



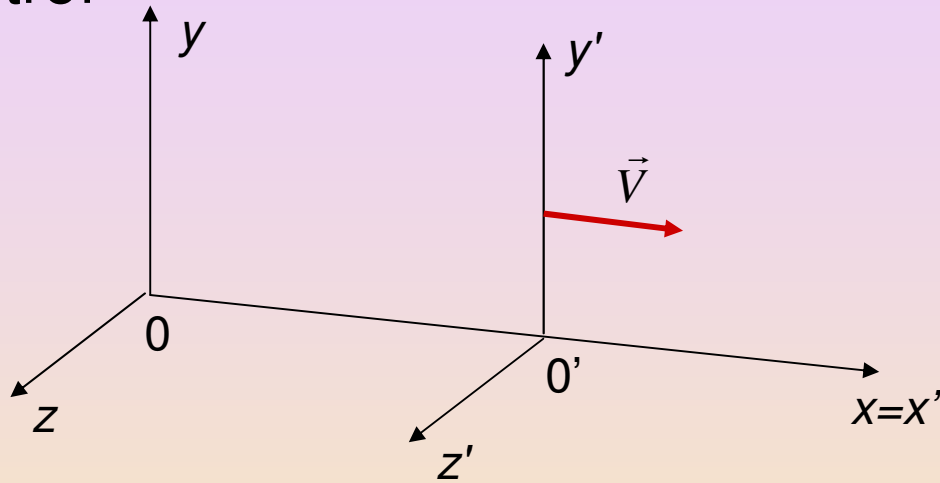
Eletromagnetismo II

25^a Aula

Professor Alvaro Vannucci

Vimos, na última aula ...

- Para passar equações de Maxwell de um referencial inercial a outro:



$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma V/c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma V & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x' \\ \partial/\partial y' \\ \partial/\partial z' \\ \partial/\partial t' \end{pmatrix}$$

Então:

$$E'_x = E_x$$

$$B'_x = B_x$$

$$E'_y = \gamma E_y - \gamma V B_z$$

$$B'_y = \gamma B_y + \frac{\gamma V}{c^2} E_z$$

$$E'_z = \gamma E_z + \gamma V B_y$$

$$B'_z = \gamma B_z - \frac{\gamma V}{c^2} E_y$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

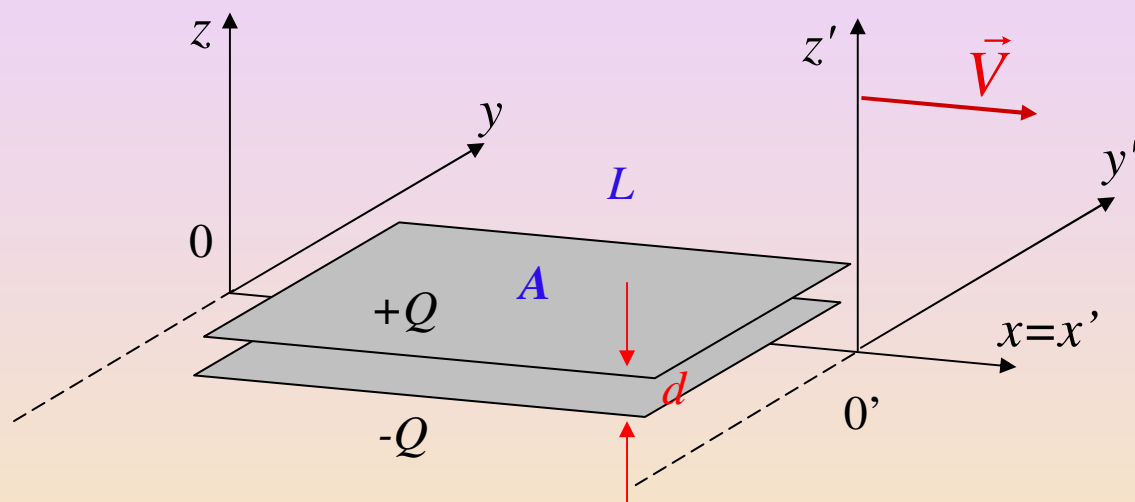
- Como as componentes dos campos na direção do movimento (E_x e B_x) são invariantes (as mesmas para 0 e $0'$) e diferenças entre \vec{E} e \vec{B} envolvem somente as componentes perpendiculares ao movimento.

