Eletromagnetismo I – Instituto de Física - USP: *2ª Aula*

Prof. Alvaro Vannucci

Elétrostática

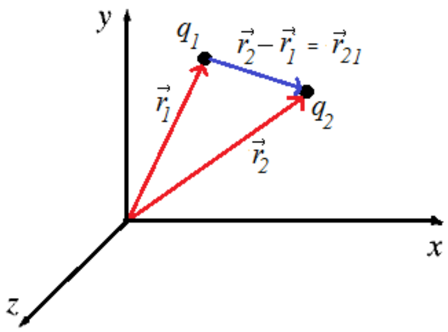
- Primeiras evidências de eletrização (Tales de Mileto, Grécia *séc. VI AC*): quando âmbar (*electron*, em grego) era atritado em lã de carneiro, pedacinhos de palha eram atraídos.

  (ver experiências canudo, pêndulo, eletroscópio de cartolina)

- A primeira tentativa séria de explicação do fenômeno ocorre apenas com Benjamin Franklin (1749) com a teoria de falta/excesso de "*fluído elétrico*" nos corpos.

- Importância desta explicação: Não haveria a criação/destruição de cargas elétricas no atrito, de forma que a carga total nos dois corpos seria sempre a mesma.

- Com a formulação do modelo atômico atual, estruturada no final do sec. XIX, início do sec. XX, a eletrização decorre da transferência de elétrons de um corpo a outro.



- *Lei de Coulomb*: Ao final do sec. XVIII, técnicas experimentais mais desenvolvidas permitiram a medida de força entre corpos eletricamente carregados:

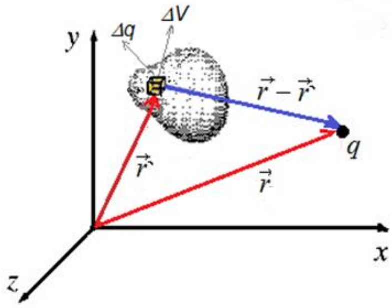
(versor na direção de $\vec{r}_{21}$)

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\, q_1}{\|r_2 - r_1\|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\, q_1}{\|r_2 - r_1\|^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

- Havendo *N* cargas próximas, a força sobre a carga q_i será:

$$\boxed{\vec{F}_i = q_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^{\,3}}} \quad ; \quad \begin{cases} \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \\ \dfrac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \equiv versores\ \ correspondentes \end{cases}$$

- Muitas vezes estaremos interessados na interação de uma carga pontual com uma distribuição macroscópica de cargas.



- Nestas situações, para resolver o problema, procuramos dividir a carga total Q da distribuição em pequenos volumes ΔV, cada um com carga Δq.

- Definimos então a "*densidade volumétrica de cargas*" ρ:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad \Rightarrow \quad dq = \rho dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \int dq = \int \rho dV}$$

- Desta forma, a força sobre uma "*carga de prova*" q será:

$$\vec{F}_q(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{\left\|\vec{r} - \vec{r}'\right\|^3} (\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left\|\vec{r} - \vec{r}'\right\|^3} \rho(\vec{r}') dV'$$

Atenção: Neste curso estaremos sempre associando o <u>símbolo linha</u> ($\vec{r}\,'$) às fontes de carga (e corrente)

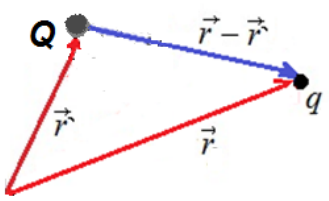
- Agora, para distribuições de cargas lineares/superficiais: $\begin{cases} \lambda = dq/dl \\ \sigma = dq/ds \end{cases}$

O Campo Elétrico $\vec{E}$

- ***Campo***: conceito do séc. XIX que invoca as "propriedades" dos pontos do espaço próximos de uma carga (ou massa), de forma que quando uma carga (massa) é posicionada em um desses pontos, uma <u>força</u> age sobre ela.

- Este processo certamente envolve a "atuação à distância" entre cargas (massas).

- Então, se uma carga de prova ***q*** é posicionada em uma região onde há campo $\vec{E}$ (criado por uma outra carga ***Q***), a força que age sobre ela será:



$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}} \; ; \quad \boxed{\vec{E}_{\substack{carga \\ pontual}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3}}$$

- Se ***Q*** corresponder a uma distribuição volumétrica de cargas, então o campo resultante será a soma dos campos devido a cada elemento de carga $dq = \rho \, dV$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}' \right\|^3} \rho(\vec{r}') dV'}$$

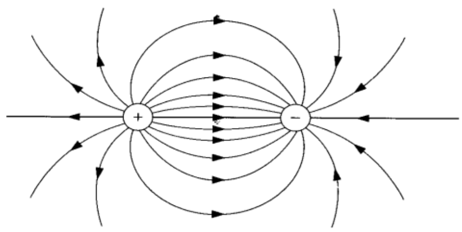
- Geralmente se considera o campo elétrico como sendo “indissociável” da carga que o gera, sendo impossível separar um do outro.

- Seria como considerar dois aspectos distintos de um mesmo ente físico.

- Assim, o campo $\vec{E}$ de uma carga seria “eterno”; não é algo que “sai” da carga continuamente, ou seja, ele “não gasta”.

- A representação geométrica de $\vec{E}$ pode ser feita através de um conjunto de ***linhas de força***.

