Termo-Estatística – Licenciatura: *1ª Aula* (27/02/2013)

Prof. Alvaro Vannucci

- Neste curso faremos uso das leis da Termodinâmica e da Mecânica Estatística p ara estudar e entender uma certa classe de fenômenos físicos.
- A Termodinâmica basicamente envolve estabelecer relações entre as propriedades macroscópicas dos sistemas, como o volume, a pressão, etc...
- Porém, para que se possa aprofundar ainda mais o entendimento de vários sistemas físicos, faz-se necessário também investigar a natureza microscópica destes sistemas, determinando como se comportam seus átomos/moléculas ao longo do tempo.
- Passamos então para o domínio da Mecânica Estatística; e é justamente esta extensão para considerações microscópicas que diferencia fundamentalmente a Termodinâmica da Mecânica Estatística.
- Aqui podemos nos fazer uma pergunta importante: como fazer para acompanhar o comportamento de cada uma das 10^{20} partículas por cm^3,que tipicamente compõem os sistemas físicos?Felizmente, apenas calculando valores médios das grandezas fundamentais que envolvem as partículas, já é possível extrair informações valiosas dos sistemas em estudo, e a manipulação adequada destes valores médios é a tarefa principal da Termodinâmica.
- No entanto, para se determinar os valores médios das grandezas pertinentes é que precisamos lançar mão dos conceitos e métodos estatísticos.

CONCEITO DE PROBABILIDADE

- Quando jogamos um dado tendo como resultado um número na face de cima, tem os então um evento. Jogandoentão o dado aleatoriamente, perguntamo-nos *a priori*: qual a probabilidade dele fornecer o número 3 na face de cima?
- Será 1/6? Como sabemos disso? É porque temos a certeza de que jogando o dado seis vezes consecutivamente, irá sair um número diferente em cada jogada? É isso?
- Se não for assim, qual é o interesse em saber a probabilidade de ocorrer um dado evento em um sistema?
- A resposta envolve a necessidade de efetuarmos um número bastante grande de medidas de forma que veremos 1/6 delas tendo como resultado o número 3. Daí que podemos estabelecer uma "*definição matemática de probabilidade*" de ocorrência de um evento i:

$$P_i = lim_{N\to\infty}\frac{n_i(N)}{N}$$

onde n_i (que depende de N) corresponde ao número de vezes em que aconteceu o evento i, após N medidas (jogadas).

- Note que a “leitura” desta equação pode ser feita de duas formas:

  1. N medidas foram feitas consecutivamente utilizando o mesmo sistema (mesmo dado).

  2. Uma única medida foi feita em N sistemas (dados) idênticos.

- Neste segundo caso é costume chamar de “*ensemble*” o conjunto de N sistemas idênticos (que são medidos uma única vez).
- É importante sempre lembrar que, em se fazendo uso das equações da probabilidade:

1. A probabilidade de um evento ocorrer é sempre maior ou igual a zero: $P_i \geq 0$;

2. A soma das probabilidades de cada evento possível ocorrer será de 100%: $\sum_i P_i = 1$

- Neste segundo caso, a somatória é sobre todos os eventos possíveis.
- Um conceito importante na Teoria de Probabilidade é o de “Espaço Amostral”, que engloba todos os eventos possíveis relacionados com um dado sistema.
- É sempre interessante representar o espaço amostral, como na figura 1, em que cada ponto representa um resultado possível (evento) do experimento realizado.

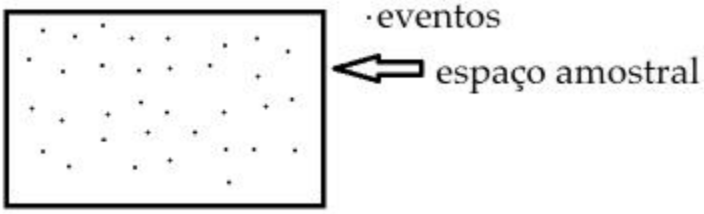
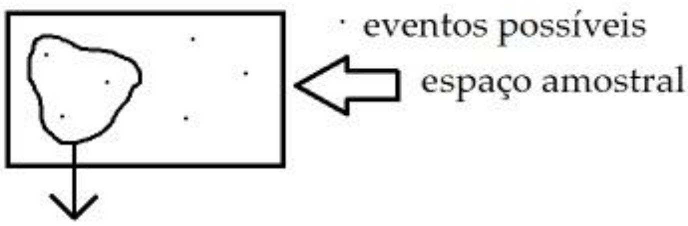


Figura 1: Representação do espaço amostral, em que cada ponto representa um evento.

