



Eletromagnetismo II

Aula 21

Professor Alvaro Vannucci

Na última aula vimos...

- **Emissão de Radiação Eletromagnética:**
1º obtêm-se os **potenciais escalar e vetor**.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- É útil utilizar a **Condição (Gauge) de Lorentz:**

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

1º caso: “Dipolo Elétrico Oscilante”

(na aproximação de dipolo)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I\left(t - r/c\right) \\ \varphi(\vec{r}, t) = \frac{\ell r \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\frac{Q\left(t - r/c\right)}{r} + \frac{I\left(t - r/c\right)}{c} \right] \end{array} \right.$$

- De forma que as componentes dos campos (\vec{E} e \vec{B} do dipolo) foram obtidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{\phi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ell I_0}{r} \sin \theta \left[\frac{\omega}{c} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \\ E_r = \frac{2\ell I_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr^2} - \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\omega r^3} \right] \\ E_{\theta} = \frac{-\ell I_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\omega r^3} - \frac{\omega}{rc^2} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \end{array} \right.$$

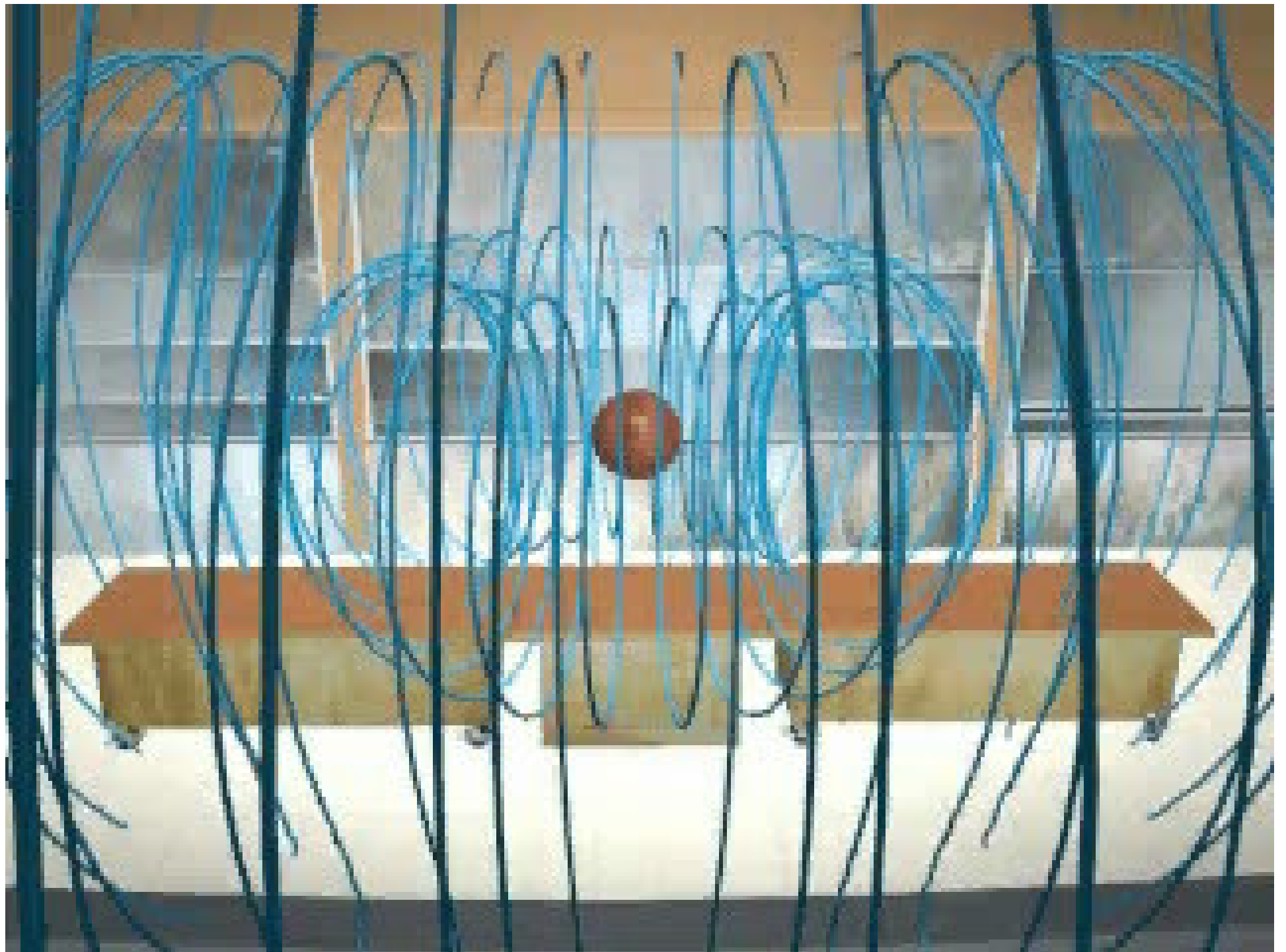
- Calculando o de **fluxo** de \vec{S} através de **casca esférica** com raio $r \rightarrow \infty$ vimos que somente as parcelas dos campos **proporcionais a r^{-1}** é que **contribuem para a radiação da onda**.