- Então: $\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp}$ e $\vec{B} = \vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp}$; em relação à direção de movimento.

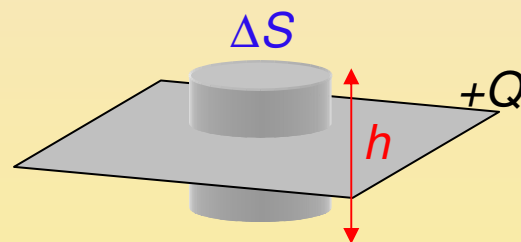
- Mostramos, finalmente, que as componentes dos campos podem ser representadas de uma forma mais compacta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} \\ \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \times \vec{B} \right] \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E} \right] \end{array} \right.$$

- Outro problema interessante é o de um capacitor de placas //'s muito grandes, de lados L , distanciadas de d , com carga Q .
- Como 0 e $0'$ vêem os campos \vec{E} e \vec{B} no interior do capacitor?



- Para 0 , é simples: $\vec{B} = 0$ e \vec{E} é obtido a partir da Lei de Gauss, desprezando-se efeitos de borda:



$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{por simetria, } \vec{E}_{\text{fora das placas}} = 0$$

$$\Rightarrow (E)(\cancel{\Delta S}) = \frac{\sigma \cancel{\Delta S}}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{e}_z)}$$

- Para O' , como as placas se movem \Rightarrow lado correspondente à direção do movimento (eixo x) sofre contração \Rightarrow

$$\Rightarrow A' = (L) \left(\frac{L}{\gamma} \right) = L^2 / \gamma$$

- Também, aplicando a *Lei de Gauss*:

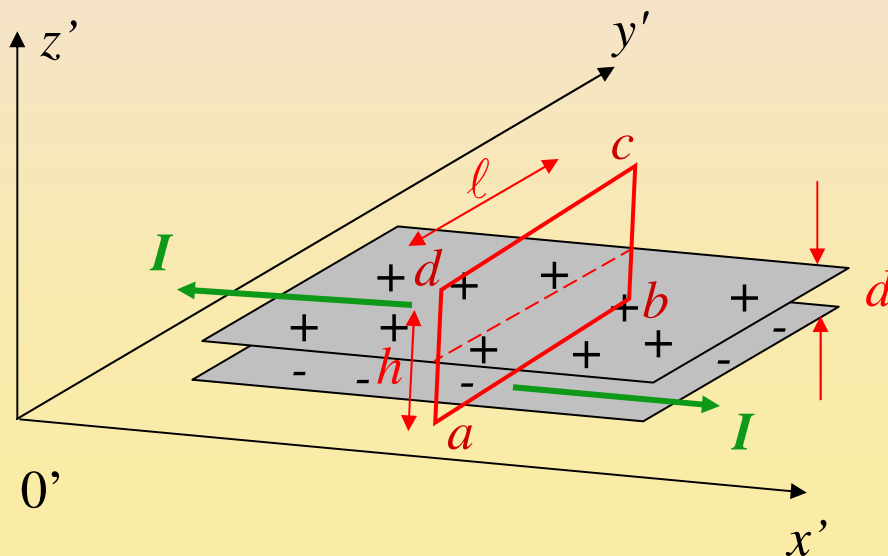
$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad ; \quad \sigma' = \frac{Q}{A'} = \frac{Q}{L^2} \gamma \Rightarrow \boxed{\sigma' = \gamma\sigma} > \sigma$$

- Ou seja, $\vec{E}' = \frac{\gamma\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{e}_z) \Rightarrow \boxed{\vec{E}' = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \frac{Q}{L^2} \hat{e}_z}$ $\left\{ \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{e}_z) \right\}$

pergunta:

sendo $E' > E$, e havendo B' , então O' mede mais energia? Cuidado! U aumenta, mas veja que o volume diminui!

- Agora, como para $0'$ as cargas estão se movimentando \Rightarrow um *campo magnético também será medido!*
- Na verdade, haverá duas correntes; uma de cargas (+) associadas à placa superior e outra devido às cargas (-) da placa inferior.
- Como corrente \equiv movimento de cargas + (por convenção) \Rightarrow na placa inferior a corrente flui no sentido oposto à da placa superior!
- Então, desprezando-se os efeitos de borda, temos que o campo magnético anula-se fora do capacitor.

