Termo-Estatística – Licenciatura: 8ª *Aula* (22/03/2013)

Prof. Alvaro Vannucci

Como vimos:

► $\begin{cases} \text{(i)}\ e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!} \Rightarrow \text{(por expansão de Taylor)} \Rightarrow \boxed{e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}} \\ \text{(ii)}\ n\lambda^n = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lambda^n\right) \end{cases}$

►utilizando na *Distribuição de Poisson* $\left(P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \right)$: $\begin{cases} \boxed{\overline{n} = \lambda}\ ;\ \overline{n} = Np \\ \boxed{\sigma^2 = \lambda} \end{cases}$,

sendo que *λ* ≡ taxa de ocorrência (‘*valor médio*’) do evento desejado

► Vimos também que a **Distribuição** de **Poisson já é normalizada**, ou seja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1$$

► Vejamos agora mais alguns exemplos:

► **Exercício 2:** Em uma grande construtora tem-se 6 acidentes a cada 20 semanas. Qual a probabilidade de não haver mais que 2 acidentes em uma determinada semana?

$$\lambda = 6/20 = 0{,}3 \text{ acidentes/semana}$$

► Note que “**não mais que 2**” significa que **deve-se considerar** as possibilidades de se ter **0** ou **1** ou **2** acidentes.

(indica **soma** das probabilidades)

► Ou seja: $P = P(n=0) + P(n=1) + P(n=2) \quad ; \quad P(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

$$\therefore \quad P = \frac{0,3^0}{0!} e^{-0,3} + \frac{0,3^1}{1!} e^{-0,3} + \frac{0,3^2}{2!} e^{-0,3} = (1 + 0,3 + 0,045)(0,74) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = 0,99 \quad \text{(ou 99\%)}$$

► Exercício 7 da Lista 2:

7. Suponha que os erros tipográficos cometidos por um digitador ocorram de modo completamente aleatório. Suponha que um livro de 600 páginas contenha 600 desses erros. Use a distribuição de Poisson para calcular a probabilidade de que: (a) uma página não contenha erros; (b) uma página contenha pelo menos três erros. $Resp: 0,37; 0,08$

$$\frac{600 \text{ erros}}{600 \text{ páginas}} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ erro/página} \quad ; \quad P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

► a) "**<u>zero erros</u>**": $P(0) = \dfrac{1^0 e^{-1}}{0!} = 0,37$ ou 37%

► b) "**<u>pelo menos 3 erros</u>**" $\Rightarrow$ ocorrerão **<u>3 ou mais</u>** erros **(4, 5, 6, ...)**

$$P(3 \text{ ou mais}) = 1 - \underset{\text{(zero erros)}}{P(0)} - \underset{\text{(1 erro)}}{P(1)} - \underset{\text{(2 erros)}}{P(2)} \quad ; \quad \begin{cases} P(0) = 0,37 \text{ (item a)} \\ P(1) = \dfrac{1e^{-1}}{1!} = 0,37 \\ P(2) = \dfrac{1^2 e^{-1}}{2!} = 0,18 \end{cases}$$

$$\therefore \quad P(3^+) = 1 - 0,37 - 0,37 - 0,18 = 0,08 \quad \text{(ou 8\%)}$$

► **<u>Exercício 3:</u>** Uma companhia aérea, que opera com aviões de 100 lugares, tem uma taxa de não-comparecimento (*no-show*) de 3%. Aplique a distribuição de Poisson para construir uma tabela que represente as probabilidades das pessoas não comparecerem para os embarques (0, 1, 2,...) de forma que a companhia venda passagens extras (*over-booking*) sem que haja grande possibilidade de atritos com os passageiros de seus voos.

