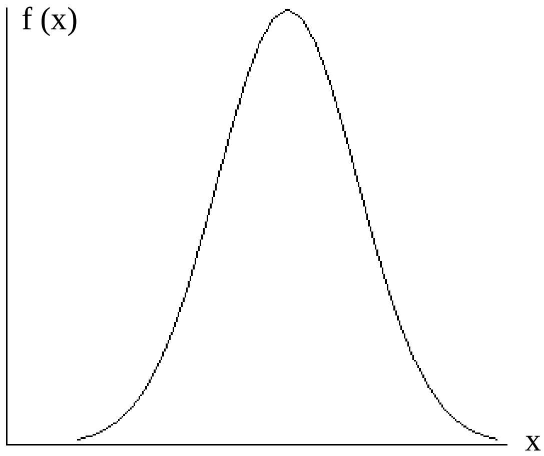
Termo-Estatística – Licenciatura: 9ª *Aula* (03/04/2013)

Prof. Alvaro Vannucci

RELEMBRANDO

► **<u>Distribuição de Gauss</u>** ou (Distribuição **<u>Normal</u>**):



► Que é representada pela função: $\boxed{f(x) = C\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\xi^2}}}$

► Normalizando a distribuição de Gauss obtivemos:

(i) $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\pi/\alpha}}$ (resultado que **<u>vale sempre!</u>**)

(ii) $\boxed{C = \sqrt{\alpha/\pi}}$, de forma que $\boxed{f(y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha y^2}}$; onde:

$$\underline{\alpha = \frac{1}{2\xi^2}} \quad \text{e} \quad \underline{y = x - \mu}$$

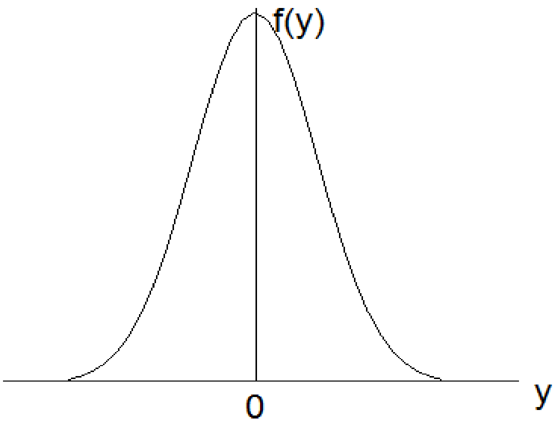
► Para verificarmos os **<u>significados</u>** de **<u>ξ</u>** e **<u>μ</u>**, vamos calcular o ***<u>valor médio</u>*** da distribuição de Gauss e a ***<u>variância</u>***.

► Cálculo do **<u>valor médio</u>** de y: $\bar{y} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\alpha y^2} dy$

► Como feito na aula passada, podemos chamar: $y e^{-\alpha y^2} dy = -\frac{1}{2\alpha} d(e^{-\alpha y^2})$

► De forma que : $\bar{y} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{(-)1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\left(e^{-\alpha y^2}\right) = -\sqrt{\frac{\cancel{\alpha}}{4\pi\alpha^{\cancel{2}}}} (e^{-\alpha y^2})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,!$

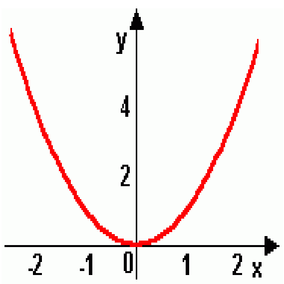
► Ou seja, a distribuição tem a forma:



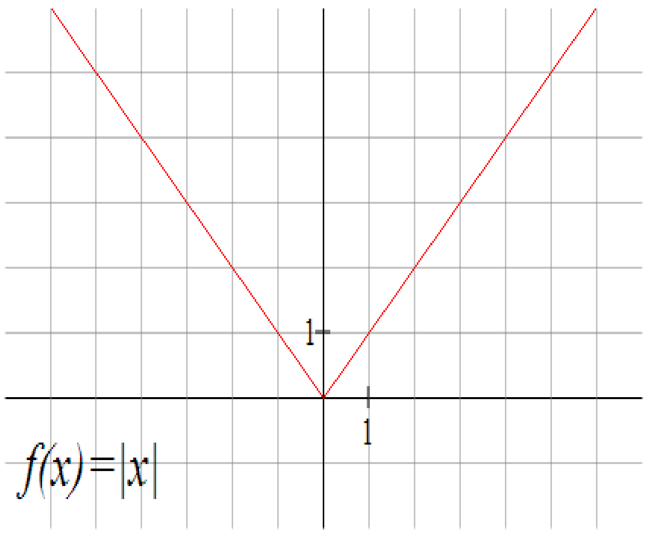
► Note que poderíamos **ter antecipado** que a **integração** resultaria em **zero**, já que o **integrando** corresponde a uma **função ímpar** (nos limites de integração simétricos em relação à origem, de $-\infty$ a ∞).

