

Eletrromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

10ª aula – 10/abr/2007

- Vimos: meios condutores: $\epsilon_R \rightarrow \tilde{\epsilon}_R = \epsilon_R + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}$ (Cte. Dielétrica)

$$\tilde{\epsilon}_R = \epsilon_R + i\epsilon_{Ri} ; \begin{cases} \epsilon_R = \epsilon / \epsilon_0 \\ \epsilon_{Ri} = \sigma / \epsilon_0\omega \end{cases}$$

- Índice de refração: $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_R}$; $\tilde{n} = n + in_*$

- Vetor de onda: $\tilde{\vec{K}} = \vec{K}_r + i\vec{K}_i = (\vec{K}_r + i\vec{K}_i)\hat{u} = \tilde{K}\hat{u}$; $\tilde{K} = \frac{\tilde{n}\omega}{c}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{K_r}$$

- Usando então: $\vec{K} \rightarrow \tilde{\vec{K}} = \tilde{K}\hat{u} \rightarrow$ nas *Equações de Maxwell*:
$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}} \right) \left(e^{-i(\omega t - \vec{K}_r \cdot \vec{r})} \right) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \tilde{B}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}} \right) \left(e^{-i(\omega t - \vec{K}_r \cdot \vec{r})} \right) \end{cases}$$

- Vimos também:

i) Campos \vec{E} e \vec{B} continuam perpendiculares à propagação da onda.

ii) $\text{Re } \vec{B} \cdot \text{Re } \vec{E} = -\frac{n_*}{c} E_{0p} E_{0s} \sin \phi \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$ só quando $\phi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \rightarrow$ Polarização Linear.

iii) \vec{E} e \vec{B} não mais oscilam em fase: Vamos mostrar isso agora.

- Vamos supor onda linearmente polarizada: $\phi = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$: ($\phi \equiv$ fase entre as componentes \hat{s} , \hat{p} do campo \vec{E})

$$\vec{E}(u, t) = E_0 \hat{p} e^{-K_i u} e^{-i(K_r u - \omega t)} \quad (1)$$

Isto porque $\tilde{\vec{E}} = E_0 \hat{p} = E_0 e^{i\phi} \hat{p} = (p/\phi=0) = E_0 \hat{p}$

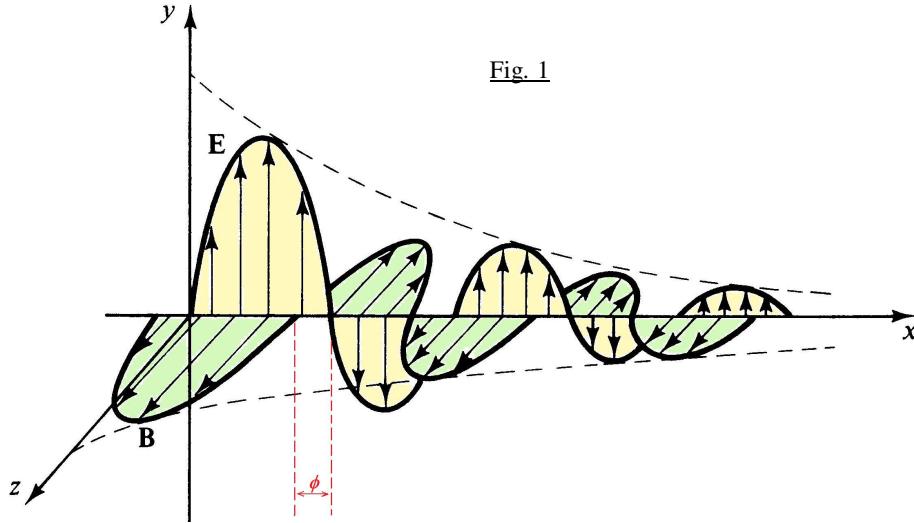
- Novamente da 3ª Equação de Maxwell: $\nabla \times \vec{E} = -\omega \vec{B}$; sendo que, agora, $\tilde{\vec{K}} = \tilde{K}\hat{u}$

- Assim: $\vec{B} = \frac{\tilde{K}}{\omega} \hat{u} \times \vec{E} = \frac{\tilde{K}}{\omega} \begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{s} & \hat{u} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_0 e^{-K_i u} e^{-i(K_r u - \omega t)} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \frac{|\tilde{K}|}{\omega} E_0 e^{-K_i u} e^{-i(K_r u - \omega t)} \hat{s}$

- Chamando $\frac{|\tilde{K}|E_0}{\omega} = B_0$ (amplitude de \vec{B}):

$$\vec{B} = B_0 \hat{s} e^{-K_r u} e^{-i(K_r u - \omega t + \phi)} \quad (2)$$

surge porque, agora, vetor de onda é uma grandeza complexa!



