



Eletromagnetismo II

19^a Aula

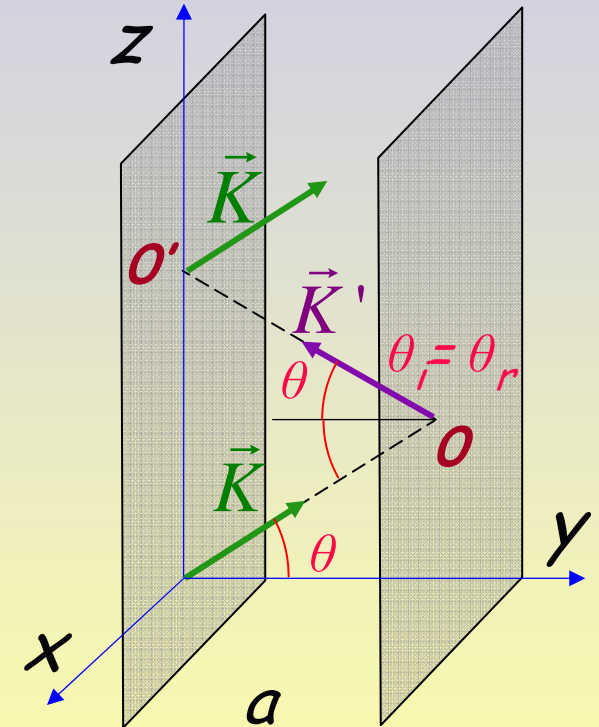
Professor: Alvaro Vannucci

Na última aula vimos...

- **Guias de onda:** 2 placas ∞ , de condutividade $\sigma = \infty$ e em vácuo, separadas de a :

- Modo TE: $\vec{E}_{//}$ ao eixo x .

- Na região entre as 2 placas condutoras, em qualquer ponto P , temos ondas do tipo 1 superpondo-se ao do tipo 2:



- Aplicando a Condição de Continuidade $E_{1t} = E_{2t}$ às 2 interfaces:

i)
$$\vec{E}(P) = \hat{e}_x E_{01} \left(e^{iKy \cos \theta} - e^{-iky \cos \theta} \right) e^{i(Kz \sin \theta - \omega t)} \quad (1)$$

ii) $Ka \cos \theta = m\pi$; $m = 0, 1, 2, \dots$
 (2)

(condição para haver a propagação da onda EM).

• Chamando: $\lambda_g = \frac{2\pi}{K \sin \theta}$ e $\lambda_c = \frac{2\pi}{K \cos \theta}$; $\lambda_0 = \frac{2\pi}{K}$

• Então: $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta}$ e $\lambda_c = \frac{\lambda_0}{\cos \theta}$

comprimento da onda no espaço livre (vácuo, sem fronteiras)

$$\therefore \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad (3)$$

• Da equação (2): $K a \cos \theta = m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\cancel{\lambda_0}} a \frac{\cancel{\lambda_0}}{\lambda_c} = m\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2} ; m = 0, 1, 2, \dots \text{ (número inteiro)}$$

(4)

- Agora, para $m=1$, desta equação: $\left(\frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2} \right)$

vemos que $\lambda_c=2a$ é uma **constante**; e como $K = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow$

\Rightarrow se ω decrece, λ_0 crece.

- Mas sendo λ_c uma cte., se λ_0 cresce (para um dado m) \Rightarrow

\Rightarrow da equação (3):
$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

observamos que haverá λ_0 limite, a partir do qual $1/\lambda_g^2$ deverá ter valores negativos (para que a igualdade continue valendo).

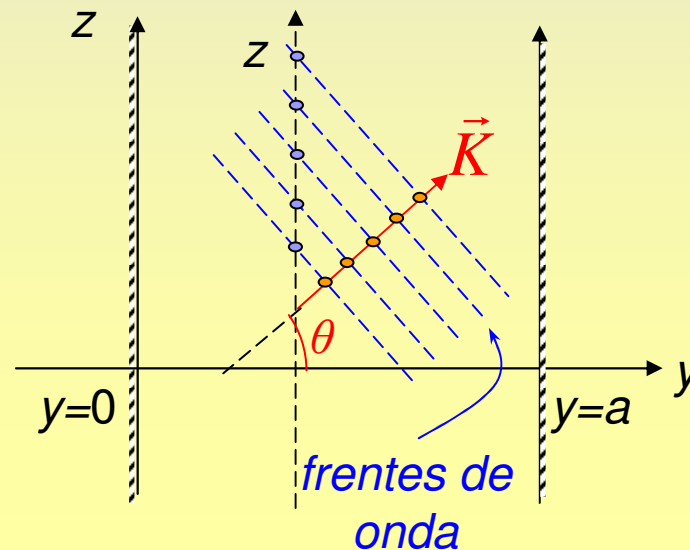
- Este valor limite de λ da onda, acima do qual a onda não se propaga, corresponde a:

$$\lambda_0 = \lambda_c \rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} \Rightarrow \lambda_0^2 = \lambda_c^2 \right)$$

