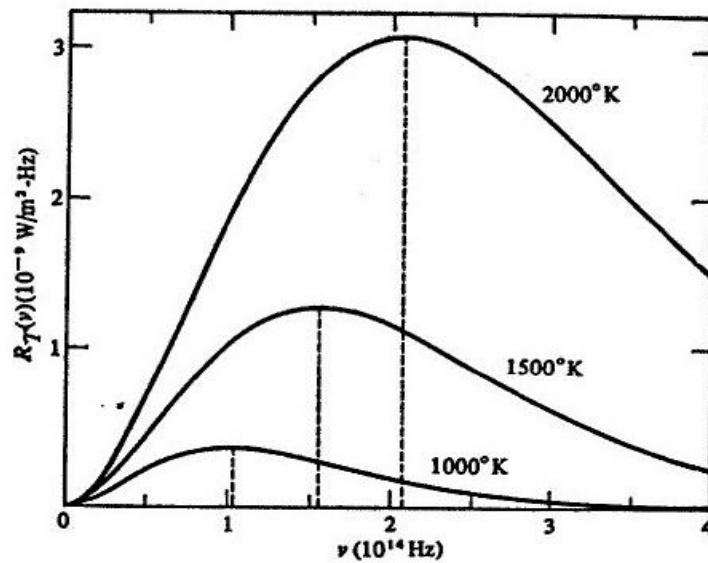


## Termo-Estatística – Licenciatura: 23ª Aula (07/06/2013)

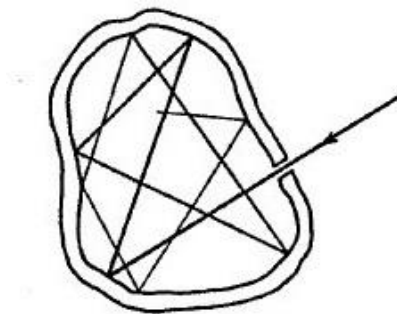
Prof. Alvaro Vannucci

### RELEMBRANDO

- ▶ Espectro de radiação do corpo negro em termos da radiância  $R_T(\nu)$ , em função da frequência  $\nu$  das ondas eletromagnéticas emitidas:



- ▶ Idealização física:



- ▶ A integral da radiância espectral ( $R_T(\nu)d\nu$ ) corresponde à energia total por unidade de tempo, por unidade de área do corpo negro:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \equiv \text{área sob cada curva do gráfico acima, para cada T}$$

► **Lei de Stefan:**

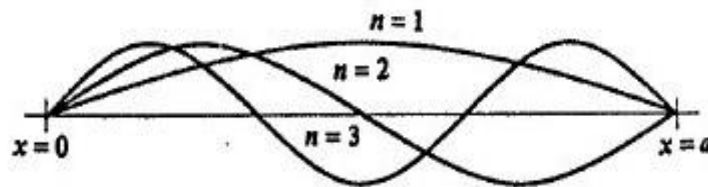
$$R_T = \sigma T^4; \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4 \equiv \text{constante de Stefan-Boltzmann}$$

► **Lei do Deslocamento de Wien:**  $\lambda_{\text{máx}} T = 0,289 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}$

► Rayleigh e Jeans, considerando uma cavidade na forma de um cubo de lados  $a$  obtiveram (em  $1D$ ) que as únicas ondas estacionárias que podem existir no interior da cavidade são as que satisfazem a condição:

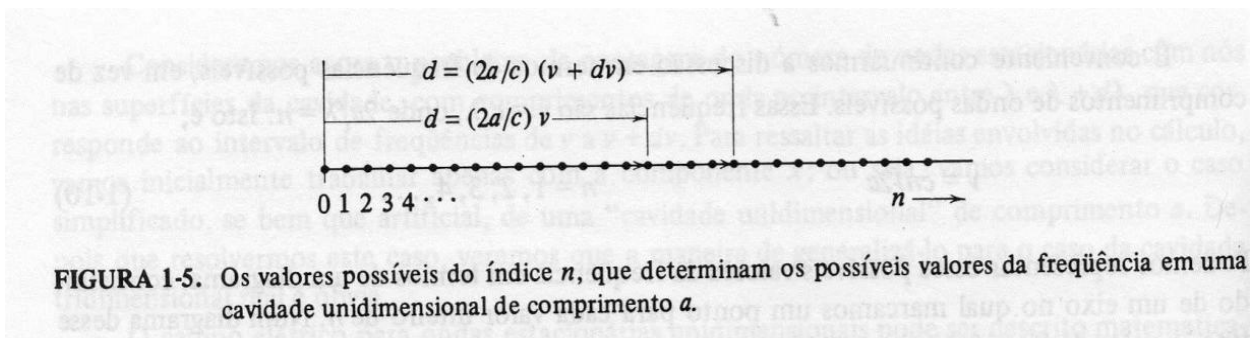
$$\lambda_{\text{possíveis}} = \frac{2a}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

► Esquematicamente:



e como  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  (no vácuo)  $\Rightarrow$   $\nu_{\text{possíveis}} = \frac{c}{2a} n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$

► Vamos fazer agora a contagem do número de ondas que existem na cavidade (em  $1D$ ) no intervalo de frequências entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ . Para isto, vamos representar em um eixo todos os valores possíveis de frequência:



**FIGURA 1-5.** Os valores possíveis do índice  $n$ , que determinam os possíveis valores da frequência em uma cavidade unidimensional de comprimento  $a$ .

► De forma que o número das frequências possíveis no intervalo entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , que chamaremos de  $N(\nu)d\nu$ , corresponderá ao número de pontos entre os dois intervalos indicados no diagrama 1D acima:

( 4, por haver duas polarizações possíveis para as ondas eletromagnéticas )

$$N(\nu)d\nu = \frac{2a}{c}(\nu + d\nu - \nu) \Rightarrow N(\nu)d\nu = \frac{2a}{c}d\nu$$

( a interação da onda com a parede é diferente para cada tipo de polarização )

► Ou seja, quanto maior for o intervalo  $d\nu$ , mais pontos existirão no intervalo escolhido e, portanto, maior será o número das ondas possíveis (cujas frequências estarão entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ )

► A generalização deste resultado para a configuração 3D, correspondente a um volume  $V = a^3$  é discutida no Eisberg e Resnick (*verificar!*), resultando:

$$\boxed{N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu} \equiv \text{número das ondas EM estacionárias na cavidade que possuem frequências no intervalo } \nu \text{ e } \nu + d\nu$$

► Vamos agora determinar a densidade volumétrica de energia  $\rho_T(\nu)$ , em  $J / m^3$ , associada a estas ondas EM no intervalo de frequência  $\nu$  e  $\nu + d\nu$

► Rayleigh e Jeans, para fazerem isto, utilizaram a “**Princípio da Equipartição de Energia**” (já que a origem destas ondas seriam as cargas oscilantes das paredes da cavidade), que prevê 2 graus de liberdade; sendo  $1/2 KT$  para cada um deles.

► É interessante observar que este resultado também pode ser obtido diretamente do cálculo da energia média  $\bar{E}$ , utilizando a distribuição de densidade de probabilidade que já estudamos:

$$P(E) = \frac{1}{KT} e^{-E/KT} ; \text{ sendo } \frac{1}{KT} \text{ a constante de normalização (verifique, deter-}$$

minando:  $\int_0^{\infty} C e^{-\frac{E}{KT}} dE = 1$ )

► De forma que:  $\bar{E} = \frac{1}{KT} \int_0^{\infty} E e^{-\frac{E}{KT}} dE \Rightarrow$  por partes  $\begin{cases} u = E \rightarrow du = dE \\ dv = e^{-\frac{E}{KT}} dE \rightarrow v = -KT e^{-\frac{E}{KT}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left( \int u dv = uv - \int v du \right) \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{KT} \left[ (E) (-KT e^{-\frac{E}{KT}}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} KT e^{-\frac{E}{KT}} dE \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{E} = 0 - KT e^{-\frac{E}{KT}} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow \bar{E} = -KT(0-1) \Rightarrow \boxed{\bar{E} = KT}$$