- E o cálculo do valor médio do Vetor de Poynting nos forneceu:

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{\mu_0} \overline{E_\theta B_\phi} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c r^2} \hat{e}_r$$

- Finalmente, foi também obtida a “**Resistência de Radiação**” para a ‘**antena tipo dipolo elétrico**’:

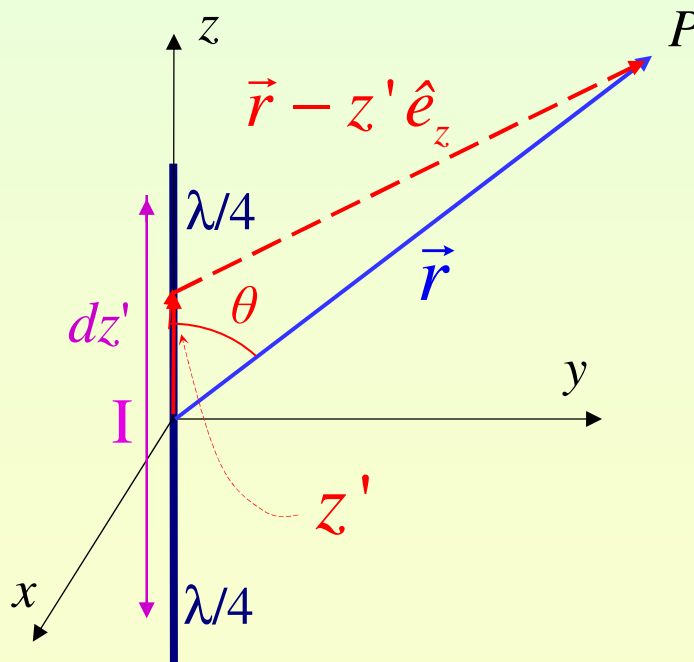
$$R_r^{dip} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \text{ Ohm} \quad (\text{no espaço livre})$$

