



# Eletromagnetismo II

## 18<sup>a</sup> Aula

Professor Alvaro Vannucci

## Vimos, na última aula:

- Camada Delgada (*condutora*):  $\neq$  fase:  $\tilde{\beta} = \frac{2d\omega}{c}(p+iq)$

- Coeficientes Fresnel:  $\tilde{r} = \frac{\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}}{1 + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}}$  ;  $\tilde{t} = \frac{\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{23} e^{i\tilde{\beta}/2}}{1 + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}}$

- Supondo  $T \propto \tilde{t}\tilde{t}^* \propto e^{i\tilde{\beta}/2} e^{-i\tilde{\beta}^*/2} \Rightarrow T \propto e^{\frac{-2d\omega q}{c}}$

- De forma que, para **Incidência Normal** ( $q = n_*$ ):

espessura da lâmina

$$T \propto e^{-2d/\delta}$$

profundidade de atenuação

- Em particular, se o meio 1 for ar:

$$T \alpha e^{\frac{-4\pi n_* d}{\lambda_1}}$$

(válido para lâminas condutoras e incidência normal. sendo  $n_1 = ar$ )

- Quanto à *Refletância*, vimos que:

$$R = \tilde{r} \tilde{r}^* = \frac{\tilde{r}_{12} \tilde{r}_{12}^* + \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*} + \tilde{r}_{23} \tilde{r}_{12}^* e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{r}_{23} \tilde{r}_{23}^* e^{-4\omega d q / c}}{1 + \tilde{r}_{12}^* \tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*} + \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{12}^* \tilde{r}_{23} \tilde{r}_{23}^* e^{-4\omega d q / c}}$$

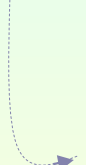
- Em particular, para meios Não-Condutores:

$$n_* = q = 0 \Rightarrow R_{\text{película dieletrica}} = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta}$$

# Guias de Onda

- Vejamos agora como uma onda  $EM$  propaga-se em um meio dielétrico (ar, por exemplo) delimitado por 2 superfícies condutoras.

- Guias de ondas para **micro-ondas** são uma aplicação importante deste problema.


$$\left\{ \begin{array}{l} f : 1 \text{ GHz a } 100 \text{ GHz} \\ \lambda : 1 \text{ m a } 1 \text{ mm} \end{array} \right.$$

- Para simplificar cálculos, vamos supor **meio de propagação**  $\equiv$  **vácuo** (ar) e condutividade do metal como sendo infinita.

- Sendo  $\sigma = \infty \Rightarrow \epsilon_{Ri} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} = \infty \Rightarrow \tilde{n}_2 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_R} = \infty$

- Assim, substituindo  $\tilde{n}_2 = \infty$  nas equações referentes aos Coeficientes de Fresnel (após colocar  $\tilde{n}_2$  em evidência):

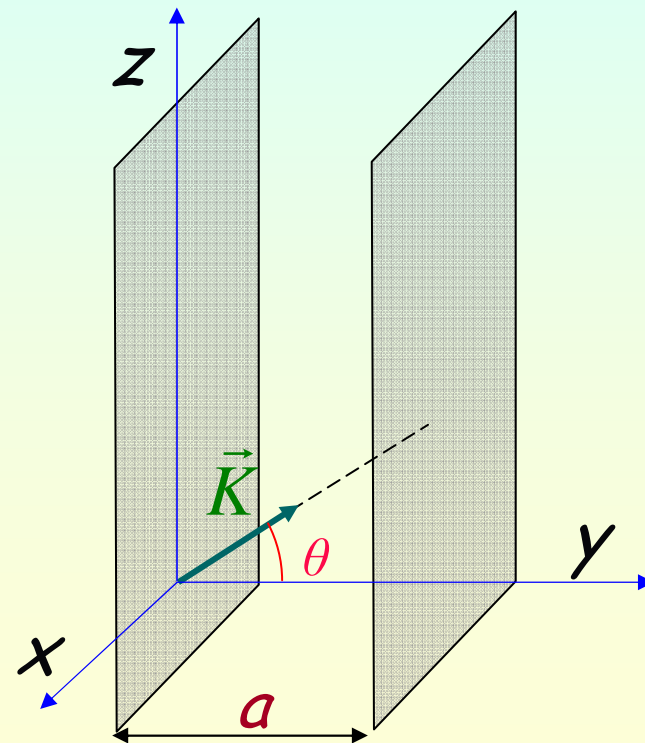
$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_{12\perp} = \frac{\tilde{n}_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \tilde{\theta}_2}{\tilde{n}_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \tilde{\theta}_2} = \left( \frac{\cancel{\tilde{n}_2}}{\cancel{\tilde{n}_2}} \right) \frac{\cos \theta_i - n_1 / \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2}{\cos \theta_i + n_1 / \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2} = 1 \\ \tilde{r}_{12//} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2}{n_1 \cos \theta_i + \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2} = (\text{igualmente}) = -1 \end{array} \right.$$

*resultados válidos, como vemos, para qualquer ângulo de incidência!*

- Note que  $R = rr^* = 1$  nos dois casos ( $\sigma = \infty$ ).

