

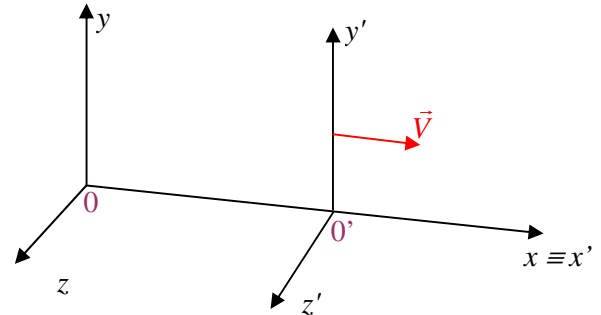
Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

25ª aula – 19jun/2007

- Vimos: Para passar as equações de Maxwell de um referencial inercial a outro:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma V/c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma V & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{pmatrix}$$



Então:

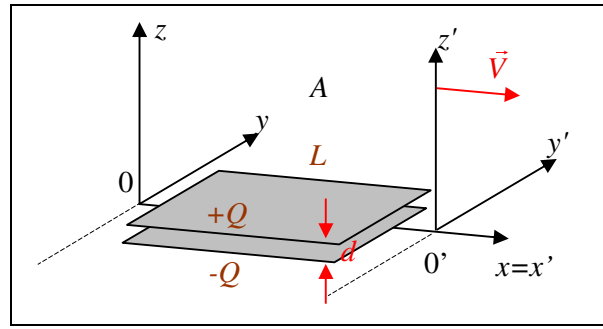
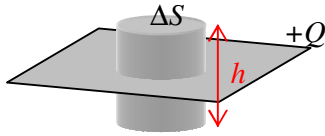
$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma E_y - \gamma V B_z \\ B'_y = \gamma B_y + \frac{\gamma V}{c^2} E_z \\ E'_z = \gamma E_z + \gamma V B_y \\ B'_z = \gamma B_z - \frac{\gamma V}{c^2} E_y \end{cases} ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

- Observamos ainda que as componentes dos campos na direção do movimento (E_x e B_x) são invariantes (as mesmas para O e O').
- Ou seja, as diferenças entre \vec{E} e \vec{B} , quando medidos de diferentes referenciais inerciais, envolvem somente as Componentes Perpendiculares ao movimento.
- Desta forma, escrevendo $\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp}$ e $\vec{B} = \vec{B}_{||} + \vec{B}_{\perp}$ em relação à direção de movimento, as equações acima podem ser representadas:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||} \\ \vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{E}'_{\perp} = \gamma [\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \times \vec{B}] \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma [\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E}] \end{cases}$$

- Outro problema interessante é o de um capacitor de placas //s muito grandes, de lados L , distanciadas de d , com carga Q .
- A pergunta é: como O e O' medem os campos \vec{E} e \vec{B} no interior do capacitor?

- Para 0, é simples: $\vec{B} = 0$ e \vec{E} é obtido a partir da *Lei de Gauss*, desprezando-se efeitos de borda:



$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow (\text{por simetria, } \vec{E} \text{ fora das placas} = 0) \Rightarrow (E)(\Delta S) = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{e}_z)$$

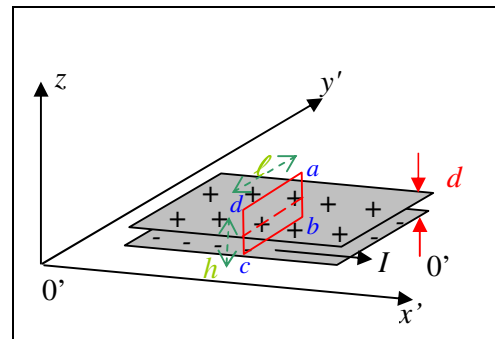
- Para 0', como as placas se movem \Rightarrow lado correspondente à direção do movimento (eixo x) sofre contração $\Rightarrow A' = (L) \left(\frac{L}{\gamma} \right) = L^2 / \gamma$.

- 0', aplicando *Lei de Gauss*: $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$; $\sigma' = \frac{Q}{A'} = \frac{Q}{L^2} \gamma \Rightarrow \sigma' = \gamma \sigma > \sigma \therefore E' > E$

- Ou seja, $\vec{E}' = \frac{\gamma \sigma}{\epsilon_0} (-\hat{e}_z) \Rightarrow \vec{E}' = -\frac{\gamma Q}{\epsilon_0 L^2} \hat{e}_z$ Sendo $E' > E$, e havendo B' , então há mais energia? cuidado! u aumenta, mas veja que o volume diminui!