- Note que nesta representação gráfica só os pontos em si (eventos) é que nos interessa observar: o arranjo especial ou as distâncias entre eles não tem significado algum.
- Chamamos de “Evento Composto” a situação na qual dois ou mais resultados (eventos) são aceitáveis (satisfazem uma dada requisição). Por exemplo, podemos querer que saia um número ímpar (dos três possíveis) em uma jogada do dado. A representação gráfica segue na figura 2:



evento composto que representa os 3 números ímpares

Figura 2: Representação gráfica do evento composto A no espaço amostral.

- Em termos matemáticos, podemos representar a probabilidade de sair o resultado desejado (sair um número ímpar) como:

$$P(A) = \sum_{i \subset A} P_i$$

onde a somatória é sobre os eventos i contidos (ou pertencentes) a A.

- Exercício: Supor o experimento no qual se retirará uma carta de um baralho (que possui 52 cartas no total):

a) Qual é o número de resultados possíveis (eventos) desse experimento?

b) Qual é a probabilidade de cada um destes eventos ocorrer, considerando uma condição de equiprobabilidade?

c) Represente este experimento em um espaço amostral.

d) Indique no espaço amostral os eventos compostos ***A***, ***B*** e ***C***, sendo que eles representam as seguintes situações:

(***A***): representa o naipe de copas;

(***B***): representa as cartas com o número 3;

(***C***): representa os áses vermelhos.

e) Calcule a probabilidade destes eventos compostos ocorrerem.

- Respostas

a) O número de resultados possíveis é 52. (i = 1, 2, 3, 4, 5, ..., 52)

b) $P_i = 1/52 \approx 0{,}0192$; ou 1,92%

c) e d) Representação segue na figura 3.

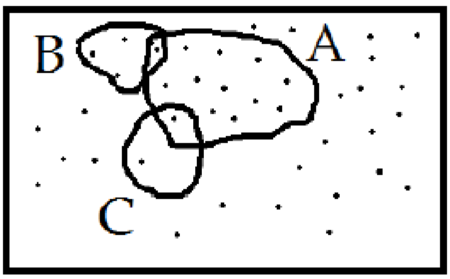


*Figura 3: Representação gráfica dos eventos compostos **A**, **B** e **C***

e)
$$P(A) = \sum_{i \subset A} P_i \Rightarrow P(A) = \tfrac{13}{52} = \tfrac{1}{4} = 0,25 \text{ ou } 25\%$$
$$P(B) = \sum_{i \subset B} P_i \Rightarrow P(B) = \tfrac{4}{52} = \tfrac{1}{13}$$
$$P(C) = \sum_{i \subset C} P_i \Rightarrow P(C) = \tfrac{2}{52} = \tfrac{1}{26}$$

- *Observe*:quando dois conjuntos (de eventos) do espaço amostral (dois eventos compostos) não possuem pontos em comum, eles são denominados "*disjuntos*". No espaço amostral do exercício anterior, apenas os eventos compostos ***B*** e ***C*** são disjuntos.
- Ainda na situação do exercício anterior: qual seria a probabilidade da carta tirada pertencer aos eventos compostos ***B*** ou ***C*** (carta tirada ser um ***ás vermelho*** ou um ***3***)?
- Podemos pensar que temos agora um evento composto ***D*** que será a soma (união) dos eventos ***B*** e ***C***.
- De forma que:

$$P(\boldsymbol{D}) = P(\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = P(\boldsymbol{B}) + P(\boldsymbol{C})$$

- Note, porém, que a equação acima só vale se os eventos compostos ***B*** e ***C*** forem disjuntos
- Na união de dois eventos compostos que não forem disjuntos (***A*** e ***B*** no exercício anterior, por exemplo), então no cálculo da probabilidade P (***A***∪***B***) deve-se perceber que os evento s(pontos) em comum não podem ser computados em duplicata (duas vezes)!
- O procedimento a ser seguido é retirar da soma (união) das probabilidades de ***A*** e ***B*** os p ontos resultantes da intersecção entre ***A*** e ***B*** (***A*** ∩ ***B***), ou seja:

$$P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{A}) + P(\boldsymbol{B}) - P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \quad (4)$$

- Note que se ***A*** e ***B*** fossem disjuntos, então P (***A*** ∩ ***B***) = 0 e cairíamos na situação anterior.

- Propriedades a serem sempre lembradas:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cap A = A$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $(A \cap B) \cup A = A \cap (A \cup B) = A$