Eletromagnetismo I (Curso do Bacharelado)

Instituto de Física – Universidade de São Paulo

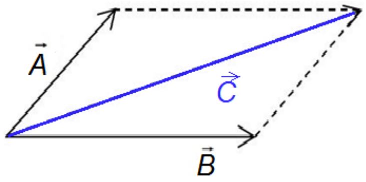
1ª Aula - *Prof. Alvaro Vannucci*

- Livros-Texto sugeridos para o curso: *Reitz-Milford* e *Griffiths*

- Vamos inicialmente relembrar alguns conceitos básicos de álgebra vetorial.

- Por exemplo, para efetuar uma *soma de vetores*:

- Se $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \\ C_z = A_z + B_z \end{cases}$



- *Subtração de vetores*: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

- *Produto de Vetores*:

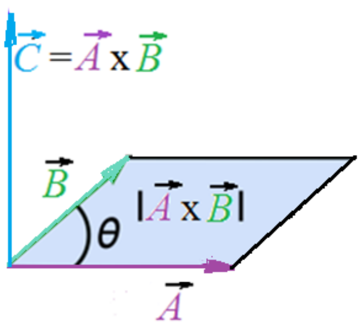
  1) Produto *Escalar* (resultado é um escalar):

  $$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

  2) Produto *Vetorial*:

  $$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \underbrace{(A_y B_z - A_z B_y)}_{=C_x}\hat{e}_x + \underbrace{(A_z B_x - A_x B_z)}_{=C_y}\hat{e}_y + \underbrace{(A_x B_y - A_y B_x)}_{=C_z}\hat{e}_z$$

  em *módulo*: $|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$



- Geometricamente: $|\vec{A} \times \vec{B}| \equiv$ *área do paralelogramo*

- Na figura note também o uso da *'regra da mão direita'* ou *'regra do parafuso'* para definir a direção e sentido de $\vec{C}$

- Lembrar, finalmente, que: $\begin{cases} \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \\ \vec{A} \times \vec{A} = 0 \end{cases}$

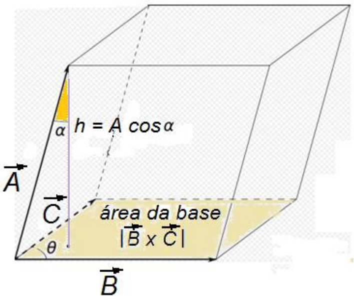
A combinação de operações envolvendo vetores resultam em *propriedades interessantes:*

Por ex.:

$$\vec{D} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})$$

(ver apêndice 1)

- Geometricamente: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) \equiv$ volume do paralelepípedo:



[(BAC)-(CAB)]

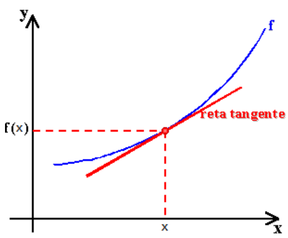
- Ex.: Mostre que: $\underline{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})}$; notando que $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ ***(ver apêndice 2)***

- Supor agora uma função f , que depende de apenas de uma variável (x) : $f = f(x)$

- O que significa calcularmos $\dfrac{df}{dx}$?

- Indica o quão rapidamente a função $f(x)$ varia ao variarmos x de uma quantidade dx muito pequena.

- Ao escrevermos $df = \dfrac{df}{dx}dx$ estamos então expressando que, variando x de dx, f varia de df ; sendo $\dfrac{df}{dx}$ o "*fator de proporcionalidade*".