- Agora, as cargas movimentando-se para 0' \Rightarrow um campo magnético também será medido!
- Na verdade, haverá duas correntes, uma de cargas (+) associadas à placa superior e outra devido às cargas (-) da placa inferior.

- Como corrente \equiv movimento de cargas (+), por convenção, \Rightarrow na placa inferior temos corrente no sentido oposto à da placa superior!
- Então, desprezando-se os efeitos de borda, temos que o campo magnético anula-se fora do capacitor.



- Aplicando a *Lei de Ampère-Maxwell* no circuito assinalado:

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' = \mu_0 I'_{\text{int}} + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{d}{dt'} (\vec{E}' \cdot \hat{n} dA')$$

$= 0$, pois \vec{E}' não varia com t

$$\therefore \oint \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' = \int_a^b \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' + \int_b^c \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' + \int_c^d \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' + \int_d^a \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' = B' \ell' = B' \ell$$

(pois, $h \rightarrow 0$) $\vec{B}'_{\text{fora}} = 0$ (pois, $h \rightarrow 0$)

segmento ab é \perp à direção de movimento.

- Agora, 0' mede uma densidade superficial de corrente ($I'_{\text{ent.}}$) na placa superior dada por:

$$\vec{K}' = \vec{K}'(-\hat{e}_x), \text{ sendo que } K' = \sigma' v'; v = V \equiv \text{velocidade das cargas.}$$

- De forma que: $I'_{\text{int}} = K' \ell'$

na região entre as placas

- Assim: $B'_{\parallel} = \mu_0 K'_{\parallel} l' = -\mu_0 \sigma' V l' \Rightarrow \bar{B}' = -\mu_0 \frac{\gamma Q}{L^2} V \hat{e}_y$
- Utilizando as equações de transformação dos campos, estes resultados podem ser obtidos muito mais facilmente:

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{E}_{\parallel} + \bar{E}_{\perp} = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(-\hat{e}_z) \\ \bar{B} = \bar{B}_{\parallel} + \bar{B}_{\perp} = 0 \end{cases}$$

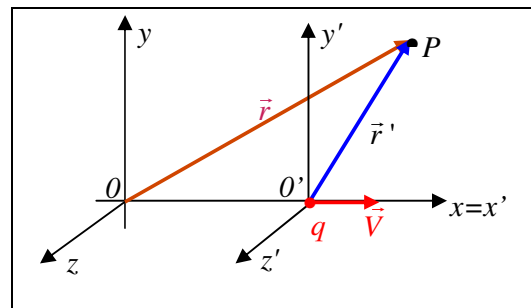
- Então: $\begin{cases} \bar{E}'_{\parallel} = \bar{E}_{\parallel} = 0 \\ \bar{E}'_{\perp} = \gamma \left[\bar{E}_{\perp} + \vec{V} \times \bar{B} \right] = \gamma \bar{E}_{\perp} = \gamma \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{e}_z) \Rightarrow \bar{E}' = \frac{-\gamma Q}{\epsilon_0 L^2} \hat{e}_z \end{cases}$

$$\text{e: } \begin{cases} \bar{B}'_{\parallel} = \bar{B}_{\parallel} = 0 \\ \bar{B}'_{\perp} = \gamma \left[\bar{B}_{\perp} - \frac{\vec{V}}{c^2} \times \bar{E} \right] \end{cases}; \text{ sendo que } \vec{V} \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma/\epsilon_0 \end{vmatrix} = +\frac{\sigma V}{\epsilon_0} \hat{e}_y$$

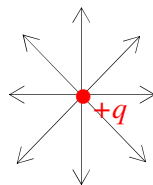
$$\therefore \bar{B}'_{\perp} = \left(-\frac{\gamma}{c^2}\right) \left(\frac{\sigma V}{\epsilon_0} \hat{e}_y\right) \Rightarrow \left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}\right) \Rightarrow \bar{B}' = -\mu_0 \frac{\sigma Q}{L^2} V \hat{e}_y$$

- Vamos estudar agora a configuração de campos relacionados com uma carga pontual q em movimento, com velocidade \vec{V} constante, no referencial de laboratório e também no referencial da carga.
- É fácil concluir que, no referencial da carga tem-se apenas o campo elétrico enquanto que no referencial do Laboratório, tem-se tanto campo elétrico como campo magnético.
- Supondo, novamente que as origens dos dois sistemas de coordenadas se cruzam em $t = t' = 0$, vamos escolher o eixo x do Laboratório direção da velocidade da carga.