- E veja que esta aproximação é razoável, já que para a **prata**, por exemplo,  $R \sim 0,9996$  (para  $\lambda = 3\text{cm}$ ).
- Vamos então pegar duas placas paralelas, perfeitamente condutoras, em vácuo, muito grandes ( $\infty$ ) e separadas de  $a$ .

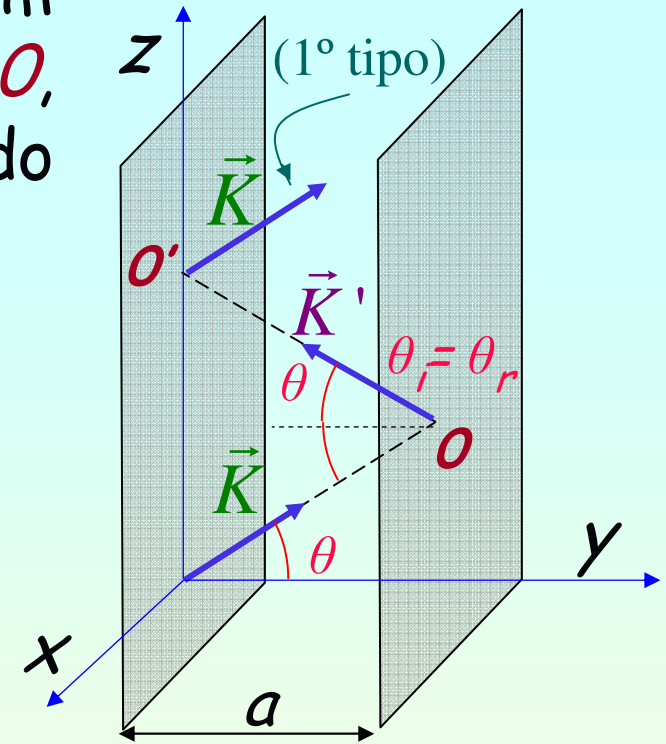
• Notando que as direções  $x$  e  $z$  são fisicamente indistinguíveis, nenhuma generalidade se perderá caso consideremos  $\vec{K}$  situado no plano  $yz$  (é sempre possível “girar” os eixos para que isso ocorra).



- Então, uma onda propagando-se com vetor de onda  $\vec{K}$  após refletir em  $O$ , segue em direção a  $O'$  com  $\vec{K}'$  formando ângulo  $\theta$  com eixo  $y$  negativo.

- Após refletir em  $O'$ , torna-se onda do tipo anterior.

- De forma que a propagação (entre os dois planos condutores paralelos) pode ser expressa em termos das exponenciais:



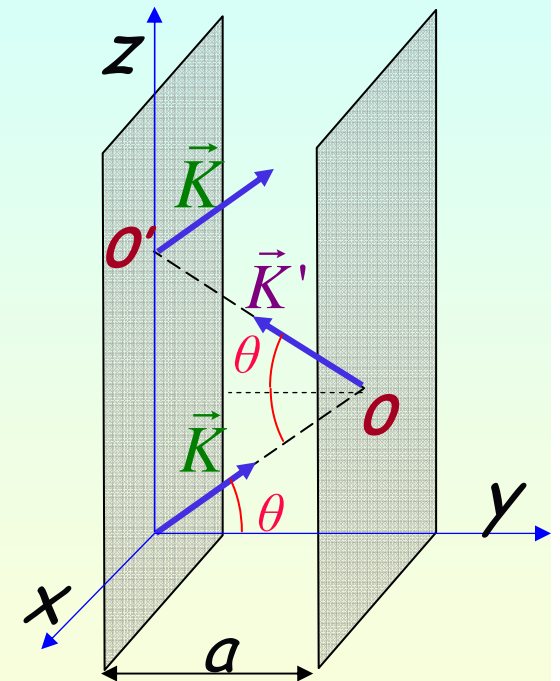
i) do 1º tipo,  $e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  :

$$e^{i[(K \cos \theta \hat{e}_y + K \sin \theta \hat{e}_z) \cdot (x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z) - \omega t]} = e^{i[K(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}$$

ii) do 2º tipo:  $\longrightarrow$  (igualmente)  $\longrightarrow e^{i[K(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}$

- Agora, como já discutido anteriormente, a onda  $EM$  que se propaga pode ser entendida como tendo "2 polarizações possíveis", relativas às **componentes perpendicular e paralela** de  $\vec{E}$  (em relação ao plano de incidência).

