

# Física da Atmosfera

Primeira lei da termodinâmica, eq. de Clausius-Clayperon e temperatura potencial

Henrique de Melo Jorge Barbosa

Universidade de São Paulo, Instituto de Física

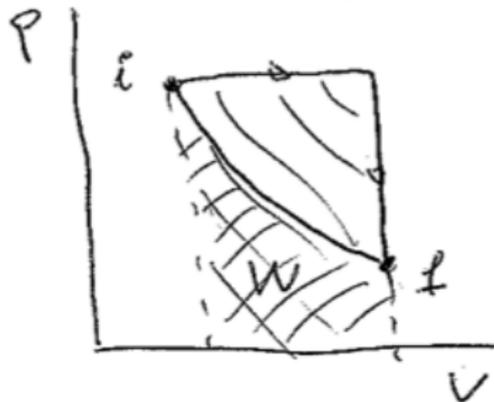
26 de Março de 2018

# Energia interna

Quando um sistema termodinâmico muda de estado, a quantidade de trabalho ( $W$ ) e de calor ( $Q$ ) dependem da natureza do processo (do caminho).

Experimentalmente se observa que a quantidade  $Q - W$  não depende, isto é,  $Q - W$  varia apenas com o estado inicial e final.

Representa uma mudança em uma propriedade intrínseca do sistema, que é conservada e que chamamos de energia interna:



# 1ª lei da termodinâmica

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= Q - W \\ dQ &= dU + dW \end{aligned} \right\} 1^a \text{ Lei}$$

## 1ª Lei

Diz essencialmente que todo sistema termodinâmico em equilíbrio térmico tem uma propriedade física importante chamada energia interna  $U$ .

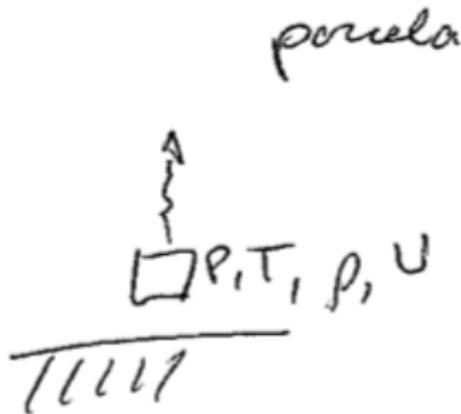
É uma extensão do princípio da conservação da energia para sistemas que trocam energia. Pode haver troca de energia por calor ou por trabalho, mas isso significa uma variação da energia interna!

- $dQ > 0$  do meio para o sistema ( $\Delta U$  diabático)
- $dW > 0$  trabalho feito pelo sistema sobre o meio ( $\Delta U$  adiabático)
- $dU > 0$  aumento da energia interna do sistema

# 1ª Lei por unidade de massa

Quando aplicada para a atmosfera, pensamos em uma parcela de ar que tem certa massa. Escrevendo a equação por unidade massa:

$$\frac{dQ^*}{M_a} = \frac{dU^*}{M_a} + \frac{dW^*}{M_a}$$



$$dQ = dU + dW(\text{por unidade de massa}) \quad (1)$$

## Parcela de ar subindo

Quando o ar sobe para pressões menores, ele expande e realiza trabalho:

$$dW = \frac{dW^*}{M_a} = \frac{P_a dV}{M_a} = P_a d\alpha_a \quad (2)$$

onde  $\alpha_a = V/M_a$  é o volume específico.

Neste caso o trabalho é feito pela parcela e  $dV > 0$  e  $dW > 0$ . Se não houver troca de calor,  $dQ = 0$  e a transformação é adiabática.

## Trocas diabáticas

Variação da energia interna da parcela devido a trocas diabáticas na atmosfera ( $dQ \neq 0$ ) são principalmente:

- esfriamento / aquecimento radiativo
- condensação / evaporação
- sublimação / ressublimação
- congelamento / derretimento

Nestes casos, a variação da energia interna  $dU$  será ( $dW = 0$ ):

$$dU = dQ = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_{\alpha_a} dT = c_m^v dT \quad (3)$$

onde:  $c_m^v$  é a nossa notação para calor específico do ar úmido (moist) à volume constante.