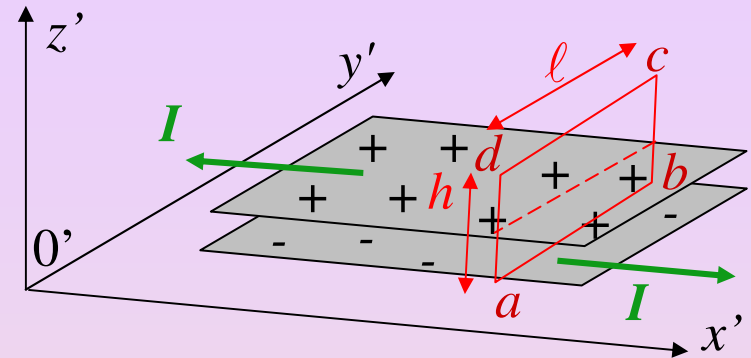


- Agora, aplicando a Lei de Ampère-Maxwell no circuito assinalado:

- Temos que:

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' = \mu_0 I'_{enl} + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{d}{dt'} (\vec{E}' \cdot \hat{n} dA')$$

= 0, pois \vec{E}' não varia com t



$$\therefore \oint \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' = \int_a^b \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' + \int_b^c \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' + \int_c^d \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' + \int_d^a \vec{B}' \cdot d\vec{\ell}' = B' \ell' = B' \ell$$

(pois, $h \rightarrow 0$) $\vec{B}'_{fora} = 0$ (pois, $h \rightarrow 0$)

note que segmento ab (ℓ) é \perp à direção de movimento

- Agora, quanto à I'_{enl} , $0'$ mede uma densidade superficial de corrente na placa superior:

$$\vec{K}' = K' (-\hat{e}_x), \text{ sendo que } K' = \sigma' v' ; v' = V \equiv \text{velocidade das cargas.}$$

- De forma que: $I'_{enl} = K' \ell' = \sigma' V \ell'$

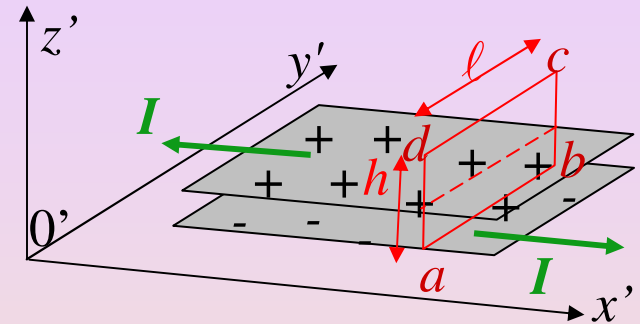
na região entre as placas

- Assim: $B' \ell' = \mu_0 K' \ell' = \mu_0 \sigma' V \ell' \Rightarrow$

$$\vec{B}' = -\mu_0 \frac{\gamma Q}{L^2} V \hat{e}_y$$

- Utilizando as equações de transformação dos campos, estes resultados podem ser obtidos muito mais facilmente:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp} = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) (-\hat{e}_z) \\ \vec{B} = \vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp} = 0 \end{cases}$$



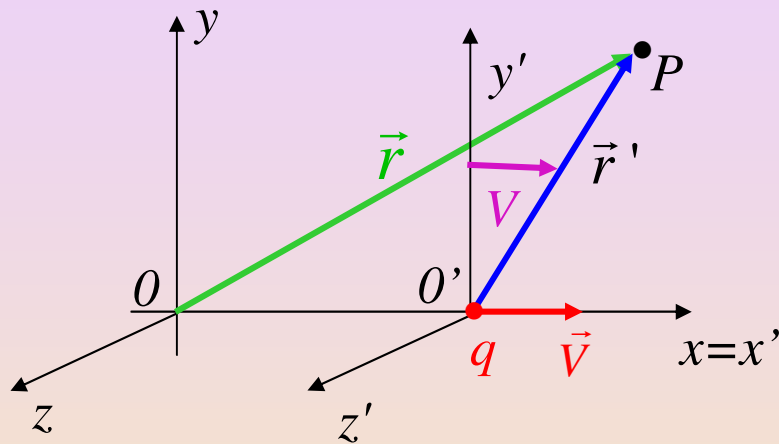
- Então:
$$\begin{cases} \vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} = 0 \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \times \vec{B} \right] = \gamma \vec{E}_{\perp} = \gamma \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\hat{e}_z) \Rightarrow \vec{E}' = \frac{-\gamma Q}{\epsilon_0 L^2} \hat{e}_z \end{cases}$$