- 1º)  $\vec{E}_{\perp}$  ao plano de incidência : modo  $TE$   
( $\vec{E}$  é // ao eixo  $x$ ):
- 2º)  $\vec{E}_{\parallel}$  ao plano de incidência : modo  $TM$   
( $\vec{H}$  é // ao eixo  $x$ ):



- Vamos analisar o modo  $TE$ ; o outro fica como exercício.



- Na região entre as 2 placas condutoras, em um ponto  $P$  qualquer, vou ter ondas tanto do tipo 1 quanto do tipo 2, superpondo-se:

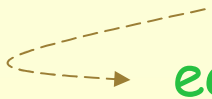
$$\vec{E} = \hat{e}_x \left\{ E_0 e^{i[K(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} + E_0' e^{i[K(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} \right\}$$

- Agora, tanto numa interface como na outra ( $y = 0, y = a$ ) temos que  $E_{1+} = E_{2+}$ ; sendo que  $E_{2+} = 0$  (pois  $\sigma = \infty$ ). Então:

i) para  $y = 0$ :  $E_{1//} = E_0 e^{iKz \sin \theta} e^{-i\omega t} + E_0' e^{iKz \sin \theta} e^{-i\omega t} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (E_0 + E_0') (e^{iKz \sin \theta - i\omega t}) = 0 \Rightarrow \boxed{E_0 = -E_0'}$$

- Portanto:  $\vec{E} = \hat{e}_x E_0 \left( e^{iKy \cos \theta} - e^{-iKy \cos \theta} \right) e^{i(Kz \sin \theta - \omega t)}$  (1)

 equação que rege a propagação da onda (campo  $\vec{E}$ )

ii) para  $\underline{y} = \underline{a}$ :

$$E_0 e^{iKa \cos \theta + iKz \sin \theta - i\omega t} + E'_0 e^{-iKa \cos \theta + iKz \sin \theta - i\omega t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{como } \boxed{E_0 = -E'_0} \Rightarrow E_0 e^{iKz \sin \theta - i\omega t} \left( e^{iKa \cos \theta} - e^{-iKa \cos \theta} \right) = 0$$

$$\cdot \text{Ent\~{a}o: } \left( e^{\frac{iKa \cos \theta}{}} - e^{-\frac{iKa \cos \theta}{}} \right) = 0 \Rightarrow e^{i\xi} - e^{-i\xi} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos \xi} + i \sin \xi - \cancel{\cos \xi} + i \sin \xi = 0 \Rightarrow \sin \xi = \sin (Ka \cos \theta) = 0$$

$$\therefore \xi = \boxed{Ka \cos \theta = m\pi}; m = 0, 1, 2, \dots \quad \left( \text{esta \u00e9 a condi\u00e7\u00e3o para haver propaga\u00e7\u00e3o no Modo TE!} \right)$$

(2)

• Agora, como  $K = n\omega/c \Rightarrow$  para uma dada onda com frequ\u00eancia  $\omega$ , o \u00e2ngulo  $\theta$  \u00e9 fixo (para um dado modo  $m$ ).

• Para um  $\theta \Rightarrow$  da eq. (1)  $\left\{ \vec{E}(P) = \hat{e}_x E_0 \left( e^{iK_y \cos \theta} - e^{-iK_y \cos \theta} \right) e^{i(K_z \sin \theta - \omega t)} \right\}$   
 vemos que o termo  $e^{i(K_z \sin \theta - \omega t)}$  é que rege a propagação da onda (é o que varia no espaço e tempo).

• Mas, notando que  $K_z \sin \theta - \omega t = \underbrace{K \sin \theta}_{\text{componente de } \vec{K} \text{ na direção de } z} \left( z - \underbrace{\frac{\omega}{K \sin \theta} t}_{V_f \text{ da onda que se move na direção de } +z} \right)$

componente de  $\vec{K}$  na direção de  $z$ .

$V_f$  da onda que se move na direção de  $+z$ .