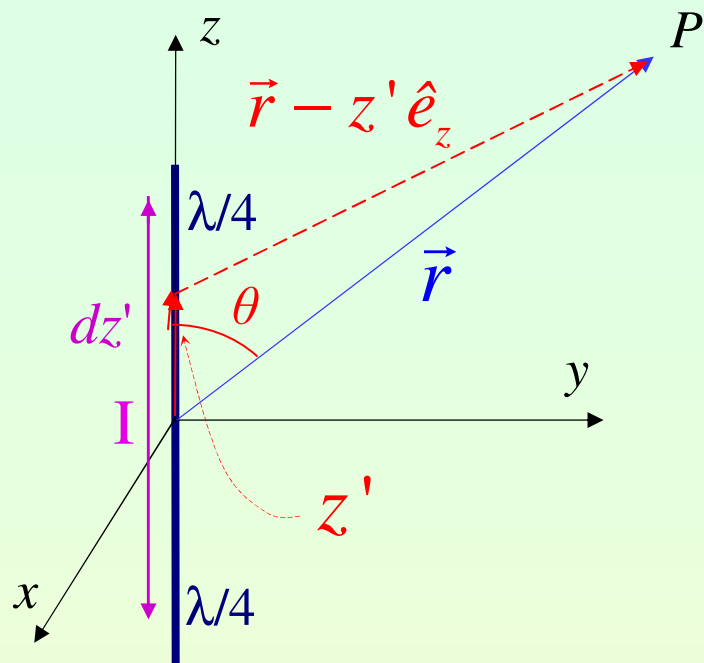


Antena de 'meia-onda'

- Trata-se de modelo mais apropriado para descrever ondas *EM* emitidas pelas antenas de Rádio-TV, por exemplo.
- A idéia é usar um fio como antena, com comprimento $\lambda/2$ ($\lambda \rightarrow$ da onda emitida), com corrente oscilante.

esta condição facilita o cálculo das integrais do problema!





escolho: $I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cdot \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)$

este termo faz com que a corrente se anule nas extremidades do fio:

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = 0$$

- Neste caso, não podemos considerar a *corrente* como sendo a mesma em qualquer ponto do fio, como antes, em um instante t.
- No entanto, se dividirmos o fio em elementos dz' , localizados em z' , então **nestes** comprimentos dz' , a **corrente é constante**, de forma que os resultados anteriores continuam válidos!

- Assim, a contribuição do elemento dz' para a componente θ do campo elétrico, pegando o “campo de radiação”:

$$\left\{ E_{\theta} = \frac{-\ell I_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\omega r^3} - \frac{\omega}{r c^2} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

$$dE_{\theta} = \frac{I_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega}{R c^2} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi z'}{\lambda} \right) dz'$$

pois, agora:

$$\left\{ I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cdot \cos \left(\frac{2\pi z'}{\lambda} \right) \right\}$$

sendo $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r - z' \cos \theta$
 (\equiv distância de dz' ao ponto P)

→ segundo a ‘aproximação de dipolo’, discutida na aula passada

- Agora, da mesma forma:

$$dB_{\phi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega}{Rc} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z' \right) dz'$$

- Para se obter E_{θ} e B_{ϕ} da antena, é necessário então **integrar** as equações em z' (integração será sobre as coordenadas linha).

- Fazendo novamente $R \rightarrow r$ **no denominador** (**aproximação de dipolo**, $r \gg z'$), temos basicamente que calcular a integral:

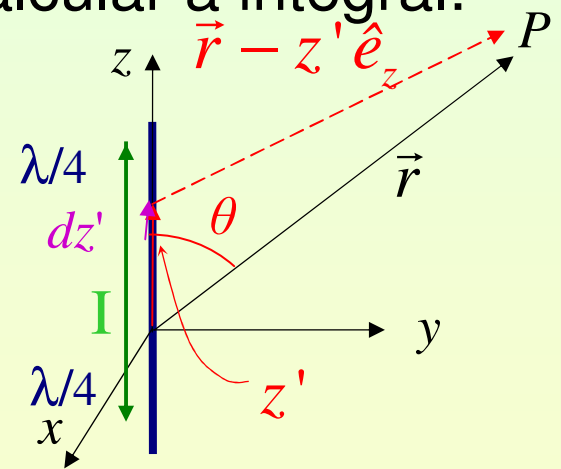
$$\{ R = r - z' \cos \theta \}$$

$$\xi = \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z' \right) dz'$$

- Chamando $\frac{2\pi}{\lambda} z' = u \Rightarrow z' = \frac{\lambda}{2\pi} u \Rightarrow$

$$\Rightarrow dz' = \frac{\lambda}{2\pi} du$$

$$\text{quando: } \begin{cases} z' = -\lambda/4 \Rightarrow u = -\pi/2 \\ z' = +\lambda/4 \Rightarrow u = +\pi/2 \end{cases}$$