► Isto porque, relembrando:

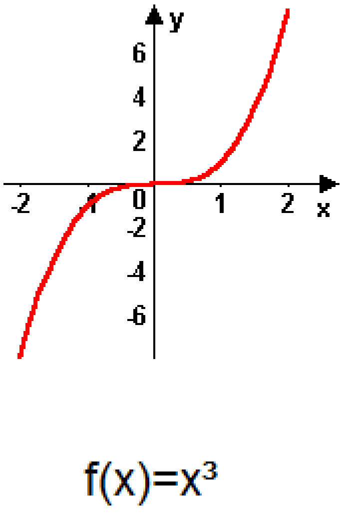
► **Funções pares**: f(-x) = f(x) , como por exemplo:

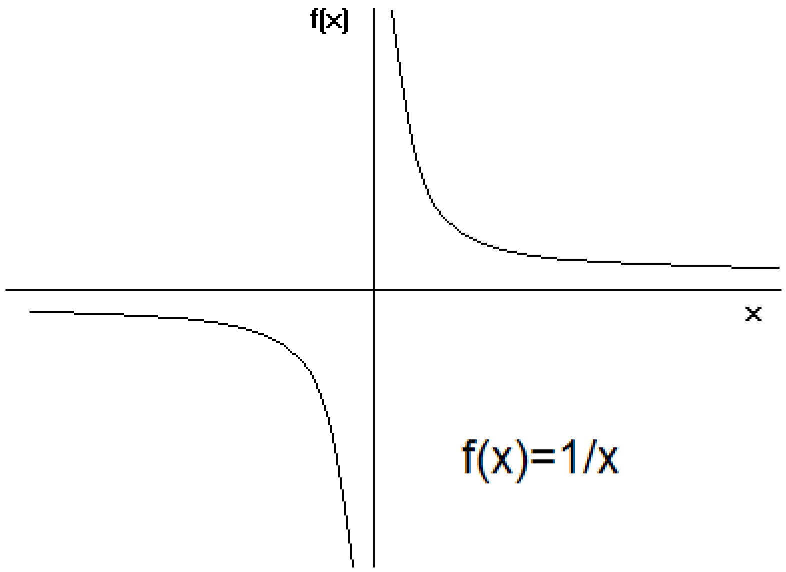


$f(x)=x^2$



► **Funções ímpares**: f(-x) = -f(x)





► Agora, lembrando que a operação **integração** envolve o **cálculo de área**, temos então que:

(i) Para funções **pares**: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{par}(x)\,dx = 2\int_{-0}^{+\infty} f_{par}(x)\,dx$

(ii) Para funções **ímpares**: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ímpar}(x)\,dx = 0$

► **Mostramos** então que o cálculo do **valor médio** de y:

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\alpha y^2}\,dy = 0$$

► Vamos agora calcular o **valor médio** de **x**, utilizando a distribuição de **Gauss** na sua **forma original**:

$\bar{x} = \int (x)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\xi^2}}\right)dx$; onde **faremos** $x-\mu=u \;\rightarrow\; x=u+\mu$, de forma que: $\frac{dx}{d\mu}=1 \;\rightarrow\; dx=d\mu$ (e os limites de integração não mudam!)

► Portanto:

$$\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (u+\mu) e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} du = \underbrace{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (u) e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} du}}_{=0 \text{ (função ímpar)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(\mu)}_{\text{uma constante}} e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} du \Rightarrow$$

uma **constante**

$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} du}_{=\sqrt{\pi/\alpha}\ ;\ \alpha = 1/2\xi^2} = \left(\frac{\mu}{\cancel{\sqrt{2\pi\xi^2}}} \right) \left(\cancel{\sqrt{2\pi\xi^2}} \right) \Rightarrow \boxed{\overline{x} = \mu}$$

► Falta descobrirmos o significado de **ξ**. Para isto, vamos calcular a **variância**:

$$\sigma^2 = \overline{(x-\overline{x})^2} = \overline{(x-\mu)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\xi^2}} dx$$

► **Chamando novamente**: $x - \mu = u \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = u + \mu \\ dx = du \end{cases}$

► Então: $\sigma^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} du$

► Agora, utilizando novamente que:

$$\frac{d}{du}\left(e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} \right) = e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} (-) \frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}\xi^2} \quad \Rightarrow \quad u e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} = -\xi^2 d\left(e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} \right)$$

► Fazendo a substituição:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} (-)\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} u d\left(e^{-\frac{u^2}{2\xi^2}} \right)$$, que podemos integrar **por partes**:

$$\left(\int u\, dv = uv - \int v du \right)$$

► Assim:

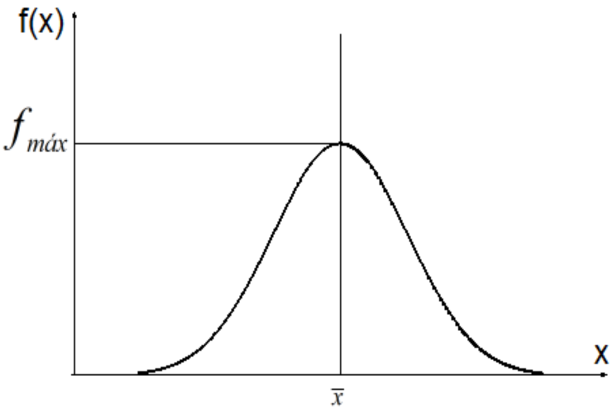
$$\sigma^2 = \frac{-\xi^2}{\sqrt{2\pi\xi^2}}\left[\left(ue^{\frac{-u^2}{2\xi^2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2\xi^2}}du}_{=\sqrt{\pi/\alpha}=\sqrt{2\pi\xi^2}}\right] \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{2\pi\xi^2}}\left[0-\sqrt{2\pi\xi^2}\right] = \frac{\xi^2}{\cancel{\sqrt{2\pi\xi^2}}}\cancel{\sqrt{2\pi\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma^2 = \xi^2}$$

► Portanto, a **<u>função distribuição de densidade de probabilidade de Gauss (distribuição Normal)</u>** é dada por:

$$\boxed{f_{Gauss}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx}$$

► Note: como a curva da distribuição de Gauss tem a forma:



então podemos obter o **<u>valor máximo</u>** da distribuição calculando $\frac{df(x)}{dx}=0$ (ver apêndice); **<u>ou então já substituir</u>** $x=\bar{x}$ na função:

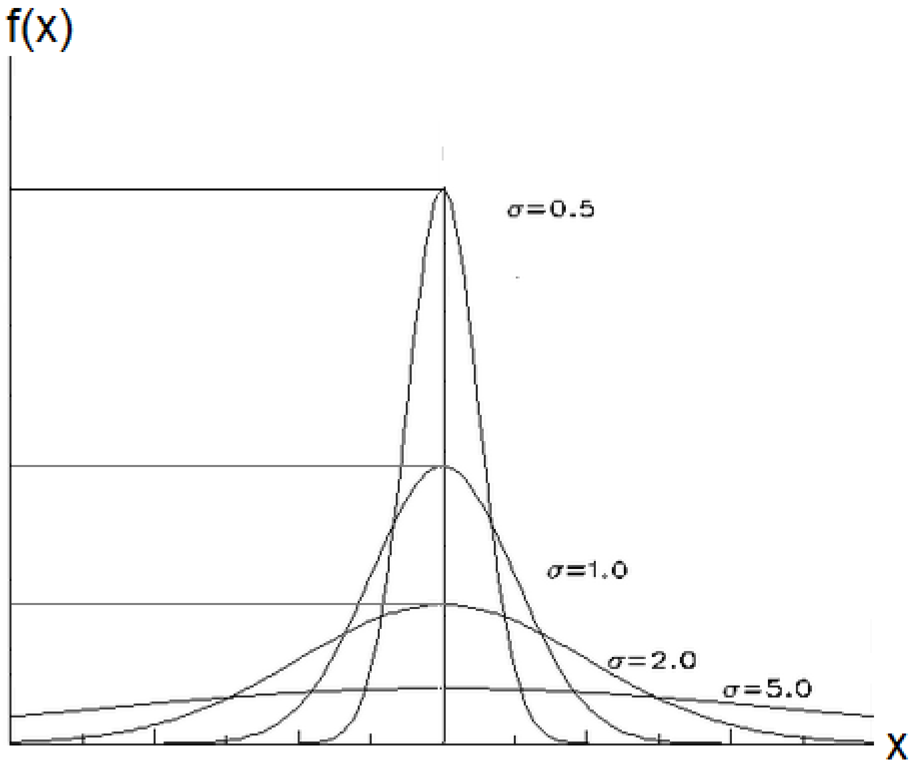
$$f_{máx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(\bar{x}-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \boxed{f_{máx}^{Gauss} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$$

► Observação importante: deste último resultado vemos que

$$\boxed{f_{máx}^{Gauss}(x) \propto \frac{1}{\sigma}}$$; sendo que σ **indica os pontos de inflexão** da distribuição

(veja apêndice)

► Agora, como a **área total** sob a curva de distribuição de Gauss (normalizada) deve manter-se **constante**, então para distribuições com **diferentes larguras** teremos **diferentes valores de pico**:



APÊNDICE

►(i) **Cálculo do** $x_{máx}$:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_{máx}} = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_{máx}-\overline{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(-)2(x_{máx}-\overline{x})}{2\sigma^2} = 0 \;\Rightarrow x_{máx} - \overline{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x_{máx} = \overline{x}}$$

(esse termo nunca atinge o zero)

► (ii) Cálculo da **<u>2ª derivada</u>** (para avaliar os pontos de inflexão):

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{(-)1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left[\left(-\frac{\cancel{2}(x-\overline{x})}{\cancel{2}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}\right)(x-\overline{x}) + \left(e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}\right)(1)\right] = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma^2}\right) = 0 \Rightarrow (x-\overline{x})^2 = \sigma^2 \Rightarrow \boxed{\sigma = \pm(x-\overline{x})}$$

► Quando $\overline{x} = 0$, por exemplo, $x_{inflexão} = \pm\sigma$