- Ou seja, $\lambda_c \equiv$ comprimento de onda mais longo que onda pode ter para propagar-se em um determinado modo (valor de m).
- Vimos ainda que a velocidade de fase da onda resultante, propagando-se na direção de z é dada por ($n_1 \equiv$ vácuo):

$$v_f = \frac{c}{\sin \theta} > c$$

- E esta velocidade corresponde à velocidade de um ponto, ao longo do eixo z , que permaneceria com a fase da onda constante.



- No entanto, os sinais *EM* (energia) são transmitidos segundo suas velocidades “**de grupo**”, e não “**de fase**”.
- Para se determinar a velocidade de propagação da energia, na **direção z**, vamos recordar um resultado já obtido antes:

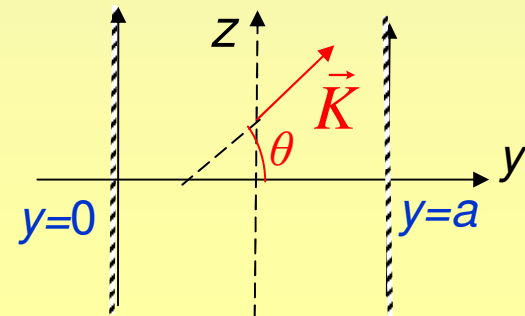
$$\vec{S} = u \vec{v}_p$$

densidade de energia

- Sendo que: $|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}|$ e $u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$

- E vamos calcular a densidade de energia média e a média do Vetor de Poynting na região entre as placas (na direção de z); de forma que:

$$v_p = v_g = \frac{\int_0^a \bar{S}_z dy}{\int_0^a \bar{u} dy}$$



- Recordando: para meios dielétricos (vácuo) $E_{mag.} + E_{eltr.} = 2 \times E_{eltr.}$
- De forma que, da **equação do campo elétrico resultante** obtida na aula passada:

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)}$$

(foi obtida após a aplicação das condições de contorno em $y=0$ e $y=a$)

- Temos então que:

$$\therefore \bar{u} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{\mu}} \text{Re}\left(\cancel{\mu} \cdot E E^*\right) = \frac{\epsilon}{2} E_0 E_0^* \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) \underbrace{e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)} e^{-i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)}}_{=1}$$

$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = EE^*$ (em vácuo)

- Agora, para obtermos a energia no guia (que irá propagar-se na direção do eixo z), devo integrar \bar{u} em \mathbf{y} (região entre as placas; lembrando que placas são ∞ em \mathbf{x} e \mathbf{z}).

- De forma que a integral:

pois $\frac{4\pi a}{\lambda_c} = \frac{4\pi m}{\cancel{\lambda}} = 2\pi m$ $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_0^a \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} y \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^a \left(1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda_c} y \right) dy =$$

eq. (5)

$$\frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2}$$

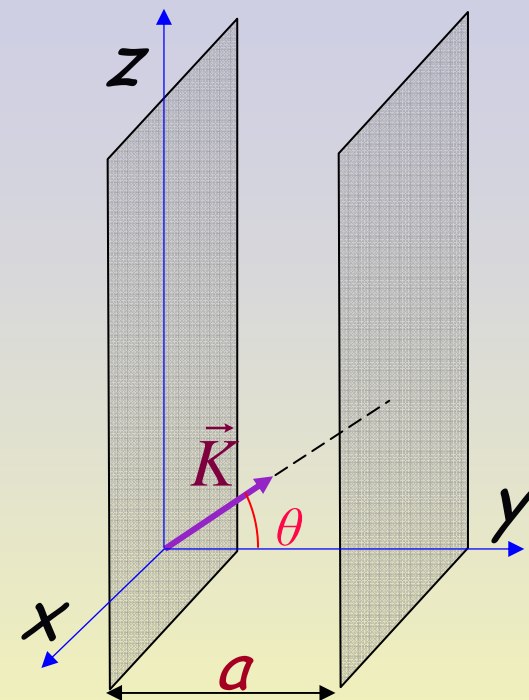
$$= \frac{1}{2} \int_0^a dy - \frac{1}{2} \int_0^a \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_c} y \right) dy = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} \frac{\lambda_c}{4\pi} \sin \frac{4\pi y}{\lambda_c} \Bigg|_0^a = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^a \bar{u} dy = \frac{\epsilon a}{4} EE_0^*$$