- Agora, probabilidade de não-comparecimento: ***p = 0,03*** (3%); de forma que para ***N*** = 100 lugares: $\overline{n} = Np = \lambda = 3$. Ou seja:

$P(n) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$; sendo que λ=3 ≡ *no-show*/voo (taxa de ocorrência do evento)

$$\therefore \quad P(n) = \frac{3^n e^{-3}}{n!}$$

n	P(n)	%
0	0,05	5%
1	0,15	15%
2	0,22	22%
3	0,22	22%
4	0,17	17%
5	0,1	10%
6	0,05	5%
7	0,02	2%
8	0,01	1%

Tabela 1: probabilidades das pessoas não comparecerem aos vôos.

► Assim, a probabilidade de que ninguém falte (todos comparecerem), é de apenas 5%.

► Agora, a probabilidade de que faltem 2 pessoas é mesma que 3 pessoas faltarem.

► Já a probabilidade de 4 pessoas (ou mais) faltarem, vai diminuindo, de forma que o risco de ocorrerem problemas com o *over-booking* aumenta.

FUNÇÃO “DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE GAUSS” OU “DISTRIBUIÇÃO NORMAL”

► Esta distribuição aplica-se no estudo de processos (medidas) que envolvem uma **grande quantidade** de **eventos** (medidas experimentais) que se distribuem mais ou menos **simetricamente** em torno de um “**valor mais provável**” (“***valor esperado***” ou “***valor médio***”).

► Na experiência (de demonstração em aula) das “**bolinhas saltantes**”, se formos medir a **altura** que atingem (em um certo instante de tempo), veremos que a curva de distribuição obtida será:

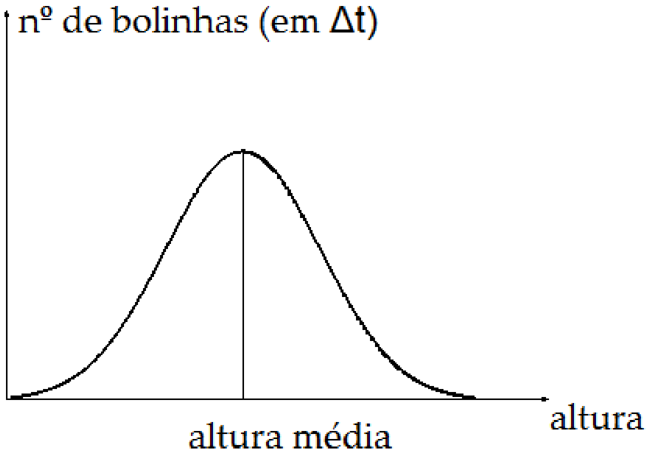

Figura 1: Curva de distribuição obtida.

► A ***expressão matemática*** que descreve uma curva com esta forma é dada por:

$$f(x) = Ce^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\xi^2}} \quad ; \quad \text{sendo C, } \mu \text{ e } \xi \text{ constantes a serem determinadas}$$

► Primeiramente (para facilitar a visualização) vamos fazer:

$$\begin{cases} x - \mu = y \\ \dfrac{1}{2\xi^2} = \alpha \text{ (uma constante); de forma que:} \end{cases}$$

$$\underline{f(y) = Ce^{-\alpha y^2}}$$ (trata-se de um **caso particular** da distribuição,

como veremos depois)

► E os limites dessa distribuição serão sempre de - ∞ a + ∞.

► Vamos inicialmente verificar a *condição de normalização* desta função:

$$C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy = 1$$

► O cálculo desta integral torna-se muito simples se fizermos uso de um *pequeno artifício*:

► Primeiramente devemos notar que **se chamamos** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy = I \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ teremos, igualmente, que: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z^2}\,dz = I$

► Assim: $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(y^2+z^2)}\,dy\,dz$, de forma que nos situamos agora em um espaço bi-dimensional representado pelas **coordenadas cartesianas**.

