

Termo-Estatística – Licenciatura: **24ª Aula** (12/06/2013)

Prof. Alvaro Vannucci

RELEMBRANDO

► Na cavidade idealizada para representar um corpo negro, o número de ondas EM estacionárias com frequências entre ν e $\nu + d\nu$ é dada por:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu; \quad V = a^3 \text{ (cavidade em forma de cubo)}$$

► Considerando que as ondas EM na cavidade são criadas pelas cargas nas paredes que oscilam e que possuem energia (média):

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E P(E) dE = \int_0^{\infty} (E) \left(\frac{1}{KT} e^{-\frac{E}{KT}} \right) dE = KT \quad (\text{correspondente a 2 graus}$$

de liberdade dos osciladores, com $1/2 KT$ para cada um)

► Então, a densidade volumétrica de energia na cavidade (que corresponde à energia do corpo negro que será irradiada) no intervalo de frequência entre ν e $\nu + d\nu$ (para uma temperatura T) será:

$$\Rightarrow \rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 KT}{c^3} d\nu \quad \equiv \text{ F\u00f3rmula de Rayleigh-Jeans}$$

para a Radia\u00e7\u00e3o de Corpo Negro

► Esta express\u00e3o, no entanto, s\u00f3 ajusta os dados experimentais da densidade de energia correspondentes aos valores mais baixos de frequ\u00eancia, at\u00e9 a regi\u00e3o pr\u00f3xima do ultra-violeta (**cat\u00e1strofe do ultra-violeta**):

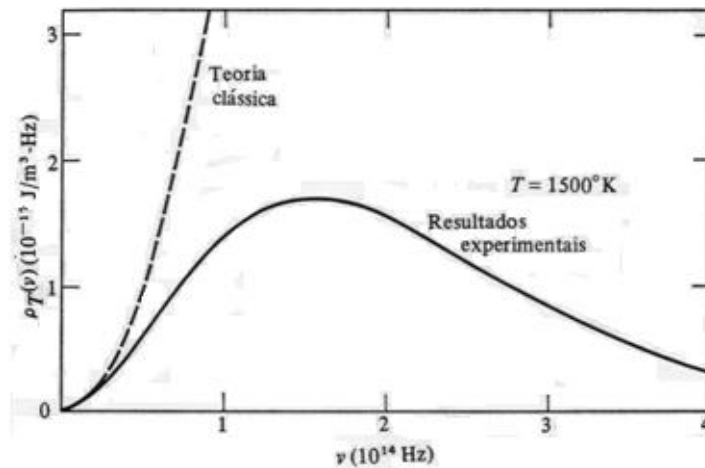


FIGURA 1-8. A previsão de Rayleigh-Jeans (linha pontilhada) em comparação com os resultados experimentais (linha sólida) para a densidade de energia de uma cavidade de corpo negro, mostrando a discrepância séria chamada de catástrofe do ultravioleta.

► Do ajuste da curva realizado por Planck: os osciladores harmônicos (cargas aceleradas) das paredes da cavidade teriam energias discretizadas (“quantizadas”):

$$\boxed{E_n = nh\nu}; \begin{cases} h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \equiv \text{constante de Planck} \\ n \equiv \text{um número inteiro} \end{cases}$$

► Desta forma, a distribuição de probabilidade das energias (discretizadas) dos

osciladores seria:
$$\boxed{P(E_n) = \frac{1}{KT} e^{-\frac{E_n}{KT}}}$$

► De maneira que o cálculo da energia média dos osciladores (e consequentemente das ondas EM produzidas por eles) será:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) \left(\frac{1}{KT} e^{-\frac{nh\nu}{KT}} \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{KT} \right) e^{-\frac{nh\nu}{KT}}}$$

se chamarmos, nos expoentes, $\frac{h\nu}{KT} = \beta \Rightarrow \bar{E} = h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n}}$

► Notando agora que
$$\frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} \right) \right] = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n}} \frac{d}{d\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\beta} (e^{-\beta n}) = - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n}}$$

► Então, a expressão da \bar{E} acima pode ser escrita:

$$\bar{E} = -h\nu \frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} \right) \right]$$

► Mas, já obtivemos antes que, por expansão de Taylor (**ver 19ª aula**):

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} = e^0 + e^{-\beta} + e^{-2\beta} + \dots = (1 - e^{-\beta})^{-1}$$

► Então:
$$\bar{E} = -h\nu \frac{d}{d\beta} \left[\ln(1 - e^{-\beta})^{-1} \right] = (h\nu) \frac{d}{d\beta} \left[\ln(1 - e^{-\beta}) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{h\nu}{(1 - e^{-\beta})} e^{-\beta} = \frac{h\nu}{(1 - e^{-\beta}) e^{\beta}} = \frac{h\nu}{e^{\beta} - 1} \Rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{h\nu}{\left(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)}};$$

e não **KT** apenas!