- Assim:
$$\xi = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \omega \left(t - \frac{r - z' \cos \theta}{c} \right) \cos u \, du$$

$$\cos \left(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \frac{\omega z' \cos \theta}{c} \right) = \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{2\pi \cancel{c}}{\lambda} \frac{z' \cos \theta}{\cancel{c}} \right]$$

- Ou seja:
$$\xi = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + u \cos \theta \right] \cos u \, du$$

(só u depende das coordenadas linha!)

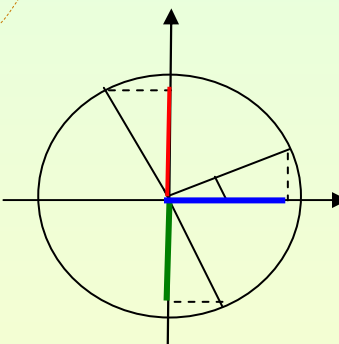
- Usando: $\{ \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \}$

$$\xi = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos(u \cos \theta)}_{=cte \, a} \cos u \, du - \right.$$

(para um dado ponto P)

$$\left. - \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sin(u \cos \theta)}_{=cte \, a} \cos u \, du \right\}$$

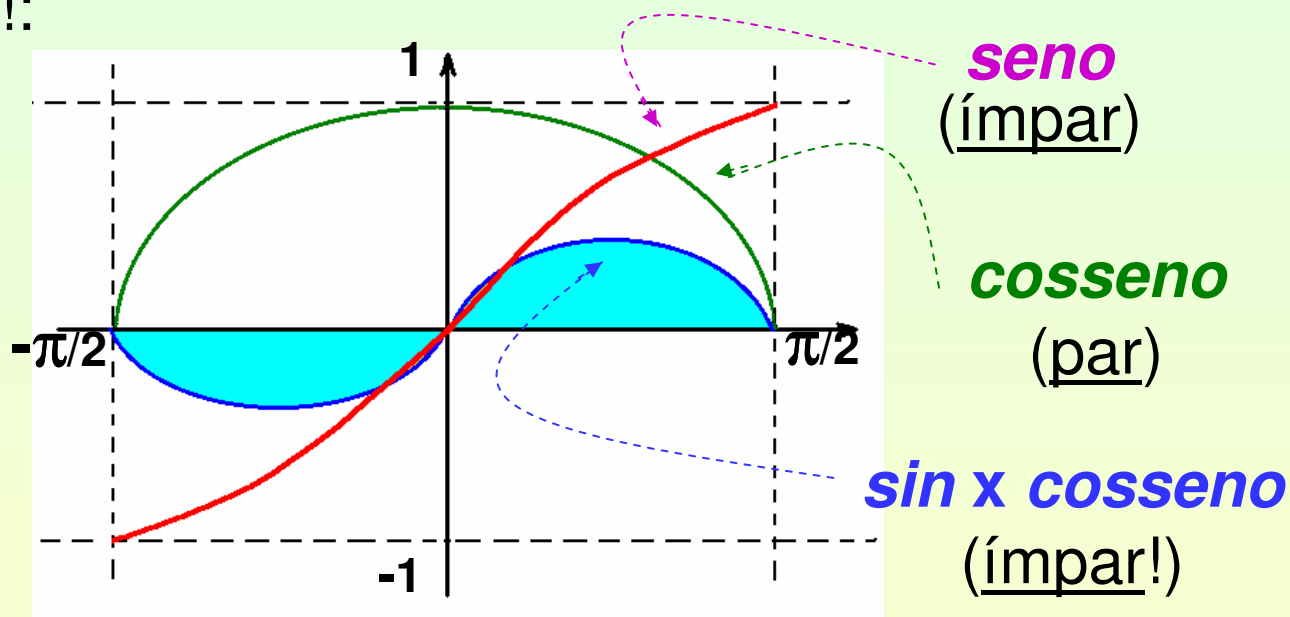
- Então a integral I_1 pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \int_{l.i.} \frac{\cos \eta}{a+1} d\eta + 2 \int_{l.i.} \frac{\cos \eta}{a-1} d\eta \right\} = (\eta = (a \pm 1)u) = \\
 &= \frac{1}{a+1} \sin(a+1)u \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{a-1} \sin(a-1)u \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{1}{a+1} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}\right)}_{=+\cos(\pi a/2)} + \frac{1}{a-1} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}\right)}_{=-\cos(\pi a/2)} = \\
 &= \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) \frac{\cancel{a} - 1 - \cancel{a} - 1}{(a+1)(a-1)} = \frac{-2}{a^2 - 1^2} \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) = (\text{substituindo } a \text{ por } \cos \theta) = \\
 &= \frac{-2}{\cos^2 \theta - 1} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \Rightarrow I_1 = \frac{2}{\sin^2 \theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)
 \end{aligned}$$