$c_m^v$  depende da massa de ar seco e de vapor que estão misturados.

$$(M_d + M_v)dQ = dQ^* = (M_d c_d^v + M_v c_v^v)dT$$

Onde:

$$\begin{cases} c_d^v = 717 \text{ J/kg/K ar seco a } 300\text{K} \\ c_v^v = 1403 \text{ J/kg/K vapor a } 300\text{K} \simeq 1.955 c_d^v \end{cases}$$

Dividindo tudo por  $(M_d + M_v)dT$ , temos:

$$\begin{aligned} c_m^v &= \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_{\alpha_a} = \frac{M_d c_d^v + M_v c_v^v}{M_d + M_v} = \frac{(M_d c_d^v + M_v c_v^v)/M_d}{(M_d + M_v)/M_d} = \\ &= \frac{c_d^v + c_v^v \omega_v}{1 + \omega_v} = \frac{c_d^v + (1 + 0.955)c_d^v \omega_v}{1 + \omega_v} \\ &= c_d^v (1 + 0.955 q_v) \end{aligned}$$

# 1ª Lei para a atmosfera

Substituindo 3 e 2 em 1, temos a primeira lei da termodinâmica escrita para a atmosfera:

$$dQ = c_m^v dT + P_a d\alpha_a \quad (4)$$

Usando a lei dos gases, sabemos que:

$$P_a = \rho_a R_v T = \frac{1}{\alpha_a} R_m T \Rightarrow dP_a \alpha_a + P_a d\alpha_a = R_m dT$$

Então:

$$dQ = (c_m^v + R_m) dT - \alpha_a dP_a$$

Lembrando que:

$$\begin{cases} R_m = R' \left(1 + \frac{1-\epsilon}{\epsilon} q_v\right) \\ R' = R_{universal} / M_d \end{cases}$$

# 1ª Lei para a atmosfera

Pela definição, temos que:

$$c_m^P = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{P_a} = c_m^V + P_a \left. \frac{d}{dT} \left( \frac{R_m T}{P_a} \right) \right|_{P_a} = c_m^V + R_m$$

Portanto:

$$c_m^P = c_m^V + R_m$$

ou, se fosse ar seco:

$$c_d^P = c_d^V + R'$$

# 1ª Lei para a atmosfera

Assim, a 1ª lei pode ser escrita também como:

$$dQ = c_m^p dT - \alpha_a dP_a$$

Derivando em relação ao tempo e trocando  $\alpha_a = 1/\rho_a$ , temos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_m^p} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c_m^p} \frac{1}{\rho_a} \frac{dP_a}{dt}, \text{ onde } \dot{Q} = \text{diabático e } \dot{P} = \text{adiabático}$$

Essa é a equação termodinâmica, uma das equações resolvida pelos modelos numéricos (ou quase). O problema é que:

- $c_m^p$  depende muito da temperatura e da umidade
- $\dot{P}$  e  $\dot{T}$  precisam ser calculados

## Outra forma

Podemos escrever a equação termodinâmica em termos da temperatura virtual como:

$$\begin{aligned}dQ &= c_m^p dT - \alpha_a dP_a \\&= c_{dry}^p \left( 1 + \frac{c_d^v}{c_d^p} q_v \right) \frac{dT_v}{1 + \frac{1+\epsilon}{\epsilon} q_v} - \alpha_a dP_a \\&= \left( \frac{1 + 0.865 q_v}{1 + 0.608 q_v} \right) c_d^p dT_v - \alpha_a dP_a \\&\simeq c_d^p dT_v - \alpha_a dP_a\end{aligned}$$

Derivando no tempo e trocando  $\alpha_a = 1/\rho_a$ , temos:

$$\frac{dT_v}{dt} \simeq \frac{1}{c_p^d} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c_p^d \rho_a} \frac{dP_a}{dt}$$