► Portanto, multiplicando esta energia (média) das ondas EM pelo número de ondas estacionárias na cavidade, na faixa de frequência ν e $\nu + d\nu$, temos a **densidade volumétrica de energia do corpo negro** sendo dada por:

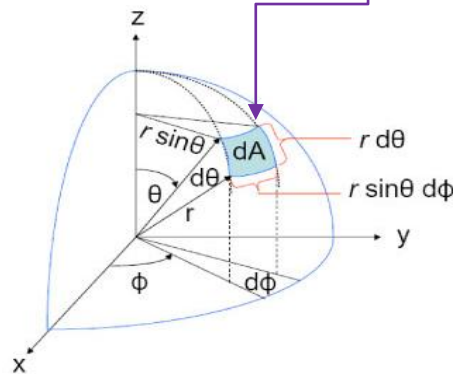
$$\boxed{\rho_T(\nu) d\nu = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \right) d\nu} \quad (\text{Fórmula de Planck});$$

que ajusta corretamente os dados experimentais para o corpo negro, para qualquer valor de temperatura!

► Considerando que esta energia (espectral) será irradiada (na forma de ondas eletromagnéticas) de maneira uniforme (isotropicamente) com velocidade c , então podemos escrever, em termos da radiância espectral:

$$\rho_T(\nu) = \frac{1}{c} \int R_T(\nu) \left(\frac{dA}{r^2} \right)_{\perp}; \quad dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$d\Omega \equiv \text{ângulo sólido}$



► Realizando o cálculo da integral acima segundo as referências:

http://www.if.ufrgs.br/~betz/iq_XX_A/radTerm/aRadTermResAd_1.htm

http://www.fisicaexe.com.br/fisica2/quantica/corponegro/corponegro1_ns1.pdf

$$\rho_T(\nu) = \frac{4}{c} R_T(\nu)$$

► De forma que: $R_T(\nu) d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$ \equiv radiância espectral de um

corpo negro, na faixa de frequência entre ν e $\nu + d\nu$

► Finalmente, para obter a radiância do corpo negro em termos do comprimento de onda λ das ondas eletromagnéticas, devemos fazer (veja procedimento semelhante realizado na 12ª aula):

$$R_T(\nu) d\nu \rightarrow R_T(\lambda) d\lambda; \text{ sendo que } \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \Rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

(este sinal só indica que um acréscimo na frequência causa um decréscimo no comprimento de onda)

► Ou seja: $R_T(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{c^3}{\lambda^3} \right) \left(\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} \right) \left(\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \right) = R(\lambda)d\lambda \Rightarrow$

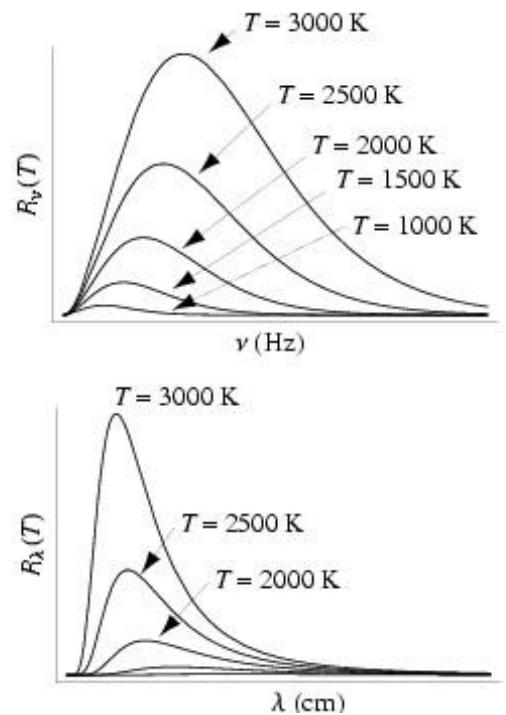
$\Rightarrow R_T(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1} d\lambda \equiv$ espectro de radiação do corpo negro

(radiância espectral) na faixa de comprimento de onda λ e $\lambda + d\lambda$

► Construindo os gráficos referentes a estes dois resultados, para alguns valores de temperatura:

► Note que a posição do pico da distribuição em ν não corresponde ao pico da distribuição da radiação em termos de λ .

► Exercício 8 – Lista 6:



8. A boca de um forno de pizzaria tem área $0,3 \text{ m}^2$ e emite radiação com comprimento de onda dominante (máximo da curva de radiação de um corpo negro) de 6500 nm .