- Além disso, vamos considerar a carga na origem O' , e vamos calcular os campos em pontos P próximos da carga.



- Note que P é localizado pelo vetor $\vec{r}(x, y, z)$ em relação a O e por $\vec{r}'(x', y', z')$ em relação a O' .
- Como para O' só há campo elétrico no ponto P, na direção radial:



$$\bar{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x'\hat{e}_x + y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

- Representando este campo em termos das componentes // e \perp à direção de movimento:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_{//} + \vec{E}'_{\perp}, \text{ sendo que } \begin{cases} \vec{E}'_{//} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'\hat{e}_y}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ \vec{E}'_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{cases}$$

- Quanto ao campo magnético: $\vec{B}' = 0 \Rightarrow \vec{B}'_{//} = \vec{B}'_{\perp} = 0$
- Agora, os campos \vec{E} e \vec{B} **no referencial de laboratório** podem ser obtidos das equações de transformação dos campos, das coordenadas linha para as sem linha.

$$\begin{cases} \vec{E}_{//} = \vec{E}'_{//} \\ \vec{B}_{//} = \vec{B}'_{//} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_{\perp} = \gamma[\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}'] \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma[\vec{B}'_{\perp} + \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E}'] \end{cases}$$

estas equações são obtidas da mesma maneira que as anteriores

- Assim: $\vec{E}_{\perp} = \gamma[\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}'^{\perp=0}] \Rightarrow \vec{E}_{\perp} = \gamma\vec{E}'_{\perp}$

- Então: $\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x'\hat{e}_y}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} + \gamma \frac{y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \right] \Rightarrow$

\Rightarrow Utilizando as equações de transformação de coordenadas de Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

para passar as coordenadas linha para as sem linha

- Temos, finalmente: $\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \left\{ \frac{(x - Vt)\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\}$

- Quanto ao campo magnético, ainda **no referencial do laboratório**:

$$\vec{B} = \vec{B}'_{//} + \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{B}'_{\perp}^{\perp=0} + \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E}' \right]; \text{ sendo } \vec{V} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ \vec{E}'_x & \vec{E}'_y & \vec{E}'_z \end{vmatrix} = -VE'_z \hat{e}_y + VE'_y \hat{e}_z$$

- Então: $\vec{B} = \frac{\gamma}{c^2} V \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-z'\hat{e}_y + y'\hat{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \right] \Rightarrow \vec{B} = \frac{\gamma V q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y\hat{e}_z - z\hat{e}_y}{[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$

- Destes resultados, nota-se que: $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} \times \vec{E}$, como já obtivemos antes, uma vez que:

$$\vec{V} \times \vec{E} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[\gamma^2(x-Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ (x-Vt) & y & z \end{vmatrix} = (\text{coef.}) [-Vz\hat{e}_y + Vy\hat{e}_z] \checkmark$$

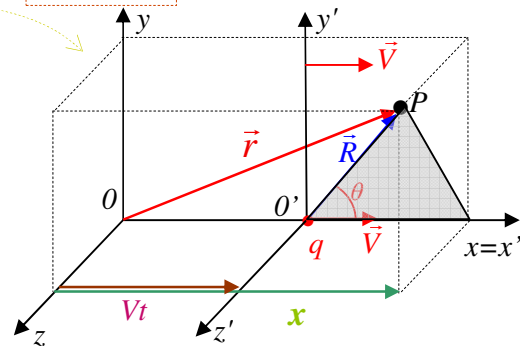
- Agora, considerando que o ponto P , **no referencial do laboratório**, tem coordenada $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, em relação à origem O , enquanto que, em relação a carga: $\vec{R} = R_x\hat{e}_x + R_y\hat{e}_y + R_z\hat{e}_z = (x-Vt)\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$

- Então:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{[\gamma^2(x-Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