- Agora, quanto à **2ª integral**:
$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \left(\underbrace{u \cos \theta}_{\equiv cte a} \right) \cos u \, du$$

Note que o integrando corresponde a uma função **PAR** (*sin*) x função **ÍMPAR** (*cos*) = função **ÍMPAR** \Rightarrow podemos afirmar de imediato que o valor da integral ($-\pi/2$ a $+\pi/2$) é **zero**, sem precisar fazer todas as conta!:

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \text{função ímpar} = 0$$



$$\therefore \xi = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) I_1 \right\} = \frac{\lambda}{2\pi} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{2}{\sin^2 \theta} \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

- De forma que as **componentes** dos **campos de radiação**:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\theta} = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r c} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \\ B_{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \end{array} \right.$$

- Assim:

$$\bar{P} = \oint \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \oint \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \frac{I_0^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} d\theta$$

integral é sobre coordenadas espaciais e valor médio sobre a coordenada do tempo

$$\left(\begin{array}{l} dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \Rightarrow \\ \Rightarrow dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \end{array} \right)$$

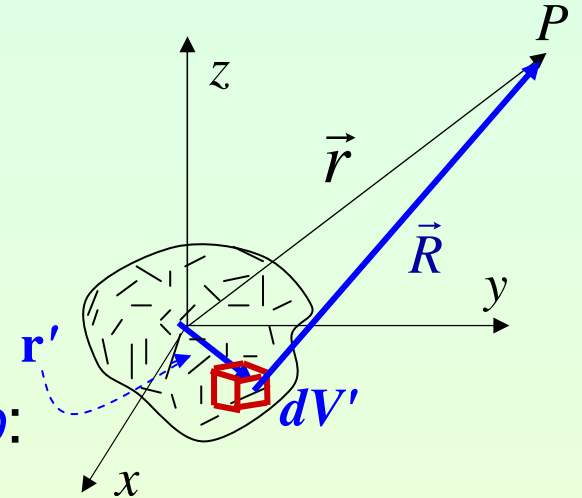
resolvida somente através de uma série infinita! (ver tabela de Integrais!)

$$\Rightarrow \bar{P} = 73,1 \frac{I_0^2}{2}$$

“Resistência de Radiação”

RADIAÇÃO DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO ARBITRÁRIA DE CARGAS EM MOVIMENTO

- Estaremos considerando cargas movimentando-se apenas *nas imediações da origem* do sistema de coordenadas.



