Termo-Estatística – Licenciatura: 6ª *Aula* (15/03/2013)

Prof. Alvaro Vannucci

RELEMBRANDO

► **Expansão Binomial**: $\boxed{(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} C_{N,n} a^{N-n} b^n}$, sendo que: $\boxed{C_{N,n} = C_n^N = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}}$ (ou então, usar **"Triângulo de Pascal"**)

► **Distribuição de Probabilidade Binomial**

$$\boxed{P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{P(n_i) = \frac{N!}{n_i!(N-n_i)!} p^{n_i} q^{N-n_i}}$$

► Sendo que:
- **p** ≡ probabilidade de **sucesso**;
- **q** = **1 – p** ≡ probabilidade de **fracasso**;
- **N** ≡ número **total de medidas** (eventos);
- **n** ≡ **medidas** (eventos) que satisfizeram uma exigência.

► Vamos agora demonstrar dois resultados importantes:

(i) $\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n P(n) = N\,p$

(ii) $\sigma^2 = \overline{(n-\bar{n})^2} = \sum_{n=0}^{N} (n-\bar{n})^2 P(n) = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = N\,p\,q$

► Demonstração:

(i) $\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n \dfrac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = (\text{lembrar: } 0! = 1) = 0 + \sum_{n=0}^{N} \cancel{n} \dfrac{N!}{\cancel{n}(n-1)!(N-n)!} p^n q^{N-n}$

► Efetuando mudança de variável: $\boxed{n' = n-1} \Rightarrow \boxed{n = n'+1}$,

vemos que:
- para n = 1 → n' = 0
- para n = N → n' = N - 1

► Então: $\overline{n} = \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{N!}{n'!(N-n'-1)!} p^{n'+1} q^{N-n'-1}$; sendo a somatória em **n’**.

► Assim: $\overline{n} = \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{N(N-1)!}{n'!(N-1-n')!} p p^{n'} q^{N-1-n'} = Np \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{n'!(N-1-n')!} p^{n'} q^{N-1-n'}$

► Comparando com a expressão da **expansão binomial**:

$$(q-p)^{N-1} = (p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{n!(N-1-n)!} q^{N-1-n} p^{n}$$

► Então fica claro que: $\overline{n} = NP\underbrace{(p+q)}_{=1}{}^{N-1} \Rightarrow \boxed{\overline{n} = Np}$

► **Caminho alternativo**: Notando que: $\boxed{np^{n} = p\frac{\partial}{\partial p}(p^{n})}$

► Então: $\overline{n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p\frac{\partial}{\partial p}(p^{n}) q^{N-n} = p\frac{\partial}{\partial p}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^{n} q^{N-n}}_{\text{Expansão binomial } (p+q)^N}\right]$

$\therefore\ \overline{n} = p\frac{\partial}{\partial p}\left[(p+q)^{N}\right] = (p)(N)\underbrace{(p+q)}_{=1}{}^{N-1} = N\,p$

(ver anexo: derivada parcial e derivada total)

(ii) Para o cálculo de σ^2, vamos calcular primeiro $\overline{n^2}$:

$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} n^2 p^{n} q^{N-n} \Rightarrow$ usando $np^{n} = p\frac{\partial}{\partial p}(p^{n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{n^2} = p\frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} np^{n} q^{N-n} \Rightarrow$ (aplicando novamente o artifício anterior) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{n^2} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^{n} q^{N-n}}_{= (p+q)^N} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)(p)\left[N(p+q)^{N-1}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{n^2} = p\frac{\partial}{\partial p}\left[Np(p+q)^{N-1}\right] = (p)\left[(N)(\underbrace{p+q}_{=1})^{N-1} + (Np)(N-1)(\underbrace{p+q}_{=1})^{N-2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{n^2} = Np + N^2p^2 - Np^2 = (Np)^2 + Np\,(\underbrace{1-p}_{=q}) \Rightarrow \boxed{\overline{n^2} = (Np)^2 + Npq}$$

► De forma que a **<u>variância</u>**:

$$\sigma^2 = \overline{(n-\bar{n})^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \cancel{(Np)^2} + Npq - \cancel{(Np)^2} \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = Npq}$$ (para a distribuição binomial)

<u>*DISTRIBUIÇÃO DE POISSON*</u>

► Trata-se de um caso **particular** (pois envolve uma aproximação**)** de Distribuição Binomial.

► A Distribuição de **<u>Poisson</u>** é tipicamente aplicada nas situações que **<u>N</u>** é **<u>muito grande</u>** e **<u>p</u>** (probabilidade de sucesso) é **<u>muito pequeno</u>**, de forma que **<u>n</u>** (eventos de **<u>sucesso</u>**) também é **<u>muito pequeno</u>**:

$$\boxed{P(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}$$, sendo que $\boxed{\lambda = Np}$

► Nesta expressão:

- **<u>n</u>** ≡ evento (de sucesso) relacionado com a **<u>exigência imposta</u>** (envolve probabilidade – pequena – do evento ocorrer)
- **λ** ≡ **<u>taxa de ocorrência</u>** do evento estudado (expressa uma média dos resultados)

► Para mostrar que a **Distribuição de Poisson <u>deriva</u>** da Distribuição Binomial (quando $N \to \infty$ e p e $n \to 0$), vamos resolver o ex.5 da lista 2.