- De forma que também para $t=0$, o campo \vec{E} será radial (ao redor da carga q).
- Definindo por θ o ângulo entre vetor \vec{R} e \vec{V} da carga, temos que a componente x de \vec{R} :

$$R_x = x - Vt = R \cos \theta$$



- Assim:
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{\vec{R}}{[\gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

- Por outro lado pode-se perceber também, da figura acima, que:

$$(R \sin \theta)^2 = y^2 + z^2$$

- De forma que o **denominador** da equação de \vec{E} :

$$\begin{aligned} \gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + y^2 + z^2 &= \gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = R^2 \gamma^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \theta \right) = \\ &= R^2 \gamma^2 \left(\cos^2 \theta + \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \right) = R^2 \gamma^2 \left(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1} - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

- Assim:
$$\vec{E} = \vec{E}(R, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{\vec{R}}{\left[R^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \right]^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cancel{\gamma} \frac{\vec{R}}{R^3 \gamma^{\cancel{3}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}$$

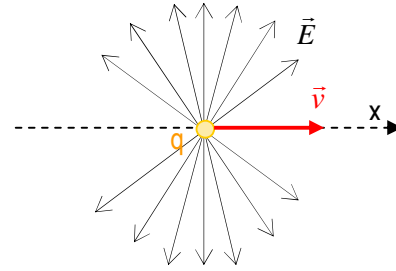
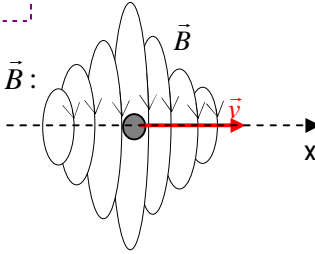
- Finalmente:
$$\vec{E}(R, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}} \frac{\vec{R}}{R}$$

- Este resultado é *o mesmo que o obtido anteriormente através dos potenciais de Lienard-Wiechert* para o caso de uma carga com \vec{V} cte!

- Só lembrando, devido à dependência de \vec{E} com θ :

- Também, como $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} \times \vec{E} \Rightarrow$

\Rightarrow configuração das linhas de \vec{B} :



- No problema dos dois “flashes” de luz, as equações das frentes de onda eram:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^3 x_j^2 - c^2 t^2 = 0 \\ \sum_{j=1}^3 x_j'^2 - c^2 t'^2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \text{agora, definindo: } x_4 = ict, \\ \text{podemos escrever:} \end{cases}$$

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^2 = 0 \text{ e, igualmente: } (x_4 = ict) \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^2 = 0$$

Marion explica que, para outros eventos, esta somatória pode ser $\neq 0$.

- De forma que: $\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x_{\mu}'^2$
- É comum usar índices gregos (nas somatórias) para descrever grandezas quadrimensionais e deixar índices latinos para as tridimensionais.
- Assim, F_i representa a componente i do Vetor \vec{F} (3 D) enquanto que $T_{\mu\nu} \equiv$ componente μ, ν do Tensor (4 D) correspondente.
- Em particular, no caso das transformações de coordenadas por Lorentz, podemos escrever:

$$x_{\mu} = \sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} x_{\nu}; \text{ sendo } \lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}; \beta = v/c$$

- Ou seja: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4 \Rightarrow x' = \gamma x + i\frac{V}{c}\gamma i ct \Rightarrow x' = \gamma(x - Vt) \\ x'_2 = x_2 \Rightarrow y' = y \\ x'_3 = x_3 \Rightarrow z' = z \\ x'_4 = -i\beta\gamma x_1 + \gamma x_4 \Rightarrow ct' = -\frac{V}{c}\gamma x + \gamma ct \Rightarrow t' = \gamma\left(t - x\frac{V}{c^2}\right) \end{cases} \quad \checkmark$$

- Note que a matriz acima se refere ao movimento relativo entre os dois sistemas de coordenadas, na direção do eixo x. Para outras direções, a matriz é diferente.
- Esta forma de expressar grandezas físicas facilita a álgebra dos problemas.
- Por exemplo, densidade de corrente (\vec{J}) e densidade de carga (ρ) são grandezas que certamente dependem do referencial inercial escolhido, com já discutimos.
- A equação de continuidade é que estabelece uma ligação entre estas duas grandezas:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

