Termo-Estatística – Licenciatura: 7ª *Aula* (20/03/2013)

Prof. Alvaro Vannucci

Como vimos na última aula:

► Para a **Distribuição de Probabilidade Binomial**:

$$\boxed{P(n_i) = \frac{N!}{n_i!(N-n_i)!} p^{n_i} q^{N-n_i}},$$

► E mostramos, a partir da **Expansão Binomial:**

$$\boxed{(p+q)^N = (q+p)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}}$$

que:

(i) $\boxed{\bar{n} = Np}$

(ii) $\boxed{\sigma^2 = Npq}$

►Nas demonstrações, vimos e aplicamos que: $\boxed{np^n = p\frac{\partial}{\partial p}(p^n)}$

► Na situação em que temos o **espaço amostral** (***N***) **muito grande** e a **probabilidade** de **sucesso** (***p***) **muito pequena** (e, portanto o **número** ***n*** de **sucessos** também será **pequeno**), a **Distribuição Binomial** pode ser adequadamente **aproximada** pela **“*Distribuição de Poisson*”**:

$$\boxed{P_{Poisson}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}} \; ; \; \boxed{\lambda = Np}$$

►Sendo que :

- ***n*** ≡ número de **eventos** de **sucesso**
- ***λ*** ≡ **taxa** de **ocorrência** dos eventos de sucesso

► Vamos retornar à resolução do ex. 5 da Lista 2:

5. A probabilidade $W(n)$ de que um evento caracterizado por uma probabilidade p ocorra n vezes em N tentativas é dado pela distribuição binomial $W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$.

Considere uma situação em que a probabilidade p é pequena ($p \ll 1$) e onde se está interessado no caso em que $n \ll N$. (Note que se N é grande, $W(n)$ torna-se muito pequeno se $n \to N$ porque o fator p^n torna-se muito pequeno quando $p \ll 1$. Assim, $W(n)$ é de fato apreciável apenas quando $n \ll N$). Muitas aproximações podem então serem feitas para reduzir a distribuição binomial a uma forma mais simples.

(a) Usando o resultado $ln(1-p) \cong -p$, mostre que $(1-p)^{N-n} \cong e^{-Np}$.

(b) Mostre que $N!/(N-n)! \cong N^n$.

(c) Mostre que nesse caso a distribuição binomial se reduz a $W(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, onde $\lambda = Np$ é o número médio de eventos. Essa equação é chamada de **Distribuição de Poisson**.

► Item (a): Vimos, a partir da Expansão de Taylor (em torno de um ponto ***a***):

$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}$, mostramos que $\boxed{\ln(1-p) \sim -p}$ e, portanto,

$\underline{(1-p)^{N-n} \sim e^{-pN}}$ (para ***N*** muito **<u>grande</u>** e ***n*** muito **<u>pequeno</u>**)

► b) Para mostrar que $\underline{\frac{N!}{(N-n)!} \sim N^n}$ (para ***N*** **<u>muito grande</u>** e ***n*** **<u>muito pequeno</u>**):

$$\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{(N)(N-1)(N-2)...(N-n+1)\cancel{(N-n)!}}{\cancel{(N-n)!}} \sim N^n$$

► Por exemplo: para N = 100 e n = 3, a parcela *(N – n + 1)* = (100 – 3 + 1) = 98

► Portanto: $\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{(100)(99)(98)\cancel{(97!)}}{\cancel{97!}} = 0,97 \times 10^6$

► Enquanto que $N^n = (100)^3 = (100)(100)(100) = 1,0 \times 10^6$

► Ou seja: $\underline{\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-n)!} = N^n}$ (para ***n*** **<u>pequeno</u>**)

► c) Antes de resolver este item, precisamos recordar que a **<u>função exponencial</u>** sempre pode ser escrita como:

$$\boxed{e^{a\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \lambda^n}{n!} = 1 + \frac{a\lambda}{1!} + \frac{a^2\lambda^2}{2!} + \frac{a^3\lambda^3}{3!} + ...}$$

► Isto porque, da **Expansão de Taylor** para $f(x)=e^{ax}$ em torno de ***x = 0***:

$$f(x=0)=1$$
$$f'(x)=ae^{ax} \Rightarrow f'(x=0)=a$$
$$f''(x)=a^2e^{ax} \Rightarrow f''(x=0)=a^2$$
$$f'11(x)=a^3e^{ax} \Rightarrow f'''(x=0)=a^3$$

.