- Mais um ponto interessante. Em meios condutores, a **energia da onda não é mais igualmente distribuída** entre os campos \vec{E} e \vec{B} .
- Vamos pegar as *partes reais* dos campos dos campos mostrados em (1) e (2) para vermos isto:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(\epsilon \operatorname{Re} \vec{E} \cdot \operatorname{Re} \vec{E} + \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \vec{B} \cdot \operatorname{Re} \vec{B} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon E_0^2 e^{-2K_r u} \cos^2(K_r u - \omega t) + \frac{|\tilde{K}|^2 e^{-2K_r u}}{\mu \omega^2} E_0^2 \cos^2(K_r u - \omega t + \phi) \right) \end{aligned}$$

- Calculando a média temporal desta equação: {ou usando que: $\bar{u} = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right)$ }

$$\bar{u} = \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2K_r u} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\epsilon + \frac{|\tilde{K}|^2}{\mu \omega^2} \right) = \frac{1}{4} \epsilon E_0^2 e^{-2K_r u} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} \right]$$

já vamos demonstrar isto!

- Antes, porém, note que a contribuição magnética (2º termo) SEMPRE DOMINA!
- Quando $\sigma = 0$ (*meios dielétricos*), as contribuições são iguais.
- Porém, tratando-se de **bons condutores** ($\sigma \rightarrow \infty$), a energia da onda é quase exclusivamente magnética!

$$\bar{u} \approx \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\omega} E_0^2 e^{-2K_r u}$$

- Vamos agora à demonstração do resultado acima:

- Como vimos,
$$\begin{cases} \epsilon_R \rightarrow \tilde{\epsilon}_R = \epsilon_R + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} \\ \tilde{n} = n + in_* \end{cases} ; \text{ sendo que } \tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_R} .$$

- Assim,

$$\tilde{\epsilon}_R = \epsilon_R + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega} = (n + in_*)^2 = n^2 - n_*^2 + 2inn_* = \epsilon_R + i\epsilon_{Ri}$$

- Comparando as partes reais e imaginárias desta última equação:

$$\begin{cases} \epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = n^2 - n_*^2 \\ \epsilon_{Ri} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} = 2nn_* \end{cases} \Rightarrow \text{resolvendo para } n \text{ e } n_* \text{ (2 equações e 2 incógnitas), obtemos: (ver apêndice)}$$

$$\begin{cases} n = \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon_R + \sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2})} \\ n_* = \sqrt{\frac{1}{2}(-\epsilon_R + \sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2})} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{(na resolução, escolhemos raízes} \\ \text{positivas, para que caíamos nos} \\ \text{resultados já conhecidos para} \\ \text{dielétricos quando } \epsilon_{Ri} \rightarrow 0) \end{array} \right)$$

- Agora, como $\tilde{K} = \frac{\tilde{n}\omega}{c}$ e $\tilde{n} = n + in_*$ \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\tilde{K}| &= |\tilde{n}| \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 + n_*^2} = \frac{\omega}{c} \left[\frac{1}{2} \cancel{\epsilon_R} + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2} - \frac{1}{2} \cancel{\epsilon_R} + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]^{1/2} = \\ &= \frac{\omega}{c} \left[\sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]^{1/2} = \left(\epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) = \omega \left[\mu_0 \cancel{\epsilon_0} \frac{\epsilon}{\cancel{\epsilon_0}} \sqrt{1 + \frac{\cancel{\epsilon_0}^2 \sigma^2}{\epsilon^2 \cancel{\epsilon_0}^2 \omega^2}} \right]^{1/2} \Rightarrow (\mu = \mu_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{|\tilde{K}| = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon \omega^2}}} \end{aligned}$$

(c.q.d.)

- Da mesma forma como calculamos n e n_* acima, o Griffiths calcula as relações equivalentes:

$$\begin{cases} K_r = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2} \\ K_i = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \end{cases} ; \quad \tilde{K} = K_r + iK_i ; \quad \left\{ \begin{array}{l} K_r = \frac{n\omega}{c} \\ K_i = \frac{n_*\omega}{c} \end{array} \right. \quad \left(\text{ver apêndice} \right)$$

- Mas, vejamos agora o que ocorre com o “fluxo de energia” relacionado com o *Vetor de Poynting*, conforme a onda progride no meio condutor.

