Termo-Estatística – Licenciatura: 2ª *Aula* (01/03/2013)

Prof. Alvaro Vannucci

RELEMBRANDO

► Cálculo da probabilidade de um evento i ocorrer:

$$P_i = \lim_{N \to \infty} \frac{n_i(N)}{N} \quad ;$$

onde n_i é o número de vezes que ocorreu o evento i após N medidas.

► "*Ensemble*": conjunto de sistemas idênticos que são medidos em uma única vez.

► Espaço Amostral: representa graficamente, por pontos, os resultados (eventos) possíveis de um experimento.

► Evento composto: representa os pontos (eventos) que satisfazem uma dada condição (critério).

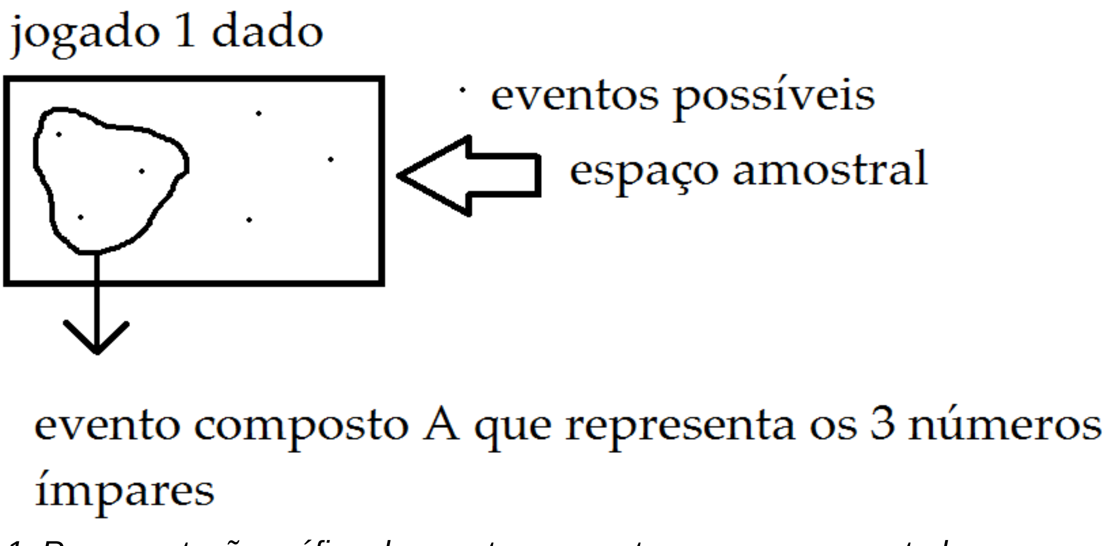

Figura 1: Representação gráfica do evento composto no espaço amostral.

► Matematicamente:

$$P(A) = \sum_{i \subset A} P_i$$

► Agora, dados 2 eventos compostos (dois conjuntos), a probabilidade de um evento (pertencente a um **ou** outro conjunto) ocorrer é dada por:

$$P(D)=P(B\underset{\substack{\uparrow\\(\text{ou})}}{\cup}C)=P(A)+P(C)-\underbrace{P(A\overset{\substack{(\text{e})\\\downarrow}}{\cap}C)}_{=0,\text{ se A e B forem disjuntos}}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

► Em muitas situações práticas, deseja-se saber qual é a probabilidade de um evento (X) ocorrer, dado que um outro (Y) tenha ocorrido antes:

$$P(X/Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$$

► Note que:

1. Quanto realizamos a **união** entre 2 conjuntos ($X=M\cup N$), estamos considerando todos os eventos que são abrangidos por um (**M**) **ou** outro (**N**).

2. Quando realizamos a **intersecção** entre 2 conjuntos ($X=M\cap N$), então só estaremos considerando os eventos pertencentes a um (**M**) **e** outro (**N**).

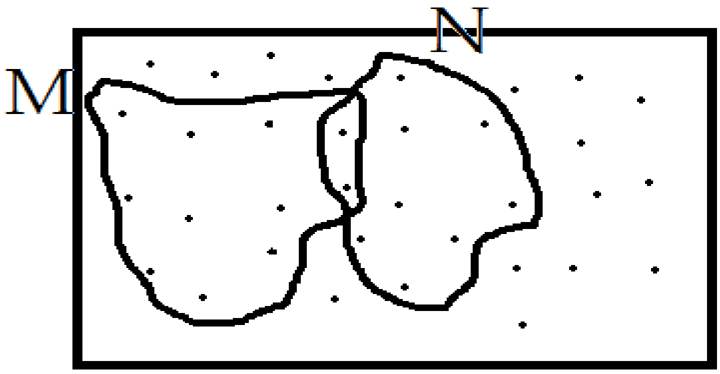

Figura 2: Representação gráfica dos eventos compostos ***M*** *e* ***N*** *no espaço amostral.*

► <u>Exercício:</u> Nas duas provas de um curso, suponha que a probabilidade dos alunos tirarem nota menor que 5,0 na 1ª prova é de 40%, enquanto que a probabilidade de tirarem nota menor que 5,0 nas duas provas é de 24%. Qual é a probabilidade de um aluno tirar nota menor que 5,0 na 2ª prova (evento **X**), sabendo-se que ele já tirou nota menor que 5,0 na 1ª prova (evento **Y**)?

► <u>Resolução:</u>

Queremos:

P(X/Y) = probabilidade do aluno tirar menos que 5,0 na 2ª prova, tendo ele já tirado nota menor que 5,0 na 1ª prova.

Temos:

$P(X \cap Y)$ = 0,24 ≡ probabilidade de se tirar, no curso, nota menor que 5,0 na 1ª e na 2ª prova.