- Geometricamente: $\dfrac{df}{dx} \equiv$ *coeficiente angular* da curva *f(x)*:

(Ver figura animada em: http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap09_Calc1.html)

- Por exemplo, tomando a <u>função temperatura</u> $T(x,y,z)$, se quisermos saber quão rapidamente T varia, ao variarmos qualquer uma de suas coordenadas espaciais:

$$dT=\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial y}dy+\frac{\partial T}{\partial z}dz=\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{e}_x+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{e}_y+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{e}_z\right)}_{\substack{\equiv \text{Gradiente de T } (\nabla T)\\ \text{(resulta em um vetor)}}}\cdot\underbrace{\left(dx\,\hat{e}_x+dy\,\hat{e}_y+dz\,\hat{e}_z\right)}_{\substack{=d\vec{r}\,\text{(deslocamento infinitesimal}\\ \text{no espaço 3D)}}}$$

ou seja: $dT=\nabla T\cdot d\vec{r}=|\nabla T|\,|d\vec{r}|\cos\theta$

- Daqui podemos inferir uma interpretação geométrica (física) para o ***gradiente***: $\frac{dT}{dr}=\nabla T\cos\theta \;\Rightarrow$ a condição de valor máximo para $\frac{dT}{dr}$ é quando $\cos\theta=1$

- Por ex. Suponha uma fonte de calor (ver figura). Partindo do ponto ***P*** podemos tentar alguns deslocamentos.

- Note que escolhendo a direção (∗∗), $\frac{dT}{dr}$ não varia tanto quanto se tivéssemos escolhido a direção (∗)

- Assim, a direção na qual a função temperatura varia mais rapidamente é na direção ***perpendicular*** às superfícies "*equi-temperaturas*"

- Resumindo: **O *gradiente* é uma operação (*operador*) que determina a *taxa de variação máxima de uma função escalar, em termos direcionais* (no espaço)**.

- Assim, quando $\nabla T=0$ em relação a um certo valor da função escalar (um certo ponto x_0, y_0, z_0 do espaço), então deslocamentos infinitesimais quaisquer realizados ao redor daquele ponto resulta em $\frac{dT}{dr}=0$; ou seja, trata-se de um ponto de máximo (ou de mínimo).

- Em ***coordenadas cartesianas***, o operador Nabla é dado por:

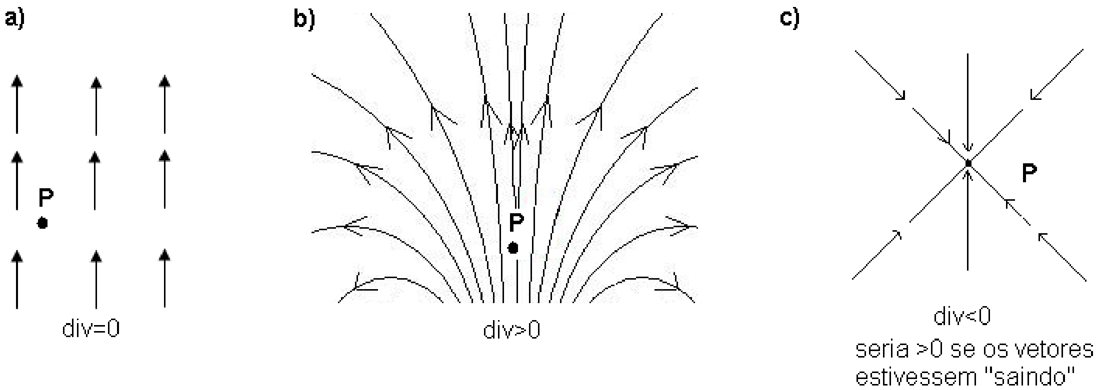
$$\boxed{\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}}$$

- Vejamos agora, o operador Nabla sendo aplicado em funções (ou grandezas) vetoriais:

1º) Operação Divergente: $\nabla\cdot\vec{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})$

$$\therefore\quad \boxed{\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

- *Interpretação geométrica*: Divergente de um campo vetorial indica o "quanto" ele se "espalha" (diverge) a partir de um dado ponto *P* no espaço.



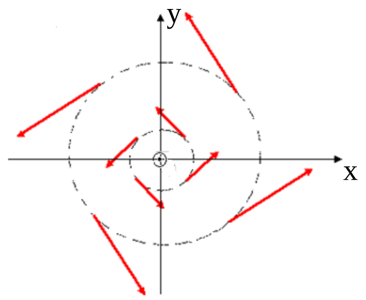
Observe que em módulo, o divergente no caso c) é maior que no caso (b), pois indica um "maior espalhamento"

2º) <u>Operação Rotacional</u>:

- Em coordenadas: cartesianas: $\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

- *Interpretação geométrica*: O rotacional de um campo vetorial mede o quanto ele *se curva* (*rotacional*) em torno de um dado ponto.