Lembrar, em 1D (vácuo)

$$e^{i(Kx - \omega t)} = e^{iK \left( x - \frac{\omega}{K} t \right)}$$

$$\therefore \frac{\omega}{K} = \frac{c}{n} = v_{\text{fase}} \quad \left( K = \frac{n\omega}{c} \right)$$

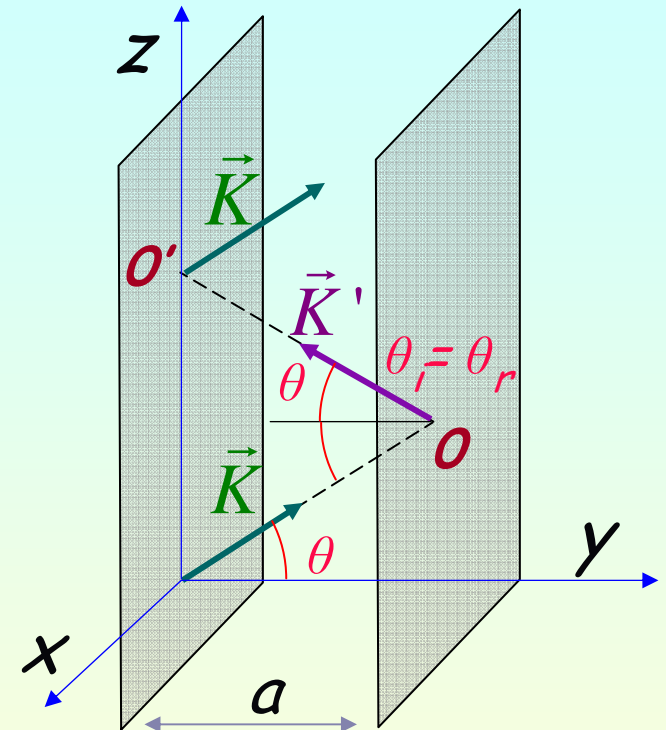
• Ou seja, no vácuo ( $n = 1$ ):  $v_f = \frac{\cancel{\omega}}{\frac{\cancel{\omega}}{c} \sin \theta} \Rightarrow v_f = \frac{c}{\sin \theta} > c !!$

Discutiremos esta aparente contradição logo mais.

• Vamos antes **escrever o campo  $\vec{E}$**  em termos dos comprimentos de ondas relacionados com as componentes  $y$  e  $z$  do vetor  $\vec{K}$

• Sendo  $K = |\vec{K}| = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$  da figura:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eixo } z: K_z = K \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \\ \text{eixo } y: K_y = K \cos \theta = \frac{2\pi}{\lambda_c} \end{array} \right.$$



ou seja:  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_g = \frac{2\pi}{K \sin \theta} \\ \lambda_c = \frac{2\pi}{K \cos \theta} \end{array} \right.$

; que vou escrever em termos do comprimento de onda da onda no espaço livre:

(vácuo, sem fronteira)

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{K}$$

• Então:  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \\ \lambda_c = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \end{array} \right. \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_g^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda_c^2} = 1$

$\therefore \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$  ( $\div$  tudo por  $\lambda_0^2$ )

$$\left\{ \vec{E}_{res.} = \hat{e}_x E_{01} \left( e^{iKycos\theta} - e^{-iKycos\theta} \right) e^{i(Kz \sin \theta - \omega t)} \right\}$$

- Vou escrever eq. (1) em termos destas grandezas.

- Da eq. (1) :  $\left\{ \vec{E}_{res.} = \hat{e}_x E_{01} \left( e^{iKy \cos \theta} - e^{-iKy \cos \theta} \right) e^{i(Kz \sin \theta - \omega t)} \right\}$

- Temos que:

i) O termo  $\left( e^{\overbrace{iKy \cos \theta} \equiv i\xi} - e^{\overbrace{-iKy \cos \theta} \equiv -i\xi} \right)$  *novamente*  $= \cancel{\cos \xi} + i \sin \xi - \cancel{\cos \xi} + i \sin \xi =$

$$= \left( \lambda_c = \frac{2\pi}{K \cos \theta} \right) = 2i \sin \left( \cancel{Ky} \frac{2\pi}{\cancel{K} \lambda_c} \right) = \underline{\underline{2i \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_c} y \right)}}$$

ii) Quanto ao termo

$$e^{i(Kz \sin \theta - \omega t)} = e^{i \left( \underbrace{Kz}_{(2\pi / \lambda_0)} \frac{\lambda_0}{\lambda_g} - \omega t \right)} = \underline{\underline{e^{i \left( \frac{2\pi}{\lambda_g} z - \omega t \right)}}}$$