$P(Y)$ = 0,4 ≡ probabilidade de se tirar, no curso, nota menor que 5,0 na 1ª prova

$$\therefore \; P(X/Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6; \quad ou \quad 60\%$$

► <u>Exercício:</u> Sabe-se que a probabilidade de se retirar, consecutivamente, uma bola preta e depois uma bola branca, de uma caixa que só contém bolas brancas e pretas, é de 36%. Sabe-se também que a probabilidade de se tirar uma bola preta é de 48%. Qual é a probabilidade de se tirar uma bola branca na 2ª retirada, tendo-se que na 1ª saiu uma bola preta?

► Resolução:

Queremos:

P(X/Y) = probabilidade de se retirar uma bola branca na 2ª tentativa (evento X), sendo que na 1ª já saiu bola preta (evento Y).

Temos:

$P(X \cap Y)$ = 0,36 ≡ probabilidade de se retirar inicialmente uma bola preta (sem retorná-la à caixa) e, em seguida, uma bola branca.

$P(Y)$ = 0,48 ≡ probabilidade de se retirar bola preta (na 1ª tentativa).

$$\therefore \ P(X/Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0,36}{0,48} = 0,75; \ \ ou \ \ 75\%$$

► Exemplo**:** Qual a probabilidade de se tirar uma carta de copas de um baralho (evento **A**), se impormos de antemão que ela deverá ser o número 3 (evento **B**)?

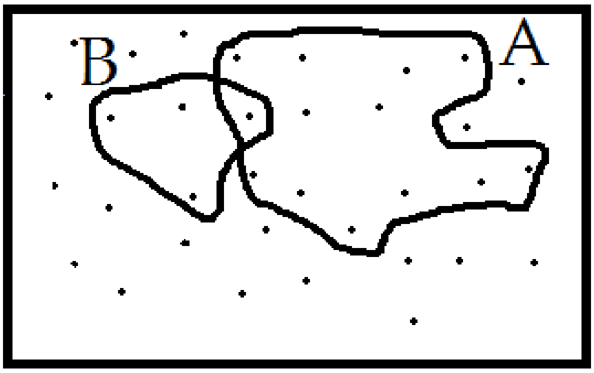

*Figura 3: Representação gráfica dos eventos compostos **A** e **B** no espaço amostral.*

$$P(A) = \frac{13}{52}$$

$$P(B) = \frac{4}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/52}{4/52} = \frac{1}{4} \qquad (*)$$

► Esta resposta poderia ter sido obtida antes, observando que como a deve ser um 3, temos então as possibilidades: *3 de copas*, *3 de ouros, 3 de espadas* e *3 de paus*. A probabilidade de ser um copas é, de fato, 1/4.

► Note que, em geral, $P(X/Y) \neq P(Y/X)$. No exemplo anterior:

$$P(A/B) = \frac{1}{4} \text{ ; enquanto que } P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}$$

► Mas observe também que, no exemplo anterior: $P(A/B) = P(A)$ e, igualmente, $P(B/A) = P(B)$. Substituindo o primeiro resultado na equação **(*)**, temos: $P(A).P(B) = P(A \cap B)$. Esta equação, porém, só vale quando os eventos **A** e **B** (que podem ser compostos) são <u>independentes</u>, isto é, quando o fato de um evento ocorrer (ou não) não tem efeito algum sobre a probabilidade do outro ocorrer. Outra forma de dizer isto: "*Se a ocorrência de um evento não afeta as chances de ocorrência de um outro evento, então estes eventos são ditos* ***<u>independentes</u>***."

► <u>Exercício:</u> Se **A** e **B** correspondem a dois eventos que possuem probabilidades de ocorrência P(**A**) = 0,4 e P(**B**) = 0,2, de forma que $P(A \cap B)$ = 0,1, calcule:

a) P(A/B)

b) P(B/A)

c) Os eventos A e B são independentes?

► <u>Respostas</u>

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) Para serem independentes:

$$\begin{aligned} &P(A).P(B) = P(A \cap B) \\ &(0{,}4)(0{,}2) \quad \neq \quad (0{,}1) \end{aligned} \qquad \therefore \quad \text{Não são!}$$

► <u>Exercício:</u> No lançamento de um dado:

a) Desenhe o espaço amostral correspondente.

b) Calcule e represente no espaço amostral o evento composto correspondente e a probabilidade P(**A**) de saírem os números {3, 4, 6}.

c) Calcule e represente no espaço amostral o evento composto correspondente e a probabilidade P(**B**) de sair um número par.

d) Calcule P(**A**/**B**)

e) Os eventos são independentes?

► <u>Respostas:</u>

a) Representação segue na figura 4.

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $$\begin{aligned} &P(A)P(B) = \tfrac{1}{4} \\ &P(A \cap B) = \tfrac{1}{3} \end{aligned} \qquad \therefore \quad \text{Não são!}$$

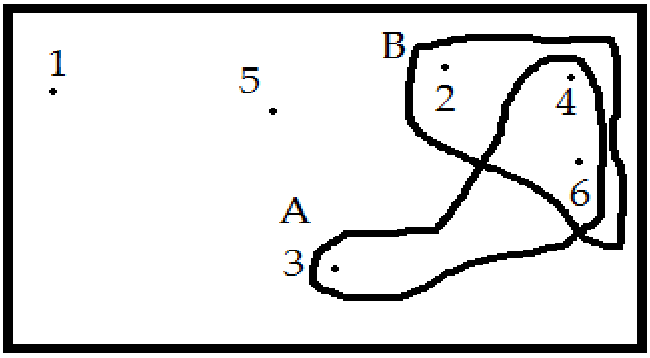

Figura 4: Representação do espaço amostral e dos eventos compostos

A *e* ***B.***