e
$$\begin{cases} \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//} = 0 \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E} \right] \end{cases}; \text{ sendo que } \vec{V} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma/\epsilon_0 \end{vmatrix} = \frac{+\sigma V}{\epsilon_0} \hat{e}_y$$

$$\therefore \vec{B}'_{\perp} = \left(-\frac{\gamma}{c^2} \right) \left(\frac{\sigma V}{\epsilon_0} \hat{e}_y \right) \Rightarrow \left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \right) \Rightarrow \vec{B} = -\mu_0 \frac{\gamma Q}{L^2} V \hat{e}_y$$

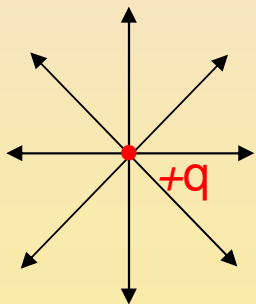
- Vamos supor agora, no referencial do laboratório, uma carga q que se encontra em movimento com uma velocidade \vec{v} constante.
- No referencial de repouso da partícula há, evidentemente, um campo eletrostático com as características descritas pela lei de Coulomb.
- No referencial do laboratório, além de \vec{E} há também um campo \vec{B} associado à carga em movimento.
- Nossa intenção, agora, é analisar a configuração de campos associados a esta carga em movimento, no referencial do laboratório.
- Novamente estaremos supondo que a origem dos sistemas de coordenadas se cruza em $t = t' = 0$ e vamos escolher eixo x do laboratório \equiv a direção da velocidade da carga.

- Vamos considerar que a carga pontual em repouso no ref. O' , e *calcular os campos* em um ponto P qualquer, próximo de q .



- Sendo P localizado pelo vetor em $\vec{r}(x, y, z)$, relação a O e por $\vec{r}'(x', y', z')$, em relação a O' .

- Para O' , no ponto P só há campo eletrostático, na direção radial.



$$\therefore \vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x'\hat{e}_x + y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

- Representando este campo em termos das componentes // e ⊥ à direção de movimento:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_{//} + \vec{E}'_{\perp}, \text{ sendo que } \begin{cases} \vec{E}'_{//} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'\hat{e}_y}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ \vec{E}'_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \end{cases}$$

- Quanto ao campo magnético:

$$\vec{B}' = 0 \Rightarrow \vec{B}'_{//} = \vec{B}'_{\perp} = 0$$

- Agora, para obtermos os campos \vec{E} e \vec{B} no referencial do laboratório, vamos utilizar as Equações de Transformação das coordenadas linha para as sem linha.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{//} = \vec{E}'_{//} \\ \vec{B}_{//} = \vec{B}'_{//} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\perp} = \gamma \left[\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}' \right] \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \left[\vec{B}'_{\perp} + \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E}' \right] \end{array} \right.$$

(a dedução destas equações se faz da mesma maneira que anteriormente)

• Assim: $\vec{E}_{\perp} = \gamma \left[\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}' \right] \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}}$

• Portanto: $\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x' \hat{e}_x}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} + \gamma \frac{y' \hat{e}_y + z' \hat{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \right]$

• Utilizando as equações de Transformação de Coordenadas de Lorentz:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right.$$

- Então:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \left\{ \frac{(x-Vt)\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{\left[\gamma^2 (x-Vt)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

- Quanto ao campo magnético, no Referencial de Laboratório:

$$\vec{B} = \cancel{\vec{B}'_{\parallel}} + \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left[\cancel{\vec{B}'_{\perp}} + \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E}' \right]; \vec{V} \times \vec{E}' = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ E'_x & E'_y & E'_z \end{vmatrix} = -VE'_z \hat{e}_y + VE'_y \hat{e}_z$$

- Então:

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{c^2} V \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-z' \hat{e}_y + y' \hat{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \right] \Rightarrow \vec{B} = \frac{\gamma V q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y \hat{e}_z - z \hat{e}_y}{\left[\gamma^2 (x-Vt)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

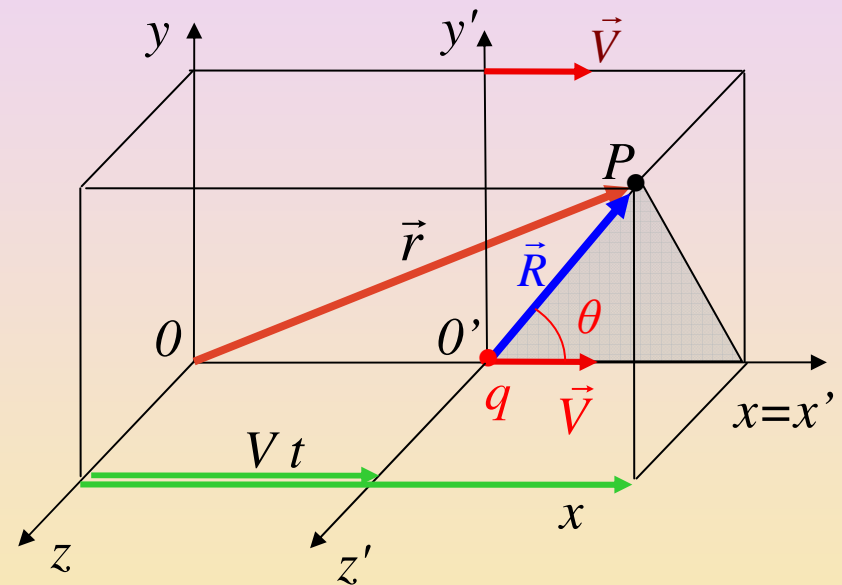
- Destes resultados, temos que: $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} \times \vec{E}$

- Observe agora, que o ponto P , no referencial do laboratório, é localizado pelo vetor $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, em relação à origem O , enquanto que, em relação a carga:

$$\vec{R} = R_x\hat{e}_x + R_y\hat{e}_y + R_z\hat{e}_z = (x - Vt)\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

- Então:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \left\{ \frac{(x - Vt)\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{\left[\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right\}$$



$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{\left[\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

de forma que também para O , o campo \vec{E} será radial (ao redor da carga q).

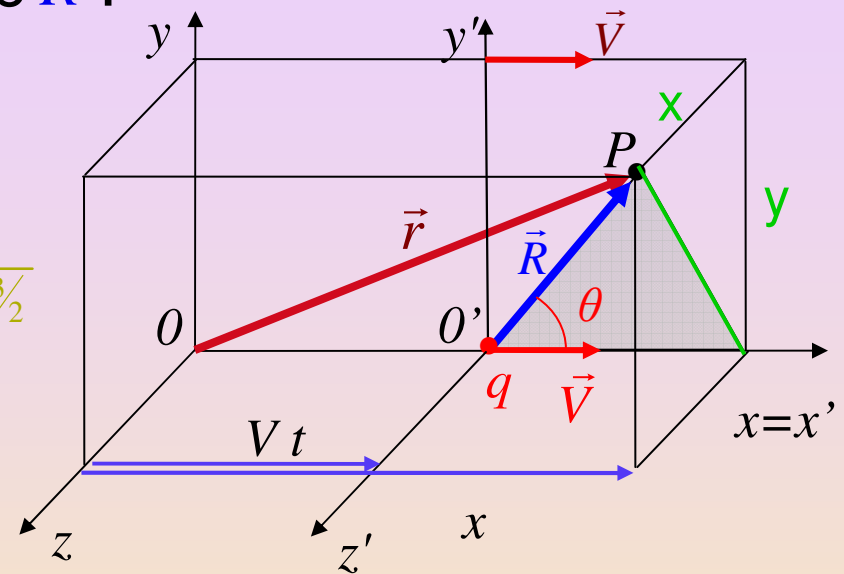
- Agora, definindo-se por θ o ângulo entre os vetores \vec{R} e \vec{V} da carga, temos que a componente x de \vec{R} :

$$R_x = x - Vt = R \cos \theta$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{\left[\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$