- Por exemplo, em *2D* o campo vetorial na figura ao lado tem um rotacional grande que, segundo a regra da mão direita, aponta para a direção e sentido do *versor* $\hat{z}$.



- Note que nas figuras ***(a)*** e ***(c)*** anteriores, os campos vetoriais correspondentes têm rotacional nulo!

- Algumas vezes, no estudo dos fenômenos físicos, nos defrontamos com situações nas quais o *operador nabla* (∇) é aplicado duas vezes.

i) $\nabla \cdot (\nabla T)$ resultando em um <u>vetor</u> (∇T é um escalar)

- Neste caso:

$$\nabla \cdot (\nabla T) = (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \cdot (\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}) =$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\hat{j} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\hat{k} \equiv \text{Laplaciano de T}$$

- Ou seja, o **Laplaciano** de um escalar resulta em um escalar.

ii) Laplaciano de um vetor:

$$\nabla^2\vec{v} = (\nabla\cdot\nabla)\vec{v} = \nabla^2 v_x\hat{i} + \nabla^2 v_y\hat{j} + \nabla^2 v_z\hat{k} \neq \underbrace{\nabla(\nabla\cdot\vec{v})}_{\text{Grad. do Div}}$$

- Ex.: Demonstre as relações: $\begin{cases} i)\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0 \\ ii)\nabla\times(\nabla T) = 0 \\ iii)\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla^2\vec{v} \end{cases}$

Cálculo integral

- Teorema fundamental:

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx}\right) dx = f(b) - f(a)$$

ou seja, a integral da derivada de uma função fornece a diferença de valores que a função assume nas extremidades do intervalo considerado.

- Agora, a integral ${}_C\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ corresponde a uma *integral de linha*, sendo C a curva ao longo da qual a integração é realizada e $d\vec{\ell}$ corresponde a um deslocamento infinitesimal efetuado ao longo de C.

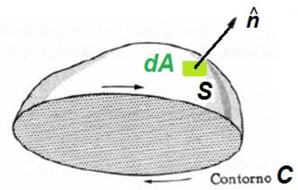
- No geral, a integral de linha depende não apenas dos pontos a e b que definem o intervalo de integração, como também da curva C (caminho) que estará sendo considerado.

- Quando o ***campo vetorial*** for **conservativo**, a integral ***não depende da trajetória*** e, neste caso, um percurso mais adequado (alternativo) pode ser escolhido.

- Na situação em que a integral é realizada em um percurso fechado:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^a \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

- Por outro lado, a integral $\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\ dA$ corresponde a uma ***integral de superfície***, e sempre irá representar *cálculo de fluxo* das "linhas do campo vetorial" através da superfície considerada.



- Observando a figura ao lado, temos a área S sobre a qual efetua-se a integração, dA uma área infinitesimal de S e $\hat{n}$ o versor normal a dA, direcionado *para fora* da superfície (por convenção).

- Notar sempre que, se a superfície S não for fechada, ela terá um contorno C.

- ***Teorema de Stokes:*** relaciona as integrais de superfície (aberta) e a de seu respectivo contorno:

$$\boxed{\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dA = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}$$

- Igualmente, para superfícies fechadas, um volume é consequentemente definido e o ***Teorema do Divergente*** é que relaciona as integrais respectivas:

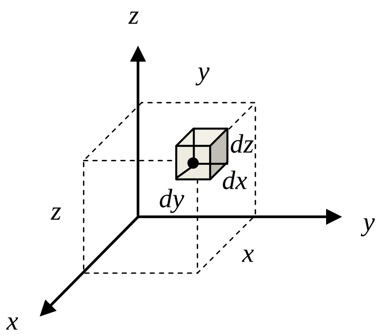
$$\boxed{\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dV = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\; dA}$$

fluxo através de uma superfície fechada

Cálculo dos ***Elementos de Volume*** nos diferentes sistemas de coordenadas

- Observe que estaremos incrementando cada uma das variáveis pertinentes para realizar o cálculo do volume:

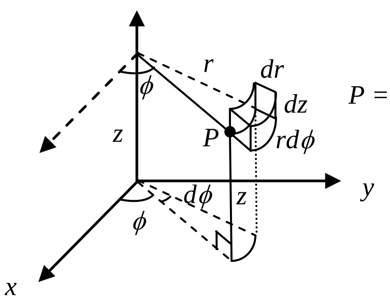
(I) ***coordenadas cartesianas****:(incrementando x,y,z teremos dx,dy,dz)*



$\boxed{dV = dx\, dy\, dz}$; obtido incrementando cada coordenada do sistema e multiplicando-as.

(II) ***coordenadas cilíndricas*** com versores $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$: *incrementando r, ϕ e z teremos (dr, r$d\phi$ e dz)*

Assim o elemento de Volume em ***coordenadas cilíndricas***: será:



$P = P(r,\phi,z)$

$$\boxed{dV = r dr\, d\phi\, dz}$$

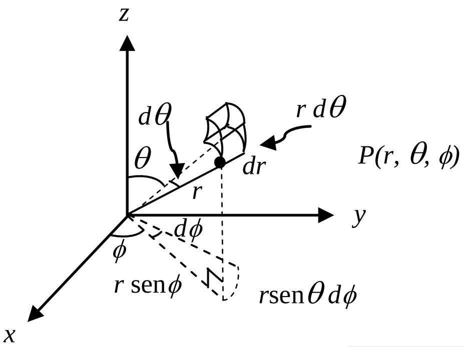
$(0 \le \phi \le 2\pi)$

- As coordenadas cilíndricas, em termos das cartesianas, são escritas como:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$$

- Onde também: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $tg\,\phi = \dfrac{y}{x}$

(III) **coordenadas esféricas** com versores $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$: *incrementando r, θ e ϕ teremos* (dr, $r\,d\theta$ e $r\,sen\theta\,d\phi$)



$$\therefore\; dV = (dr)(rd\theta)(r\sin\theta\,d\phi) =$$

$$= r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\;d\phi$$

Ou seja: $\boxed{dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi}$; $\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$

- Em função das coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = r\,sin\theta\cos\phi \\ y = r\,sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi = arctg\,({}^{y}\!/\!{}_{x}) \\ \theta = \arccos\,({}^{z}\!/\!{}_{r}) \end{cases}$$

- Onde também: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Apêndice 1

$$(A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z).[(B_yC_z - B_zC_y)\hat{e}_x + (B_zC_x - B_xC_z)\hat{e}_y + (B_xC_y - B_yC_x)\hat{e}_z]$$

$$= (A_xB_yC_z - A_xB_zC_y) + (A_yB_zC_x - A_yB_xC_z) + (A_zB_xC_y - A_zB_yC_x) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Apêndice 2

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}\times\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=\vec{A}\times\left[(B_yC_z-B_zC_y)\,\hat{e}_x+(B_zC_x-B_xC_z)\,\hat{e}_y+(B_xC_y-B_yC_x)\,\hat{e}_z\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ (B_yC_z-B_zC_y) & (B_zC_x-B_xC_z) & (B_xC_y-B_yC_x)\end{vmatrix}=$$

$$=[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)]\,\hat{e}_x+[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)]\,\hat{e}_y+$$

$+[A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)]\,\hat{e}_z=$ (faço para $\hat{e}_x$; as outras parcelas segue o mesmo) =

$$=(A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z)\,\hat{e}_x+\ldots$$

- Então: $\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{B}(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-\vec{C}(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)=$

$=$ (para $\hat{e}_x$ apenas) $=\cancel{B_xA_xC_x}+B_xA_yC_y+B_xA_zC_z-\cancel{C_xA_xB_x}-C_xA_yB_y-C_xA_zB_z+\ldots=$

$$=B_xA_xC_x+B_xA_yC_y+B_xA_zC_z-C_xA_xB_x-C_xA_yB_y-C_xA_zB_z+\ldots$$