## Adiabática seca

Se uma parcela sobe e resfria devido a expansão de seu volume de maneira adiabática (não há condensação), então:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial T_v}{\partial z} \right|_d \simeq \frac{1}{c_p^d \rho_a} \frac{dP_a}{dz}$$

Essa taxa de variação da temperatura é o lapse-rate!

$$\Gamma_d = - \left. \frac{\partial T_v}{\partial z} \right|_d \simeq - \frac{1}{c_p^d \rho_a} \frac{\partial P_a}{\partial z} = - \frac{1}{c_p^d \rho_a} (-\rho_a g) \simeq 9.8 K/km$$

## Eq. de Poisson

Como a temperatura varia nestas transformações adiabáticas, é útil definir uma temperatura de comparação, deslocando o ar de uma altitude qualquer para o nível do mar:

$$\begin{aligned}dQ &= c_m^p dT - \alpha_a dP_a \\ &= c_m^p dT - \frac{R_m T}{P_a} dP_a \\ \Rightarrow \frac{dT}{T} &= \frac{R_m}{c_m^p} \frac{dP_a}{P_a}\end{aligned}$$

Integrando de uma referência  $(T_0, P_0)$  até  $(T, P)$ , temos a equação de Poisson:

$$T = T_0 \left( \frac{P_a}{P_0} \right)^{R_m/c_m^p}$$

# Poisson

onde

$$\frac{R_m}{c_m^P} = \frac{R'(1 + \frac{1+\epsilon}{\epsilon}q_v)}{c_d^P(1 + 0.865q_v)} \simeq \frac{R'}{c_d^P}(1 - 0.251q_v)$$

Tomando uma pressão de referência  $P_0 = 1000hPa$ , a temperatura  $T_0$  é chamada de potencial de ar úmido:

$$\Theta_m = T \left( \frac{1000hPa}{P_a} \right)^{\frac{R'}{c_d^P}(1-0.251q_v)}$$

Sem a correção de umidade, temos apenas a temperatura potencial:

$$\Theta = T \left( \frac{1000hPa}{P_d} \right)^{\frac{R'}{c_d^P}}$$

# Temperatura potencial virtual

Temos ainda a temperatura potencial virtual, se convertermos a pressão parcial de vapor em ar seco:

$$\Theta_v = T \left( 1 + \frac{1 + \epsilon}{\epsilon} q_v \right) \left( \frac{1000 hPa}{P_d} \right)^{\frac{R'}{c_d}}$$

A eq. Termodinâmica pode ser simplificada  
e usada  $\theta_v$  pois:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_v}{dt} &= \frac{dT_v}{dt} \left(\frac{P_0}{P_a}\right)^k + T_v k \left(\frac{P_0}{P}\right)^{k-1} \left(-\frac{P_0}{P^2}\right) \frac{dP}{dt} = \\ &= \frac{dT_v}{dt} \cdot T_v \underbrace{\left(\frac{P_0}{P}\right)^k}_{\theta_v} \frac{1}{T_v} - \underbrace{T_v \left(\frac{P_0}{P}\right)^k}_{\theta_v} \frac{k}{P} \frac{dP}{dt} = \end{aligned}$$

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\theta_v}{T_v} \frac{dT_v}{dt} - \frac{k\theta_v}{P} \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dT_v}{dt} = \frac{1}{c_p^d} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{c_p^d p} \frac{dP}{dt}$$

$$\theta_v \left( \frac{1}{c_p^d} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{c_p^d p} \frac{dP}{dt} \right)$$

~~$$- \frac{RT}{c_p^d} \frac{dP}{dt} + \frac{RT}{p} \frac{dP}{dt}$$~~

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\theta_v}{c_p} \frac{dR}{dt} \frac{1}{T_v} = \frac{1}{c_p} \frac{\theta_v}{T_v} \dot{\alpha}$$

$\left(\frac{P_0}{P}\right)^K =$  função de estado