- Para calcular o *Potencial Escalar Retardado*:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV'; \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}$$

- Novamente, na “*aproximação de dipolo*” $r \gg r'$, e também usando $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$:

$$R \approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad e \quad \frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$$

- De forma que a *densidade de cargas*:

$$\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) = (\text{substituindo } R) = \rho\left(\vec{r}', t - \underbrace{\frac{r}{c}}_{=t_0} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}\right)$$

- Agora, já que $\vec{r} \cdot \vec{r}' / cr$ é muito pequeno (pois as cargas encontram-se próximas da origem) \Rightarrow posso **expandir** ρ em *Série de Taylor no tempo* (em torno de $t_0 = t - r/c$):

$$\rho\left(\vec{r}', t - \underbrace{\frac{r}{c}}_{=t_0} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}\right) = \rho\left(\vec{r}', t - \underbrace{\frac{r}{c}}_{=t_0}\right) + \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{r', t - \frac{r}{c}} + \dots$$

- Assim: $\left[\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' \right]$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \underbrace{\left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \right]}_{\equiv 1/R} dV' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int \frac{1}{r} \rho \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' + \int \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \rho \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' + \right. \\ \left. + \int \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' + \int \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{cr^4} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' \right\}$$

0 ; muito pequeno (em r'/r)

• Então:

Integração é sobre coordenada linha

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \int \vec{r}' \rho \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' + \\ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{r}' \rho \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV'$$

Integrais são iguais!

• Note que a 1a integral \equiv **Carga Total** da Distribuição; que é uma cte independente do tempo (já que a carga é conservada!).

- A integral nos 2 termos restantes \equiv Expressão Geral para o Cálculo do Momento de Dipolo Elétrico (\vec{p}) no instante $t_0 = t - \frac{r}{c}$, para uma distribuição de cargas (*ver RM pg.52*).

- Mas, se na expansão de Taylor anterior tivéssemos ido adiante no cálculo da expressão do *potencial* $\varphi \rightarrow$ surgiria o termo de Quadrupolo Elétrico, e assim por diante.

$$\left(t_0 = t - \frac{r}{c} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} \right)$$

- Conservando só os termos até o Dipolo: *é derivada total, pois para um dado ponto P, r é cte:*

$$\varphi(\vec{r}', t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right]; \text{ sendo } \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Note que no caso estático o 3º termo não existe, e a expressão do potencial é dada pelos termos de monopolo e dipolo elétrico para uma distribuição de cargas, já calculada em Eletromag. I

- Um outro aspecto interessante é que, agora, ϕ (*ponto P*) é dado por r e t_0 ; $t_0 = t - r/c \Rightarrow$ deslocando a carga (*próximo à origem*), irá demorar um certo tempo para a configuração dos campos e potenciais se restabelecerem. (*veremos isto depois, em detalhes*)

- Agora o **Potencial Vetor Retardado**, por outro lado :

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' = (\text{desenvolvendo como anteriormente}) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - r/c)}{r} dV' + \text{termos de ordens superiores (estaremos desprezando)}$$

Ex. da 7ª lista

não tem linha, ∴ sai da integral

- Agora, usando que $\int \vec{J} dV' = \frac{d\vec{p}}{dt}$; sendo: $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho dV'$

- Então: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$

(*Momento de Dipolo Elétrico* de uma distribuição de cargas – corrente)

- Sempre lembrando: $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\underbrace{(t - r/c)}_{=t_0}}$ (já que $\frac{dt_0}{dt} = 1 \Rightarrow dt_0 = dt$)

(tempo retardado)

- Note, agora, que esta expressão de $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$, tem a mesma ordem de grandeza (em $\dot{\vec{p}}$) que o 3º termo de φ :

$$\left\{ \varphi(\vec{r}', t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right] \right\}$$

- Fica então justificado o fato de se ter desprezado os termos de maior grandeza na determinação de $\vec{A}(\vec{r}, t)$

- Podemos agora calcular os campos de radiação \vec{E} e \vec{B} correspondentes:
$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

- Faremos isso na próxima aula.