► Lembrando das relações envolvendo as coordenadas **cartesianas** com as coordenadas **polares**:

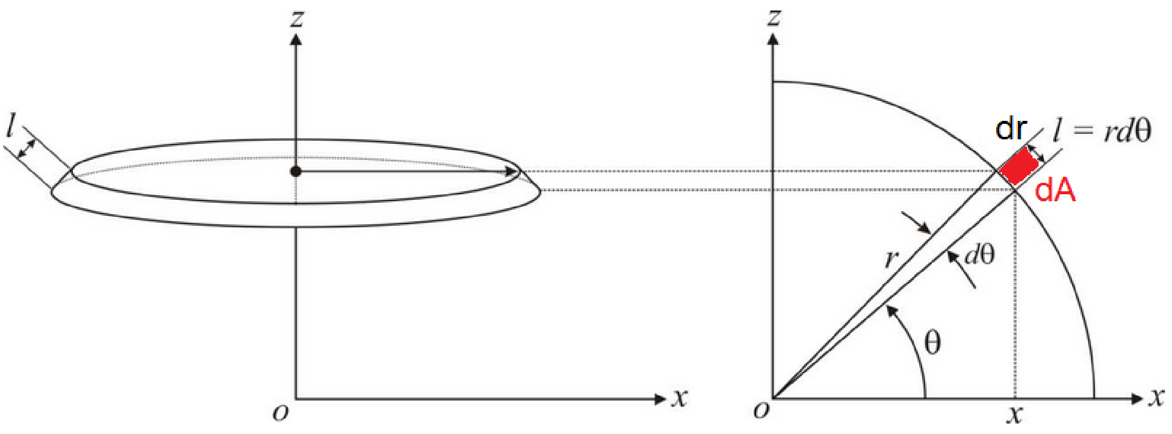

Figura 2: Coordenadas polares.

sendo que: $\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\,\text{sen}\theta \end{cases}$; em $\begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

► Agora: $\boxed{dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta}$ e $\boxed{y^2 + z^2 = r^2}$; de forma que, substituindo:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2}\, r\,dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\alpha r^2} dr$$

► Calculando, porém: $\dfrac{d(e^{-\alpha r^2})}{dr}$; sendo $-\alpha r^2 = u$

$$\Rightarrow \left(\text{da regra da cadeia: } \frac{de^u}{du}\frac{du}{dr} = (e^u)(-2\alpha r) \right) \Rightarrow$$

$d(e^u) = -2\alpha r e^u dr \;\Rightarrow\; d(e^{-\alpha r^2}) = -2\alpha r e^{-\alpha r^2} dr$; e portanto,

na integral de I^2 acima: $\underline{r e^{-\alpha r^2} dr = -\dfrac{1}{2\alpha} d(e^{-\alpha r^2})}$

► Finalmente:

$$I^2 = \cancel{2}\pi \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{\cancel{2}\alpha} \right) d(e^{-\alpha r^2}) = -\frac{\pi}{\alpha} \int_0^{\infty} d(e^{-\alpha r^2}) = \left(-\frac{\pi}{\alpha} \right) (e^{-\alpha r^2}) \Big|_0^{\infty} = \left(-\frac{\pi}{\alpha} \right)(0-1)$$

$$\therefore \; I = \sqrt{\pi/\alpha}$$

► Ou seja, temos que a integral: $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\pi/\alpha}}$, sempre!

► **Retornando** à questão da **normalização**:

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy = C\,I = 1 \;\Rightarrow\; C\sqrt{\pi/\alpha} = 1$$

$\therefore$ $\boxed{C = \sqrt{\alpha/\pi}}$ ≡ **constante de normalização**

► Então: $\boxed{f^{Gauss}(y) = \sqrt{\alpha / \pi}\, e^{-\alpha y^2}}$; $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\alpha = \dfrac{1}{2\xi^2}} \\ \boxed{y = x - \mu} \end{array} \right.$

►Falta agora verificar qual o significado físico de ξ e μ. Para isto, calcularemos na próxima aula o **valor médio** da distribuição normal (de Gauss) e a **variância**.