5. A probabilidade $W(n)$ de que um evento caracterizado por uma probabilidade p ocorra n vezes em N tentativas é dado pela distribuição binomial $W(n) = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$.

Considere uma situação em que a probabilidade p é pequena ($p \ll 1$) e onde se está interessado no caso em que $n \ll N$. (Note que se N é grande, $W(n)$ torna-se muito pequeno se $n \to N$ porque o fator p^n torna-se muito pequeno quando $p \ll 1$. Assim, $W(n)$ é de fato apreciável apenas quando $n \ll N$). Muitas aproximações podem então serem feitas para reduzir a distribuição binomial a uma forma mais simples.

(a) Usando o resultado $ln(1-p) \cong -p$, mostre que $(1-p)^{N-n} \cong e^{-Np}$.

(b) Mostre que $N!/(N-n)! \cong N^n$.

(c) Mostre que nesse caso a distribuição binomial se reduz a $W(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, onde $\lambda = Np$ é o número médio de eventos. Essa equação é chamada de **Distribuição de Poisson**.

► Neste exercício pede-se, inicialmente, que se utilize a **aproximação** $\ln(1-p) \sim -p$, que resulta **diretamente** da **Expansão de Taylor**.

► Lembrando: a **Expansão de Taylor** de uma função **f(x) em torno de *x = a*** é dada por:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = \frac{f(a)(x-a)^0}{0!} + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots$$

► De forma que, sendo $f(x) \to f(p) = \ln(1-p)$, faremos uma expansão considerando **valores de p muito pequenos** (em torno de p = 0):

$$f'(p=0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(p) = \frac{1}{(1-p)}(-) \Rightarrow f'(p=0) = -1$$

$$f''(p) = \frac{\partial}{\partial p}\left[-(1-p)^{-1}\right] = (1-p)^{-2} = \frac{1}{(1-p)^2} \Rightarrow f''(p=0) = 1$$

$$f'''(p) = \frac{\partial}{\partial p}\left[(1-p)^{-2}\right] = \frac{-2}{(1-p)^3} \Rightarrow f'''(p=0) = -2$$

.

.

.

► Portanto: $\ln(1-p) = 0 - p + \dfrac{(1)(p^2)}{2} - \dfrac{2p^3}{6} + \dots$

► De forma que (se **p** é **muito pequeno** $\Rightarrow$ **p²** e **p³** são **muito menores ainda!!**):

$$\boxed{\ln(1-p) \sim -p}$$

a)

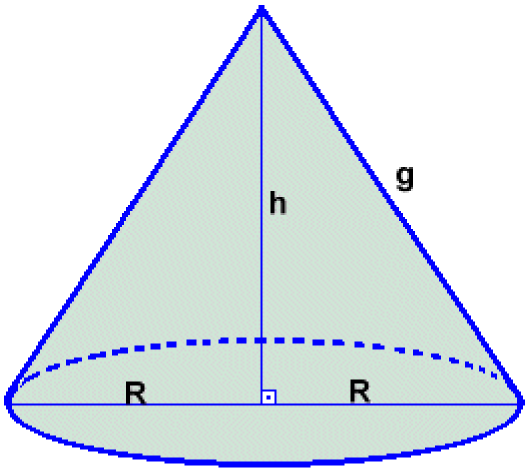
$$\ln(1-p) \sim -p \Rightarrow \boxed{1-p \sim e^{-p}} \Rightarrow (1-p)^{N-n} \sim (e^{-p})^{N-n} = e^{-pN+pn}$$

$$\therefore \quad \boxed{(1-p)^{N-n} \sim e^{-pN}}$$

b) e c) Veremos na próxima aula.

ANEXO - DERIVADAS PARCIAIS

►**Volume de um cone**:



$$\boxed{V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

$\Downarrow$ (derivadas parciais)

$\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2\pi r h}{3}}$ $\rightarrow$ indica a **taxa de variação** do volume quando **r varia** e **h é constante**

(lembrar que **derivada** ≡ **"*inclinação da reta*"** ≡ ***taxa de variação***)

e

$\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial h} = \dfrac{\pi r^2}{3}}$ $\rightarrow$ Taxa de variação do volume quando **h varia** e **r é constante**

DERIVADA TOTAL

►**Diferencial** de uma função: $f(t,x,y)$, por exemplo:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$ (ou para V = V(r,h)): $$\boxed{dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh}$$

►**Derivadas totais do volume do cone**:

Sendo V=V(r,h), e h=cr, por exemplo:

- em relação a **r**: $\frac{dV}{dr} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dr} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dr} = \frac{2\pi rh}{3} + \left(\frac{\pi r^2}{3}\right)(c) = \frac{2}{3}\pi r^2 c + \frac{1}{3}\pi r^2 c = \pi r^2 c$

- em relação a **h**: $\frac{dV}{dh} = \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dh} + \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dh}{dr} = \frac{\pi r^2}{3} + \left(\frac{2\pi rh}{3}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{\pi r^2}{3} + \frac{2}{3}\frac{\pi r^2 \cancel{c}}{\cancel{c}} = \pi r^2$