- Definindo-se o “**Quadrivetor**” “**densidade de corrente \mathbb{J}** ”:

$$\mathbb{J} = (\vec{J}, ic\rho) \Rightarrow \text{Equação de Continuidade: } \sum_{v=1}^4 \frac{\partial J_v}{\partial x_v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

ou então: $\square \cdot \mathbb{J} = 0$ → divergente quadrimensional ; $\square = \vec{\nabla} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$

- Agora, quanto aos potenciais \vec{A} e ϕ vemos que, aplicando o Gauge de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{cases} \quad \text{equações desacopladas!}$$

↳ vácuo

- Observe que, definindo-se o quadrivetor $A = (\vec{A}, i\phi/c)$, as componentes da 1^a e 2^a equação podem ser representadas compactamente:

$$\sum_v \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_v^2} = -\mu_0 J_\lambda \quad (\text{ver apêndice}) ; (\lambda = 4 \Rightarrow \text{equação em } \phi)$$

- Outra maneira de expressar isso: $\square^2 A = -\mu_0 \mathbb{J}$

- sendo $\square^2 = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv$ d'Alembertiano, como já vimos antes.

- Note que a própria “**Condição de Lorentz**” fica facilmente representada através deste procedimento:

$$\sum_v \frac{\partial \mathbb{A}_v}{\partial x_v} = 0, \text{ ou então: } \square \cdot \mathbb{A} = 0 \quad \begin{array}{c} \text{divergente} \\ \text{quadrimensional} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial (i\varphi/c)}{\partial (ict)} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

- Finalmente, podemos examinar as componentes do campo EM, a partir das equações:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}; \text{ sendo que } \left(\vec{A}, \frac{i\varphi}{c} \right) \text{ formam o } \textit{quadrivetor} \mathbb{A}.$$

- É fácil observar que as componentes dos campos \vec{E} e \vec{B} estão relacionadas com as componentes do quadrivetor \mathbb{A} da forma:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbb{A}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathbb{A}_\mu}{\partial x_\nu}, \text{ sendo que } \begin{cases} F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0 \\ F_{14} = -F_{41} = -iE_1c \\ F_{24} = -F_{42} = -iE_2c \\ F_{34} = -F_{43} = -iE_3c \\ F_{12} = -F_{21} = B_3 \\ F_{23} = -F_{32} = B_1 \\ F_{31} = -F_{13} = B_2 \end{cases}$$

- De tal forma que o “**Tensor Campo Eletromagnético**” adquiere forma:

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{-iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{-iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{-iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \textit{Tensor Anti-Simétrico} \rightarrow \text{componentes: } \begin{array}{l} t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu} \\ (\textit{tensor simétrico: } t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}) \end{array}$$

- Por exemplo:

$$F_{\mu\nu} = F_{41} = (\textit{ver tensor}) = \frac{iE_1}{c} = \frac{i}{c} E_x = \frac{\partial \mathbb{A}_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \mathbb{A}_4}{\partial x_1} = \frac{\partial A_x}{\partial (ict)} - \frac{\partial (i\varphi/c)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{i}{c} E_x = \frac{1}{i c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{i}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

- Outra componente (de \vec{B}):

$$F_{\mu\nu} = F_{23} = B_1 = B_x = \frac{\partial \mathbb{A}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbb{A}_2}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Rightarrow B_x = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x$$

- O mesmo para as outras componentes.

APÊNDICE

$$\sum_v \frac{\partial^2 \mathbb{A}_\lambda}{\partial x_v^2} = -\mu_0 \mathbb{J}_\lambda; \lambda = 1, \dots, 4 \rightarrow \begin{cases} A_x, A_y, A_z, i\varphi/c \\ J_x, J_y, J_z, ic\rho \end{cases}$$

Para $\lambda = 1$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial (ict)^2} = -\mu_0 J_x \Rightarrow \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x$$

Para $\lambda = 2$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial (ict)^2} = -\mu_0 J_x \Rightarrow \dots$$

⋮

Para $\lambda = 4$ \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 (i\varphi/c)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (i\varphi/c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (i\varphi/c)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (i\varphi/c)}{\partial (ict)^2} = -\mu_0 (ic\rho) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{i}{c} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \frac{i}{\underbrace{c^2}_{=-\frac{1}{c^3}}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = -ic\mu_0 \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}_{=\nabla^2 \varphi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\underbrace{\mu_0}_{=1/\epsilon_0} c^2 \rho$$

$$=\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$