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{\mu} (\text{Re } \vec{E} \times \text{Re } \vec{B}) = (\text{utilizando as equações (1) e (2)}) = \\ &= \frac{1}{\mu} \left(E_0 e^{-K_r u} \cos(K_r u - \omega t) \hat{p} \times \frac{|\tilde{K}|}{\omega} E_0 e^{-K_r u} \cos(K_r u - \omega t + \phi) \hat{s} \right)\end{aligned}$$

- Lembrando que $\hat{p} \times \hat{s} = \hat{u}$: $(\hat{p}, \hat{s}, \hat{u})$

$$\bar{S} = \frac{|\tilde{K}| E_0^2}{\mu \omega} e^{-2K_r u} \cos(K_r u - \omega t) \cos(K_r u - \omega t + \phi) \hat{u}$$

- Vamos agora calcular a média $\bar{\bar{S}}$ observando que, para isto, precisamos saber o valor da integral:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi} \int_0^\xi \cos \theta \cos(\theta - \phi) d\theta &= \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \cos \theta (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) d\theta \\ &= \underbrace{\cos \phi \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \cos^2 \theta d\theta}_{=1/2} - \underbrace{\sin \phi \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \cos \theta \sin \theta d\theta}_{=0} = \frac{1}{2} \cos \phi\end{aligned}$$

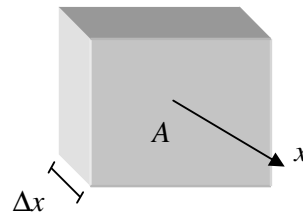
$\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$

- Portanto: $\bar{\bar{S}} = \frac{E_0^2}{2\mu\omega} e^{-2K_r u} \underbrace{|\tilde{K}|}_{=K_r} \cos \phi \hat{u} \Rightarrow \bar{\bar{S}} = \frac{1}{2} \frac{K_r E_0^2}{\mu\omega} e^{-2K_r u} \hat{u}$

- Ou seja, enquanto a onda vai penetrando no condutor, a energia decresce; o que corresponde a um aquecimento do condutor por efeito Joule.
- O exercício 6 - capítulo 8 do Griffiths mostra como a energia perdida pela onda, devido ao fator $e^{-2k_r u}$ do $\bar{\bar{S}}$ (que propaga-se na direção do eixo x) se transforma em calor por efeito Joule.
- Como já visto anteriormente, a “Potência Joule” pode ser escrita como $P_J = \int (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV$.

- Calculando então P_J para uma “fatia retangular” do condutor, de espessura infinitesimal Δx e área A : $(\vec{J} = \sigma \vec{E})$

$$\bar{P}_J = \sigma \bar{E}^2 \cdot A \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2K_r x} A \Delta x$$



- A pergunta é: Esta potência dissipada por efeito Joule equivale à potência média perdida pelos campos, na forma indicada pelo Vetor de Poynting?
- Para verificar isto, vamos calcular o fluxo médio da potência para dentro do condutor (na figura, vindo da esquerda):

$$\bar{P}_{entra} = \int \bar{\bar{S}} \cdot \hat{n} dA = (\bar{\bar{S}})(A) = \frac{1}{2} \frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A e^{-2K_r x}$$

- Enquanto que o fluxo saindo do condutor (pela direita, em $x + \Delta x$):

$$\bar{P}_{\text{sa}} = \frac{1}{2} \frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A e^{-2K_i(x+\Delta x)} = \frac{1}{2} \frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A \left(e^{-2K_i x} e^{-2K_i \Delta x} \right).$$

- Para $\Delta x \rightarrow 0$ (espessura próxima de zero), expandindo $e^{-2K_i \Delta x}$ em série de Taylor:

$$e^{-2K_i \Delta x} \approx 1 - 2K_i \Delta x \Big|_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x - 0) = 1 - 2K_i \Delta x$$

$$\Delta \bar{P} = \frac{1}{2} \frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A e^{-2K_i x} (1 - 2K_i \Delta x - 1) = - \frac{K_i K_r}{\mu\omega} E_0^2 A e^{-2K_i x} \Delta x$$

sinal indica que a energia à direita é menor que à esquerda.