(ver experiência do ímã+limalha de ferro)



- Sendo que:

  i) A tangente à linha de força, em um dado ponto, fornece a direção de $\vec{E}$ naquele ponto

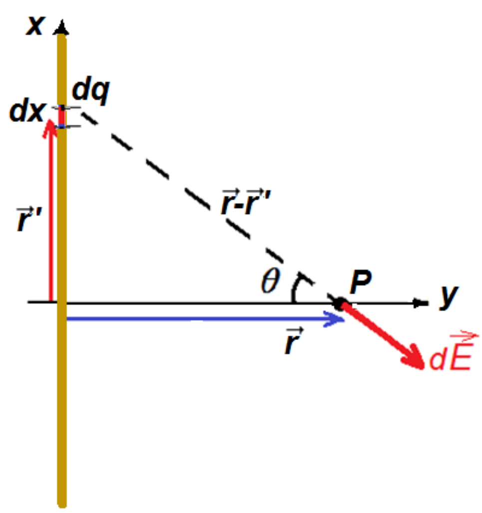
  ii) O módulo de $\vec{E}$ é proporcional à densidade de linhas (linhas/m^3) em torno daquele ponto.

- Cálculo do $\vec{E}_{total}$ em um ponto P devido a várias cargas pontuais:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N = \sum_{n=1}^{N} \vec{E}_n$$

- Na situação em que temos uma distribuição contínua de cargas, como em uma linha com densidade λ constante (ver figura):

- Vamos calcular o campo elétrico resultante, e depois a força: $\vec{F} = q\vec{E}$



- Tomando um elemento de carga dq: $d\vec{E} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$

- Sendo que:

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = x\,\hat{i} \\ \qquad\qquad \searrow \; \vec{r} - \vec{r}\,' = y\,\hat{j} - x\,\hat{i} \\ \vec{r} = y\,\hat{j} \; \nearrow \\ \left| \vec{r} - \vec{r} \right| = (x^2 + y^2)^{1/2} \\ dq = \lambda\, dx \end{cases}$$

- Portanto: $d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{y\,\hat{j} - x\,\hat{i}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \lambda\, dx \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow \;\; \vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \hat{i} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \hat{j} \right]$$

- Se não notamos que a 1º integral é nula, por simetria, teremos que resolvê-la:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = (\text{fazendo } x^2 + \text{y}^2 = \xi \; \rightarrow \; \frac{d\xi}{dx} = 2\text{x} \; \rightarrow \; x\,dx = \frac{1}{2} d\xi) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{l.i.} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \right) \Bigg|_{l.i.} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \;\; \textit{(como tínhamos antecipado!)}$$

- Resolvendo a integral em $\hat{j}$: $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ydx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cancel{y}dx}{y^{\cancel{3}\,2} \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right)^{3/2}}$

- Da figura, vemos que $\dfrac{x}{y} = tg\,\theta \;\; \rightarrow \;\; x = y\; tg\,\theta$ e $dx = y \sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \; I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cancel{y} \sec^2\theta d\theta}{y^{\cancel{3}\,2} \underbrace{(1 + tg^2\theta)}_{=\sec^2\theta}{}^{3/2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{y \sec^3\theta} = \frac{1}{y} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\sin\theta}{y} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{y}$$

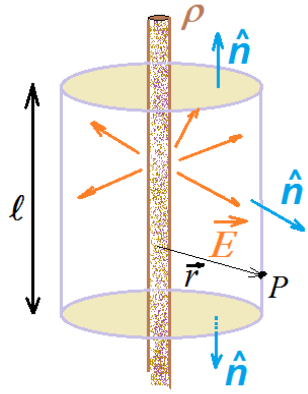
- Portanto:

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0} \right) \left(\frac{\cancel{2}}{y} \right) \hat{j} \;\; \rightarrow \;\; \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \hat{j} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \hat{e}_\rho} \; ; \; \text{finalmente: } \vec{F} = q\vec{E}$$

- Para outras geometrias, o cálculo das integrais é geralmente muito mais complicado ainda e, por vezes, impossível de ser realizado algebricamente!

- Porém, nesses casos onde se observa uma simetria geométrica, o cálculo de $\vec{E}$ pode ser muito simplificado se fizermos uso da ***lei de Gauss***:

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}; \quad q_{\text{int}} = \begin{cases} \int \rho' dV' \\ \int \sigma' dA' \\ \int \lambda' dl' \end{cases}$$



- A lei de Gauss vale sempre, mas ela é útil apenas quando o sistema apresenta uma simetria adequada.

- No exemplo anterior, pela simetria percebe-se que

$$\boxed{\vec{E} = E\,\hat{e}_\rho}$$

- Considerando uma *superfície gaussiana cilíndrica imaginária*, de altura ℓ e raio r

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \underbrace{\int_{\substack{\text{superf.}\\ \text{inferior}}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA}_{\text{fluxo}=0} + \underbrace{\int_{\substack{\text{superf.}\\ \text{superior}}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA}_{\text{fluxo}=0} + \int_{\text{lateral}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA =$$

$$= \int_{\text{lateral}} E\,dA = (E)(2\pi r)(\ell)\ ; \quad \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \int \frac{\lambda}{\varepsilon_0} d\ell' = \lambda \int \frac{1}{\varepsilon_0} d\ell' = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_r} \quad \textit{(cálculo muito mais simples)}$$

- Note que se utilizamos o Teorema do divergente: $\boxed{\oint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \int (\nabla\cdot\vec{F})\,dV}$

então, da lei de Gauss: $\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \int (\nabla\cdot\vec{E})\,dV = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$

comparando os integrandos: $\underbrace{\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}}_{\text{forma diferencial (puntual) da lei de Gauss}}$

- Na próxima aula veremos outro modo de se calcular $\vec{E}$, muito útil para ser aplicado em certos problemas, que faz uso do "*potencial elétrico*" (grandeza que não tem caráter vetorial).