.

.

► Portanto: $\boxed{e^{ax}=1+\frac{ax}{1!}+\frac{a^2x^2}{2!}+\frac{a^3x^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nx^n}{n!}}$

► Assim, da *distribuição de densidade de probabilidade binomial*:

$P(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^nq^{N-n}=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} \Rightarrow$ (utilizando os resultados dos itens (a) e (b)) $\Rightarrow P(n)\sim\left(\frac{N^n}{n!}\right)(p^n)(e^{-p})^{N-n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (observando que $N-n\sim N$ para **N muito grande** e **n muito pequeno**) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(n)\sim\frac{(Np)^n}{n!}e^{-pN} \Rightarrow$ chamando $\boxed{\lambda=Np} \Rightarrow \boxed{P_{Poisson}(n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}$

(trata-se de uma distribuição que pode ser **adequadamente utilizada** quando ***N* for muito grande e *n* e *p* muito pequenos**).

► **Ex. 6 - Lista 2:**

6. Considere a distribuição do problema anterior,

(a) Mostre que ela está normalizada de modo que $\sum_{n=0}^{N}W(n)=1$. (Com boa aproximação, a soma pode ser extendida ao infinito, uma vez que $W(n)$ é desprezivelmente pequeno quando $n\geq N$).
(b) Use a distribuição de Poisson para calcular $\langle n\rangle$. $Resp:\lambda$.
(c) Calcule também o valor de $\langle\Delta n^2\rangle\equiv\langle(n-\langle n\rangle)^2\rangle$. $Resp:\lambda$.

► a) Para mostrar que a Distribuição de Poisson trata-se de uma distribuição **normalizada**, precisamos mostrar que:

$$\sum_{n=0}^{N} P(n) \approx \sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \quad ; \quad \text{sendo} \quad P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

► Note que por ***N*** ser **muito grande**, **trocamos o limite** superior da somatória pelo ∞ .

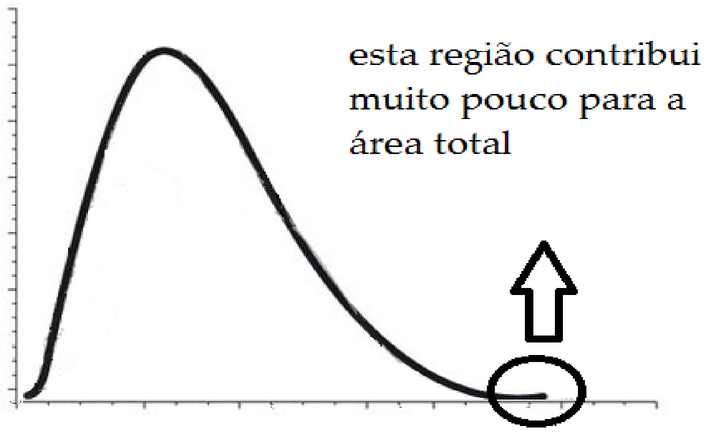

Figura 1: Curva de distribuição.