(a) Qual é a temperatura do forno? (b) Calcule a *radiância total* e a *potência energética* emitida pela boca do forno, indicando apropriadamente as respectivas unidades. (c) Se toda a energia radiante fosse emitida no comprimento de onda dominante, quantos fótons estariam abandonando a boca do forno por segundo?

$$\begin{cases} A_{\text{emissor}} = 0,3 \text{ m}^2 \\ \lambda_{\text{máx}} = 6500 \text{ nm} \end{cases}$$

a) $\lambda_{\text{máx}} T = 0,29 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K} \Rightarrow T = \frac{0,29 \times 10^{-2}}{6500 \times 10^{-9}} \Rightarrow T = 446 \text{ K} = 173^\circ \text{ C}$

b) Radiância: $R_T = \sigma T^4 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right) \Rightarrow R_T = (5,7 \times 10^{-8})(446)^4 = 2,25 \text{ KW} / \text{m}^2$

► Potência (energética): $P = (R_T)(A_{emissor}) = (2,25 \times 10^{-3})(0,3) \Rightarrow P = 677W$

$$c) E_{\text{cada fóton}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{6500 \times 10^{-9}} \Rightarrow E_{\text{cada fóton}} = 3,06 \times 10^{-20} J$$

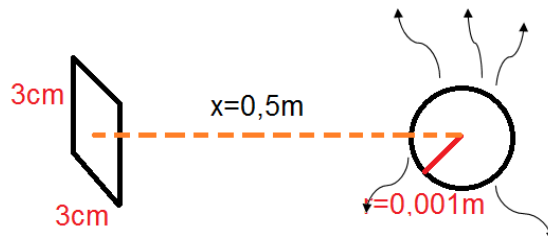
$$n^\circ \text{ de fótons: } N = \frac{677}{3,06 \times 10^{-20}} = 2,21 \times 10^{22} \text{ fótons / s}$$

► Exercício 7 – Lista 6:

7. Considere uma fonte de luz monocromática azul (4000 \AA) de 80 W de potência, colocada a 50 cm de uma placa plana e quadrada de 3 cm de lado.

(a) Determine o número médio de fótons por unidade de tempo que a placa recebe da fonte, sendo a fonte esférica de 1 mm de raio. *Resp* : $4,6 \times 10^{16}$.

(b) Determine o número médio de fótons por unidade de tempo que a placa recebe da fonte, sendo a fonte um feixe de 3 mm de raio. *Resp* : $1,63 \times 10^{20}$.



$$\lambda = 4 \times 10^{-7} m \quad ; \quad P_{TOTAL} = 80W = 80J / s \quad ; \quad A_{placa} = 9 \times 10^{-4} m^2$$

$$a) E_{\text{cada fóton}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{400 \times 10^{-9}} \Rightarrow E_{\text{cada fóton}} = 5 \times 10^{-19} J$$

► Número de fótons que saem da fonte, por segundo:

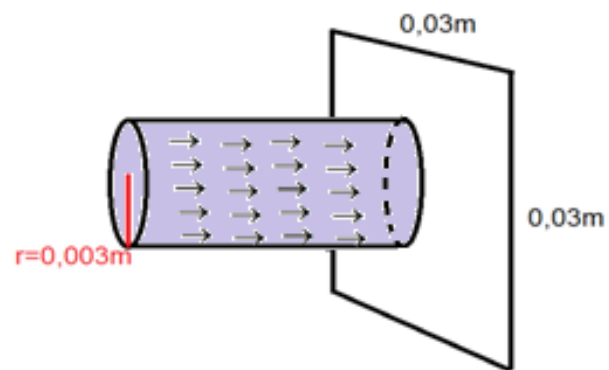
$$N_{\text{fonte}} = \frac{80}{5 \times 10^{-19}} \Rightarrow N_{\text{fonte}} = 1,6 \times 10^{20} \text{ fótons / s}$$

► Número de fótons que chegam à placa:

$$(regra \text{ de três}): \quad \begin{array}{r} N_{\text{fonte}} = 1,6 \times 10^{20} \\ N_{\text{placa}} = 9 \times 10^{-4} \end{array} \quad \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \quad \begin{array}{l} (4\pi)(0,5)^2 \\ 9 \times 10^{-4} \end{array}$$

$$\therefore N_{\text{placa}} = 4,6 \times 10^{16} \text{ fótons / s}$$

b)



► Como $A_{\text{feixe}} < A_{\text{placa}} \Rightarrow$ todos os fótons atingem a placa!

$$\therefore N_{\text{placa}} = N_{\text{feixe}} = 1,6 \times 10^{20} \text{ fótons}$$