- Ou seja, para as expressões serem de fato equivalentes, devemos mostrar que

$$\frac{1}{2} \sigma = \frac{K_i K_r}{\mu\omega} \Rightarrow \boxed{K_i K_r = \frac{1}{2} \mu\omega\sigma}$$

- E isto é verdade, pois:

$$K_i K_r = \omega^2 \frac{\epsilon\mu}{2} \left[\left(\lambda + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right) - \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} \right]^{1/2} = \omega^2 \frac{\epsilon\mu}{2} \frac{\sigma}{\epsilon\omega}$$

- Mas, voltando agora à expressão de $\vec{E} e^{-i(\omega t - \tilde{K}u)} = (\tilde{E}_0 e^{-K_i u}) (e^{-i(\omega t - K_r u)})$: (e o mesmo para \vec{B})

$$\tilde{K} = K_r + iK_i; \begin{cases} K_r = \frac{n\omega}{c} \\ K_i = \frac{n_*\omega}{c} \end{cases} \quad \boxed{\textit{n e n* são chamadas "Constantes Óticas"}}$$

- De onde vemos que $\frac{n_*\omega}{c} = K_i \equiv$ “*Constante de Atenuação*”, que indica quão rapidamente a amplitude dos campos decaem com a distância (ver fig. 1).

- É comum definir a grandeza “*Profundidade de Atenuação (ou Penetração)*”: $\delta = \frac{c}{n_*\omega} = \frac{1}{K_i}$

como sendo a distância (na direção da propagação) em que a amplitude decai a $\frac{1}{e} \approx 0,37\dots$

- Sendo $\delta = \delta(n_*, \omega) \Rightarrow$ para dielétricos ($n_* = 0$) esta distância tende a ser *infinita*; enquanto que para condutores ($n_* \neq 0$) isto só ocorre quando $\omega \rightarrow 0$!
- Discutiremos isto melhor na próxima aula.

Apêndice

$$\begin{aligned} \epsilon_{Ri} = 2nn_i \Rightarrow n_i = \frac{\epsilon_{Ri}}{2n} \Rightarrow \text{substituindo} \Rightarrow \epsilon_R = n^2 - \frac{\epsilon_{Ri}^2}{4n^2} \\ \Rightarrow \epsilon_R n^2 = n^4 - \frac{\epsilon_{Ri}^2}{4} \Rightarrow n^4 - \epsilon_R n^2 - \frac{\epsilon_{Ri}^2}{4} = 0 \Rightarrow n^2 = \frac{\epsilon_R \pm \sqrt{\epsilon_R^2 + \cancel{4} \frac{\epsilon_{Ri}^2}{\cancel{4}}}}{2} \\ \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\epsilon_R + \sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]}} \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para n_* :

$$\begin{aligned} n = \frac{\epsilon_{Ri}}{2n_*} \Rightarrow \text{substituindo} \Rightarrow \epsilon_R = \frac{\epsilon_{Ri}^2}{4n_*^2} - n_*^2 \\ \therefore n_*^4 + \epsilon_R n_*^2 - \frac{\epsilon_{Ri}^2}{4} = 0 \quad \text{Só um sinal invertido} \\ \Downarrow \\ n_*^2 = \frac{\epsilon_R \pm \sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2}}{2} \\ \Rightarrow \boxed{n_* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-\epsilon_R + \sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]}} \\ \text{para } \epsilon_{Ri} \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} n \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} [\epsilon_R + \epsilon_R]} \Rightarrow n \rightarrow \sqrt{\epsilon_R} \\ n_* \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} [-\epsilon_R + \epsilon_R]} \Rightarrow n_* \rightarrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} K_r &= \frac{n\omega}{c} \\ K_i &= \frac{n_*\omega}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right)^2} \right)} = \left(\mu = \mu_0; \frac{1}{c^2} = \mu_0\epsilon_0 \right) =$$

$$= \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \cancel{\epsilon_0}}{2} \left(\frac{\epsilon}{\cancel{\epsilon_0}} + \frac{\epsilon}{\cancel{\epsilon_0}} \sqrt{1 + \frac{\cancel{\epsilon_0}}{\epsilon^2} \left(\frac{\sigma}{\cancel{\epsilon_0}\omega}\right)^2} \right)} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} + \frac{\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{K_r = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}}}}$$

(e o mesmo para K_i , com sinal invertido)