► Desta maneira, tendo-se estabelecido que a energia (média) das ondas estacionárias na cavidade corresponde à energia (média) dos osciladores harmônicos que as produzem, no equilíbrio ( $\bar{E} = KT$ ), pode-se então calcular a densidade volumétrica de energia, no intervalo de frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  a partir do cálculo da energia total na cavidade, dividida pelo seu volume:

$$\frac{E_{\text{cavidade}}}{V} = \left( \frac{1}{V} \right) \left( \begin{array}{c} \text{n}^\circ \text{ das ondas com frequência} \\ \text{entre } \nu \text{ e } \nu + d\nu \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{energia média de cada onda } \equiv \\ \equiv \text{energia média dos osciladores} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  a densidade volumétrica de energia no intervalo  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  será:

$$\rho_T(\nu) d\nu = \left( \frac{1}{V} \right) (N(\nu) d\nu) (kT) = \left( \frac{1}{V} \right) \left( \frac{8\pi \cancel{V}}{c^3} \nu^2 \right) (kT) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi \nu^2 KT}{c^3} d\nu} \equiv \text{Fórmula de Rayleigh-Jeans}$$

para a Radiação de Corpo Negro

**(BOM! Ver apêndice B e C do Eisberg-Resnick sobre radiação de dipolo elétrico e distribuição de Boltzmann)**

► Este resultado, no entanto, ajustou adequadamente apenas uma parte dos dados experimentais, correspondentes à densidade volumétrica de energia nos intervalos de frequência  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ :

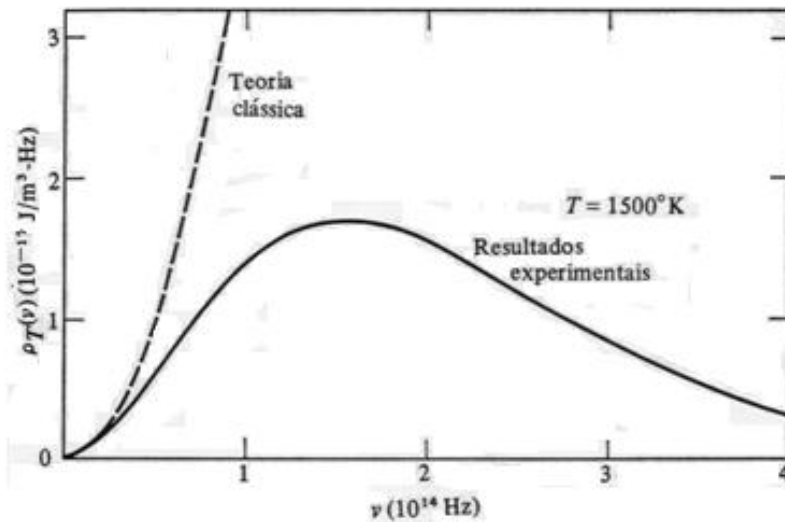


FIGURA 1-8. A previsão de Rayleigh-Jeans (linha pontilhada) em comparação com os resultados experimentais (linha sólida) para a densidade de energia de uma cavidade de corpo negro, mostrando a discrepância séria chamada de catástrofe do ultravioleta.

► Ou seja, o ajuste só era perfeito para baixas frequências, até a frequência próxima da região do ultra-violeta. Para frequências maiores, a contradição é evidente. A esta discrepância resolveu-se denominar **“Catástrofe do Ultra-Violeta”**.

► Evidentemente algo *“estaria faltando”* na teoria desenvolvida por Rayleigh-Jeans.

► O ajuste apropriado (inicialmente foi um ajuste puramente matemático!) aos dados experimentais foi finalmente obtido e apresentado ao mundo científico no ano 1900, pelo físico alemão Max Planck.

► Sua proposta era que, se as frequências dos osciladores (que geravam as ondas EM estacionárias na cavidade) eram discretizadas, talvez as suas energias (bem como as das ondas EM correspondentes) também fossem discretizadas.

