi}\,\ell\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore \quad U = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Note: podíamos ter escolhido usar a equação $u_M = \frac{1}{2}LI^2$, obtendo o mesmo resultado.

Indutância mútua

- Considere agora N circuitos distintos e próximos cada um sendo percorrido por uma corrente especifica, em uma região na qual não existe campo magnético externo ($B_{ext} = 0$).

- Então o fluxo de linhas de força através de um destes circuitos (circuito i por ex.) será a soma do fluxo devido à sua própria corrente e o fluxo devido às correntes fluindo nos demais circuitos:

$$\phi_i = \phi_{i1} + \phi_{i2} + \ldots + \phi_{ii} + \ldots \phi_{iN} = \sum_{j=1}^{N}\phi_{ij}$$

- De forma que, caso estas correntes estejam variando, a *f.e.m.* resultante neste i-ésimo circuito será:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_i}{dt} = -\left(\frac{d\phi_{i1}}{dt} + \frac{d\phi_{i2}}{dt} + \ldots + \frac{d\phi_{ii}}{dt} + \ldots + \frac{d\phi_{iN}}{dt}\right) = -\sum_{j=1}^{N}\frac{d\phi_{ij}}{dt}$$

- Considerando que estes circuitos sejam rígidos e estacionários, então a variação do fluxo no circuito i devido à variação de corrente no circuito j (***$i \neq j$***) será:

$$\frac{d\phi_{ij}}{dt} = \frac{d\phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt}$$

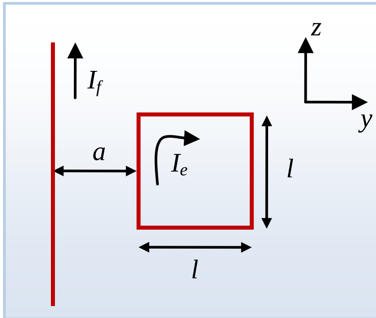
Este termo é denominado “indutância mútua” (M_{ij})

- Então $M_{ij} = \frac{d\phi_{ij}}{dt} = \frac{d\phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt}$ (para $i \neq j$)

- Havendo apenas dois circuitos: $M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{d\phi_{12}}{dI_2}$ (unidade: ***Henry***)

- O nome "indutância mútua" reflete o fato que $M_{12} = M_{21}$; ou, de forma mais geral: $M_{ij}=M_{ji}$

- **Exemplo**. Os fios da figura ao lado são muito finos e estão no mesmo plano. O condutor da esquerda é muito longo e conduz corrente I_f, enquanto o da direita, em forma de quadrado, conduz corrente I_e. Considere a = 0,1m e l =1m



  a) Qual é a indutância mutua entre os dois condutores

  b) Supondo que $I_f = I_0 \cos \omega t$ e $I_e = 0$, calcule a *f.e.m.* em função do tempo induzida na espira.

  Respostas

a) Como $M_{fe} = M_{ef} = \frac{d\phi_{ef}}{dI_f}$; $\quad \phi_{ef} = \int \vec{B}_f \cdot \hat{n}\, dA_{esp} = \int \frac{\mu_0 I_f}{2\pi y} dydz \Rightarrow$

$$\phi_{ef} = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\int_0^l dz \int_a^{l+a} \frac{1}{y} dy \quad \Rightarrow \quad \phi_{ef} = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi} l \ln\left(\frac{l+a}{a}\right)$$

Assim: $M_{ef} = \frac{\phi_{ef}}{I_f} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{l+a}{a}\right) = \left(\frac{\cancel{4}^{2}\cancel{\pi}\times 10^{-7}}{\cancel{2}\cancel{\pi}}\right)(1)\ln\left(\frac{1,1}{0,1}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{ef} = 48\,\mu H}$$

b) $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_{ef}}{dt}$; $\quad \phi_{ef} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{l+a}{a}\right) I_0 \cos(\omega t)$

$$\therefore \quad \boxed{\mathcal{E} = +\frac{\mu_0 l\omega}{2\pi}\ln\left(\frac{l+a}{a}\right) I_0 \sin(\omega t)}$$