- Quanto ao **Vetor de Poynting**, na direção do eixo z :

$$\int_0^a \bar{S}_z dy = \int_0^a \bar{S} \sin \theta dy ; \begin{cases} \sin \theta = \frac{2\pi}{K \lambda_g} = cte \\ \bar{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{n}{\mu_0 c} E E^* \right] \end{cases}$$

$$\left(|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}^*| = \frac{E B}{\mu} = \frac{E n}{\mu c} E \right)$$



- Então:

$$\int_0^a \bar{S}_z dy = \frac{\cancel{2\pi}}{K \lambda_g} \frac{n}{\mu_0 c} \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^a \overbrace{E_0 E_0^*} \sin^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) dy \Rightarrow = a/2, \text{ como visto antes}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^a \bar{S}_z dy} = \left(K = \frac{n\omega}{c} \right) = \frac{\pi \cancel{h} \cancel{c}}{\cancel{h} \omega \lambda_g \mu_0 \cancel{c}} \frac{a}{2} E_0 E_0^*$$

- Assim, destes dois resultados:

$$v_g = \frac{\int_0^a \bar{S}_z dy}{\int_0^a \bar{u} dy} = \frac{\left(\frac{1}{4} \cancel{E_0 E_0^*} \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} \cancel{A} \right)}{\frac{\epsilon_0 \cancel{A} \cancel{E_0 E_0^*}}{A}} \Rightarrow$$

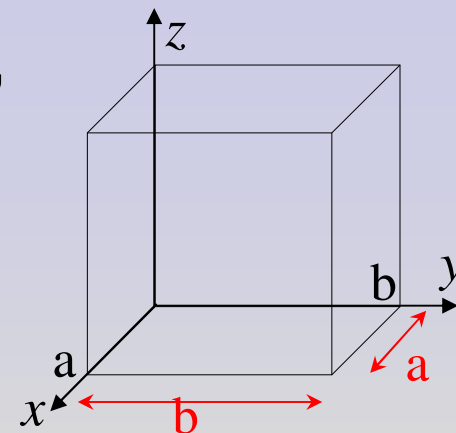
$$\Rightarrow v_g = \frac{2\pi}{\underline{\mu_0 \epsilon_0} \omega \lambda_g} \Rightarrow v_g = \frac{2\pi}{\omega \lambda_g} c^2 \Rightarrow v_g = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g}$$

$\left(\frac{2\pi c}{\omega} = \lambda_0 \right)$

- Mas: $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \Rightarrow v_g = c \frac{\lambda_0}{\left(\frac{\lambda_0}{\sin \theta} \right)} \Rightarrow \boxed{v_g = c \sin \theta} \quad (< c)$
sempre !!

- Muitos destes resultados, obtidos com geometria simples, valem para casos mais complexos, com outras geometrias.

- Vamos ver isto para guia de onda retangular, propagação TE, na direção e sentido do eixo z.



- Das equações de Maxwell, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{3ª equação: } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +i\mu_0\omega\vec{H} \\ \text{4ª equação: } \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i\varepsilon_0\omega\vec{E} \end{array} \right.$$

Mas $E_z=0$ (pois o modo é TE) e as componentes dos campos são $\alpha e^{i(2\pi z/\lambda_g - \omega t)}$:

$$\left\{ \nabla \times \vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \hat{x} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \hat{y} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \hat{z} \right\}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - i\mu_0\omega H_z = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\lambda_g} H_y + i\varepsilon_0\omega E_x = 0 \quad (8)$$

$$E_x \frac{i2\pi}{\lambda_g} = i\mu_0\omega H_y \Rightarrow E_x = \frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi} H_y \quad (6)$$

$$\frac{2\pi i}{\lambda_g} H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} + i\varepsilon_0\omega E_y = 0 \quad (9)$$

$$E_y = -\frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi} H_x \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

- Note que das equações (6) e (8) → tem-se H_y , caso H_z seja conhecido.

$$E_x = \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} H_y \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\lambda_g} H_y + i\varepsilon_0 \omega E_x = 0 \quad (8)$$

- E também H_x pode ser obtido a partir de H_z , a partir das equações (7) e (9)

$$E_y = \frac{-\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} H_x \quad (7)$$

$$\frac{2\pi i}{\lambda_g} H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} + i\varepsilon_0 \omega E_y = 0 \quad (9)$$

- Finalmente, das equações (6) e (7), tem-se E_x e E_y em função de H_x e de H_z .