► Ou seja:  $E_{EM} \propto \nu$ ; já que  $\nu \propto n \Rightarrow \boxed{E_n = nh\nu}$ ; sendo  $h$  a *constante de Planck* ( $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ); e  $n$  um número inteiro.

► Veremos na próxima aula como esta sugestão permitiu que os dados experimentais fossem adequadamente ajustados.

► Exercício 3 – Lista 6:

3. Considere que a superfície do Sol irradia aproximadamente como um corpo negro de 5700K. Uma esfera de cobre de 1m de raio, coeficiente de absorção igual de corpo negro que está na superfície da Terra, portanto distante  $1,5 \times 10^{11} m$  do Sol, é por ele irradiada. O raio do Sol é de  $6,4 \times 10^8 m$ .

(a) Determine a potência total irradiada pelo Sol. *Resp* :  $3,1 \times 10^{26} W$ .

(b) Determine o comprimento de onda mais provável do espectro de irradiação solar. A que faixa do espectro eletromagnético corresponde esse comprimento de onda? *Resp* :  $0,500 \mu m$ .

(c) O comprimento mais provável do espectro determinado no item anterior corresponde à frequência mais provável? Justifique.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{Sol} = 5700K \\ A_{Cu} = \pi r^2 = 3,14m \\ R_{ST} = 1,5 \times 10^{11} m \\ R_S = 6,4 \times 10^8 m \end{array} \right.$$

a) Como a radiância  $R_T = \sigma T^4$ , em  $\left(\frac{W}{m^2}\right)$ , então:

$$P_S = (R_T^{Sol})(A^{Sol}) = \sigma T^4 4\pi R_S^2 = (5,67 \times 10^{-8})(5700)^4 (4\pi)(6,4 \times 10^8)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_S = 3,1 \times 10^{26} W = 3,1 \times 10^{20} MW$$

► Note que, como:

$$P_{Itaipú} = 14000 MW = 1,4 \times 10^4 MW \Rightarrow \text{Potência gerada pelo Sol}$$

corresponde a  $\sim 2 \times 10^{16}$  Itaipús!!

**B)**  $\lambda_{\text{mais provável}}$   $\equiv$  comprimento de onda do máximo da distribuição

► Da **Lei de Wien**:  $\lambda_{\text{máx}} T = 0,2898 \times 10^{-2} m \cdot K \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{máx}}^{Sol} = \frac{0,2898 \times 10^{-2}}{5700} = 510 nm = 5100 \text{ angstroms} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vermelho} \approx 750 nm \\ \text{violeta} \approx 380 nm \end{array} \right.$$

$\therefore$  ( $\approx$  região do amarelo)

c) Não, pois como veremos, as distribuições  $R_T(\nu)$  e  $R_T(\lambda)$  têm formatos diferentes, de maneira que os picos das distribuições não coincidem.

► Exercício 5 – Lista 6:

5. A temperatura de um corpo negro é aumentada de 900K para 1900K. Por qual fator aumenta a potência total irradiada por unidade de área? De quanto é deslocado o comprimento de onda mais provável?

a)  $\frac{\text{Potência}}{\text{Área}} \equiv \text{radiância } R_T = \sigma T^4$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = A\sigma T_1^4 = (A\sigma)(900)^4 \\ P_2 = A\sigma T_2^4 = (A\sigma)(1900)^4 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{900}{1900}\right)^4 \Rightarrow P_2 \sim 20P_1$$

b) Deslocamento do comprimento de onda:  $\lambda_{\text{máx}} T = 0,2898 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{\text{máx}}^{(1)} = \frac{0,2898 \times 10^{-2}}{900} \\ \lambda_{\text{máx}}^{(2)} = \frac{0,2898 \times 10^{-2}}{1900} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 0,2898 \times 10^{-2} \left( \frac{1}{900} - \frac{1}{1900} \right) \Rightarrow \text{deslocamento } \Delta\lambda = 1690 \text{ nm}$$