- Substituindo na eq. (1), anterior:

$$\vec{E} = \hat{e}_x \underset{\substack{\text{III} \\ (2iE_{01})}}{E_0} \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)} \quad (4)$$

- Por outro lado, da eq. (2):  $K a \cos \theta = m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\cancel{\lambda_0}} a \frac{\cancel{\lambda_0}}{\lambda_c} = m\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2}} ; m = 0, 1, 2, \dots \text{ (número inteiro)} \quad (5)$$

- Agora, para  $m=1$ :  $\lambda_c=2a$  é uma constante; e também:

$$\left(\frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2}\right) \leftarrow K = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow \text{se } \omega \text{ decresce, } \lambda_0 \text{ cresce.}$$

- E se  $\lambda_0$  cresce e  $\lambda_c$  é uma constante (para um dado  $m$ )  $\Rightarrow$  da equação (3):  $\left\{ \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} \right\}$

observa-se que haverá  $\lambda_0$  limite, a partir do qual  $1/\lambda_g^2$  precisaria ter valores negativos (para que a igualdade continue valendo).

- Neste caso, o coeficiente de  $z$ , no expoente da equação (4) torna-se real ( $\lambda_g$  imaginário) e o campo passa a decair exponencialmente (e *não* mais oscila).

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)}$$

- Este valor limite corresponde a

$$\boxed{\lambda_0 = \lambda_c} \rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} \Rightarrow \lambda_0^2 = \lambda_c^2\right)$$

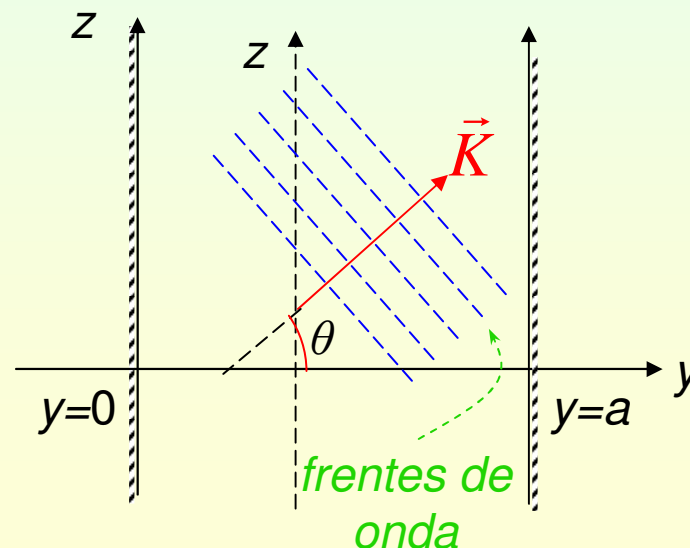


- Para  $m=1$ , este valor limite será:  $\lambda_0 = \lambda_c = 2a$   $\left( \frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2} \right)$
- Ou seja, se  $\lambda_0 > 2a$   $\Rightarrow$  onda  $EM$  (Modo  $TE$ ) será amortecida em relação à direção  $z$   
 $\therefore$  não se propaga!
- Agora, se  $m=2 \Rightarrow$  da equação (5):  $\lambda_c = 2a / m = a \Rightarrow$  o comprimento de onda **mais longo possível** para **haver propagação** da onda será  $a$ .
- A razão da escolha do índice ' $c$ ', de 'corte', agora fica evidente.
- Ou seja,  $\lambda_c \equiv$  comprimento de onda mais longo que onda pode ter para propagar-se em um determinado modo (valor de  $m$ ).

- Quanto à velocidade  $v_f = \frac{c}{\sin \theta}$  obtida anteriormente, ela sempre excede a velocidade da luz, e pode inclusive tornar-se  $\infty$  quando  $\theta = 0^\circ$  (ou seja,  $\lambda_0 = \lambda_c$ )

(pois, como vimos,  $\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_c}$ )

- Esta velocidade, “*dita de fase*”  $\equiv$  velocidade de um ponto, ao longo do eixo z, que permanece com a fase da onda constante.



- Deve-se notar que a aparente contradição com Relatividade não é real, já que a energia da onda, como já veremos, propaga-se *na direção do eixo z* com velocidade menor que a da luz.
- Esta velocidade é denominada “**Velocidade de Grupo**”, e os sinais *EM* são transmitidos segundo suas velocidades “de grupo”, e não de “fase”.
- Falaremos mais sobre isto na próxima aula.