- Portanto, obtendo-se $H_z \Rightarrow$ *todas as demais componentes* dos campos \vec{E} e \vec{B} são conseqüentemente obtidas!

- Agora, para calcular H_z , vamos partir da equação de onda: (no vácuo):

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

- De forma que, a **componente z** da equação de onda:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} \right) H_z = 0$$

Sai da derivada
no tempo

$$\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \right)$$

Sai da derivada

em z

$$\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right)$$

pois, como já dito, o campo é α $e^{i\frac{2\pi}{\lambda_g}z} e^{-i\omega t}$

- Para resolver esta equação diferencial, vamos utilizar o “*Método da Separação de Variáveis*” e aplicar as condições de contorno adequadas.

$$\rightarrow E_{1t} = E_{2t} = 0, \text{ nas paredes com } \underline{\text{condutividade } \infty}$$

- Assim (*verifiquem!*):

$$H_z(x, y, z) = \left[A \cos K_x x \cos K_y y + B \cos K_x x \sin K_y y + \right. \\ \left. + C \sin K_x x \cos K_y y + D \sin K_x x \sin K_y y \right] e^{\frac{2\pi iz}{\lambda_g}} ;$$

$$\text{com: } \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} \right) \right] - (K_x^2 + K_y^2) = 0 \quad (11)$$

são as “*constantes de separação*”

- De forma que, isolando H_y de (6) e substituindo em (8):

$$E_x = \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \left(\frac{2\pi i}{\lambda_g} - i \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} H_y \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\lambda_g} H_y + i \epsilon_0 \omega E_x = 0 \end{array} \right.$$

- E a derivada transforma $\text{sen } K_y y \rightarrow \text{cos } K_y y$, e vice-versa.
- Agora, supondo paredes com condutividade $\sigma = \infty \Rightarrow E_x$ deve anular-se em $y=0$ (e $y=b$); assim, somente termos em $\text{sin } K_y y$ podem sobrar na equação de E_x ; e estes termos devem ter:

$$K_y = n\pi / b \quad (12) \rightarrow \text{para } E_x \text{ anular-se em } y=b.$$

$$\text{(ou seja: } \sin(K_y y) \Big|_{y=b} = 0)$$

- Com respeito à **coordenada x**, pelo mesmo argumento, novamente sobram os termos em $\text{sin } K_x x$, com $K_x = \frac{m\pi}{a}$ (13)
($m, n = 0, 1, 2, \dots$ - em ambos os casos)

- Para que isto ocorra \Rightarrow soluções permitidas de H_z são as que envolvem $\cos K_y y$ e $\cos K_x x$, apenas:

$$H_z = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\frac{2\pi iz}{\lambda_g}} \left\{ E_x = \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \left(\frac{2\pi i}{\lambda_g} - i \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right\}$$

$; m \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$

- De forma que cada par possível de m, n determina um modo TE_{mn} de propagação.

$$K_y = \frac{n\pi}{b}; K_x = \frac{m\pi}{a}$$

- Agora, substituindo (12) e (13) em (11): $\left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} \right) \right] - (K_x^2 + K_y^2) = 0$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 = 0$$

$$\parallel K_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2$$

- Novamente, para um dado par (m, n) se λ_0 for **suficientemente grande** $\Rightarrow 1/\lambda_0$ é muito pequeno, de forma que, se:

$$\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \right\}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 < \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \Rightarrow 1/\lambda_g \text{ torna-se } \textit{imaginário} \text{ e o modo } TE_{mn} \text{ correspondente } \underline{\textit{n\~{a}o se propaga!}}$$

- Exemplo: Supor modo TE_{10} em um guia com $\begin{cases} a = 2,28 \text{ cm} \\ b = 1,01 \text{ cm} \end{cases}$

- Para haver propagação:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 > \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \Rightarrow \lambda_0 < 2a \Rightarrow \boxed{\lambda_0 < 4,56 \text{ cm}}$$