- Então:

$$\vec{E} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{\left[\gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + y^2 + z^2 \right]^{3/2}}$$



- Por outro lado pode-se perceber também, da figura acima, que:

$$(R \sin \theta)^2 = y^2 + z^2$$

- De forma que o denominador da equação de \vec{E}

$$\gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + y^2 + z^2 = \gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta =$$

$$\begin{aligned}
 &= R^2 \gamma^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \theta \right) = R^2 \gamma^2 \left(\cos^2 \theta + \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \right) = \\
 &= R^2 \gamma^2 \left(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1} - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)
 \end{aligned}$$

• Assim:

$$\vec{E} = \vec{E}(R, \theta) = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{\left[R^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right) \right]^{3/2}} = \frac{\cancel{\gamma} q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3 \gamma^{\cancel{2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}$$

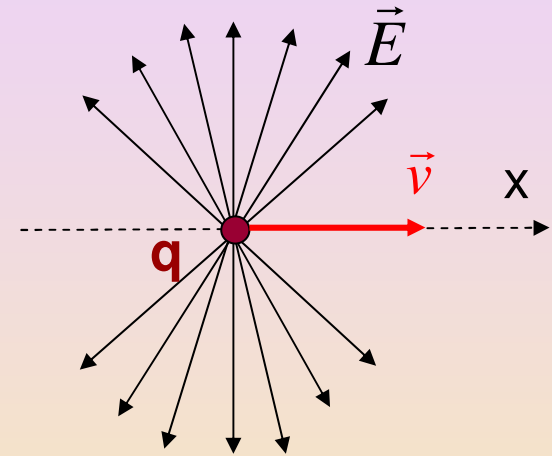
• Finalmente:

$$\vec{E}(R, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}} \frac{\vec{R}}{R}$$

- Este resultado é o mesmo que o obtido anteriormente através dos potenciais de Lienard-Wiechert para uma carga com \vec{V} cte!

- Devido à dependência de \vec{E} com θ :

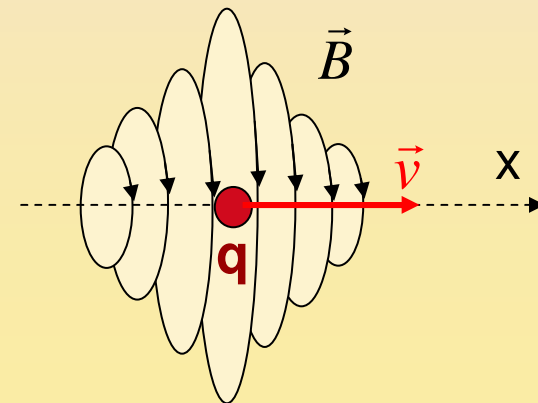
$$\vec{E}(R, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \frac{\vec{R}}{R}$$



- Também, como

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} \times \vec{E} \Rightarrow$$

\Rightarrow a configuração das linhas de \vec{B} :



- No problema dos 2 “*flashes*” de luz, as equações das frentes de onda eram:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^3 x_j^2 - c^2 t^2 = 0 \\ \sum_{j=1}^3 x_j'^2 - c^2 t'^2 = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{array} \right. \Rightarrow$$

\Rightarrow agora, definindo ($x_4 = ict$) podemos escrever:

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^2 = 0 \text{ e, igualmente } (x_4 = ict) : \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}'^2 = 0$$

- De forma que:

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x_{\mu}'^2$$

- É comum usar (*nas somatórias*) índices gregos para descrever grandezas quadrimensionais e deixar índices latinos para as tridimensionais.
- Assim, F_i representa a componente i do **Vetor \vec{F} (3D)** enquanto que $T_{\mu\nu} \equiv$ componente μ, ν do Tensor (4D) correspondente.
- Em particular, no caso das **transformações de coordenadas por Lorentz**, podemos escrever:

$$x'_\mu = \sum_\nu \lambda_{\mu\nu} x_\nu ; \text{ sendo } \lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} ; \beta = V/c$$

- Ou seja:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4 \Rightarrow x' = \gamma x + i\frac{V}{c}\gamma i ct \Rightarrow x' = \gamma(x - Vt) \\ x'_2 = x_2 \Rightarrow y' = y \\ x'_3 = x_3 \Rightarrow z' = z \\ x'_4 = -i\beta\gamma x_1 + \gamma x_4 \Rightarrow i ct' = -i\frac{V}{c}\gamma x + i\gamma ct \Rightarrow t' = \gamma\left(t - x\frac{V}{c^2}\right) \end{cases}$$

- Note que a matriz anterior refere-se ao movimento relativo entre os dois sistemas de coordenadas, na direção de x . Para outras direções, a matriz é diferente.