► Utilizando a **expansão** da **Função Exponencial**:

$$e^{a\lambda} = 1 + \frac{a\lambda}{1!} + \frac{a^2\lambda^2}{2!} + \frac{a^3\lambda^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\lambda^n}{n!} \Rightarrow \text{para } a = 1 \Rightarrow \boxed{e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}$$

► Assim: $\sum_{n=0}^{\infty} P_{Poisson}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \text{ (normalizada!)}$

► b) Para o cálculo de $\bar{n}$: $\underline{\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}}$

► Usando que $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^n\right) = n\lambda^{n-1} = n\frac{\lambda^n}{\lambda} \Rightarrow \boxed{n\lambda^n = \lambda \frac{\partial \lambda^n}{\partial \lambda}}$, então:

$$\bar{n}_{Poisson} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda}{n!}\frac{\partial\lambda^n}{\partial\lambda} = e^{-\lambda}\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right)}_{=e^{\lambda}} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

(parâmetro λ corresponde

ao valor médio da distribuição)

► c) $\sigma^2 = \overline{(n-\bar{n})^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 \quad ; \quad \bar{n}^2 = \lambda^2$ (do item b)

► Agora: $\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n\lambda\frac{\partial\lambda^n}{\partial\lambda}\frac{1}{n!} = e^{-\lambda}\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\lambda^n}{n!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{n^2} = \lambda e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\lambda\frac{\partial\lambda^n}{\partial\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right) = \left(\lambda e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(e^{\lambda}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \overline{n^2} = \left(\lambda e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left(\lambda e^{\lambda}\right) = \lambda e^{-\lambda}(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda + \lambda^2$$

► Finalmente: $\sigma^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \lambda}$

► **<u>Exercício 1:</u>** Uma central telefônica recebe, em média, 21.600 chamadas por hora. Qual é a probabilidade de <u>não receber chamadas</u> em 1 segundo? E receber <u>3 chamadas</u> em 1 segundo?

► Note que a distribuição de probabilidade poderia ser representada graficamente, envolvendo um **<u>espaço amostral</u>** de um **<u>número grande</u>** de chamadas por hora.

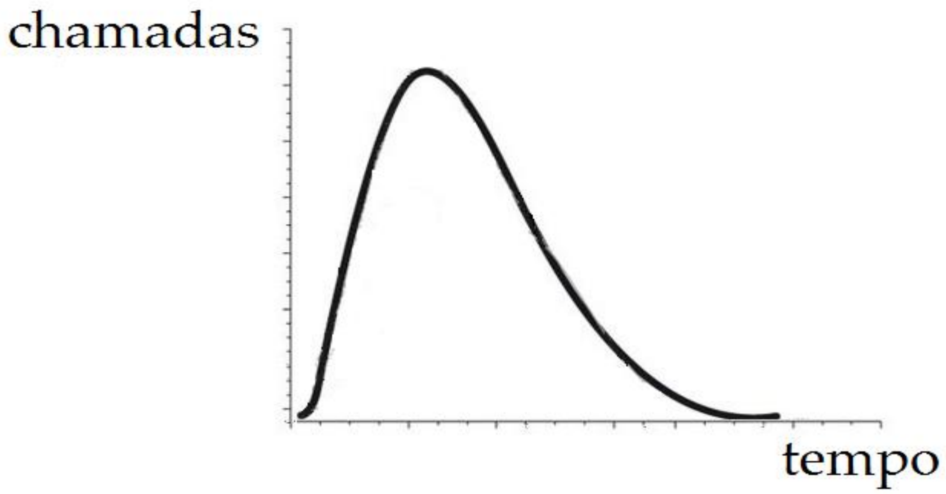

Figura 2: Curva de distribuição correspondente.

► <u>Taxa de ocorrência</u> do evento (chamadas): $\lambda = \dfrac{21600}{3600} = 6 \text{ chamadas/segundo}$

$$P_{Poisson}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \Rightarrow \begin{cases} P(0) = \dfrac{(6)^0 e^6}{0!} \Rightarrow P(0) = 0,0025 \text{ ou } 0,25\% \\ P(3) = \dfrac{(6)^3 e^6}{3!} \Rightarrow P(3) = 0,089 \text{ ou } 8,9\% \end{cases}$$