- Esta forma de expressar grandezas físicas facilita os cálculos na resolução dos problemas.

- Por exemplo, a densidade de corrente (\vec{J}) e de carga (ρ) são grandezas que certamente dependem do ref. inercial escolhido.

- Como sabemos, a equação de continuidade é que estabelece uma ligação entre estas duas grandezas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Definindo-se o “**Quadrivetor densidade de corrente \mathbb{J}** ”:

$$\mathbb{J} = (\vec{J}, ic\rho) \Rightarrow \text{Equação de Continuidade pode ser escrita:}$$

$$\sum_{v=1}^4 \frac{\partial J_v}{\partial x_v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Ou então $\square \cdot \mathbb{J} = 0$

Divergente
Quadrimensional

$$\square = \vec{\nabla} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

- Agora, quanto aos potenciais \vec{A} e φ vimos que, aplicando o Gauge de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{cases}$$

no vácuo

(equações desacopladas)

- Definindo-se o quadrivetor $\mathbb{A} = (\vec{A}, i\varphi/c)$, tanto as componentes da 1ª equação como da 2ª equação podem ser representadas compactamente:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 A_{\lambda}}{\partial x_{\nu}^2} = -\mu_0 \mathcal{J}_{\lambda}$$

; ($\lambda=1, \dots, 4 \rightarrow \lambda=4 \equiv$ equação em φ)

(verifique!)

- Outra maneira de expressar isso: $\square^2 \mathbb{A} = -\mu_0 \mathbb{J}$

$$\square^2 = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

\equiv d'Alembertiano,
como já vimos antes

- Note que a própria “Condição (Gauge) de Lorentz” fica facilmente representada através deste procedimento:

$$\sum_v \frac{\partial \mathbb{A}_v}{\partial x_v} = 0$$

\rightarrow

$$\square \cdot \mathbb{A} = 0$$

divergente
quadrimensional

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{i\varphi}{c} \right)}{\partial (ict)} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

- Finalmente, podemos examinar **as componentes do campo EM**, usando este formalismo, a partir das equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \\ \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \end{array} \right. ; \text{ sendo que } \left(\vec{A}, \frac{i\varphi}{c} \right) \text{ forma o quadrivetor } \mathbb{A}.$$

- É fácil observar que as componentes dos campos \vec{E} e \vec{B} estão relacionadas com as componentes do quadrivetor \mathbb{A} , da forma:

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbb{A}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathbb{A}_\mu}{\partial x_\nu} ; \text{ sendo que: } \left\{ \begin{array}{l} F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0 \\ F_{14} = -F_{41} = -iE_1 c \\ F_{24} = -F_{42} = -iE_2 c \\ F_{34} = -F_{43} = -iE_3 c \\ F_{12} = -F_{21} = B_3 \\ F_{23} = -F_{32} = B_1 \\ F_{31} = -F_{13} = B_2 \end{array} \right.$$

- Ou seja, o “Tensor Campo Eletromagnético” adquire a forma:

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{-iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{-iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{-iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix} \equiv \underline{\text{Tensor Anti-Simétrico}}$$

(componentes $t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu}$)

(Tensor Simétrico: $t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$)

- Por exemplo:
$$\left\{ F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right\}$$

$$F_{\mu\nu} = F_{41} = \frac{iE_1}{c} = \frac{i}{c} E_x =$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = \frac{\partial A_x}{\partial(ict)} - \frac{\partial(i\varphi/c)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{i}{\cancel{c}} E_x = \frac{1}{i\cancel{c}} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{i}{\cancel{c}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{-iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{-iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{-iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

- Outra componente (de \vec{B}):

$$F_{\mu\nu} = F_{23} = B_1 = B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Rightarrow B_x = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x$$

- O mesmo procedimento vale para as demais componentes.