

Equação de Transferência Radiativa

Marco Aurélio de Menezes Franco

Departamento de Física Aplicada
Universidade de São Paulo

Introdução à Física Atmosférica, 2018

Sumário

- 1 Equação de Transferência Radiativa (ETR)
 - Lei de Beer
 - ETR na ausência de espalhamento
 - ETR na ausência de absorção
 - Equação geral de transferência radiativa
 - Aproximação de atmosfera plano-paralela
 - Caso especial 1: propagação de radiação solar
 - Caso especial 2: propagação de radiação terrestre
- 2 Solução numérica da ETR



Equação de Transferência Radiativa

ETR

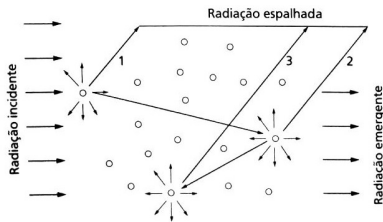
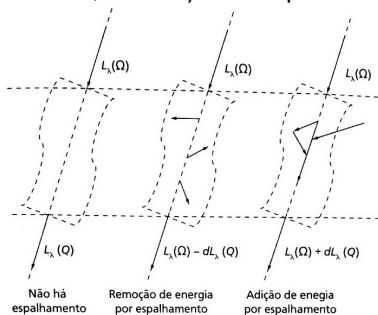
Equação que avalia e quantifica processos radiativos na atmosfera. Ela determina a resultante dos processos de atenuação e incremento à radiância espectral em uma dada direção de propagação. A ETR é uma função das propriedades óticas do meio e das fontes de radiação.

Saldo de Radiância = absorção¹ (< 0) + emissão² (> 0) + remoção por espalhamento³ (< 0) + adição por espalhamento⁴ (> 0)



Lei de Beer

À esquerda, ilustração dos processos (3) e (4) do saldo de radiância.
 À direita, ilustração dos processos de espalhamentos múltiplos.



Ω é a orientação de propagação do feixe de radiação que atravessa o meio.

Lei de Beer

Integrando ambos os lados,

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta_\lambda(s) ds = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{dL_\lambda(\Omega, s)}{L_\lambda(\Omega, s)} = \ln \left(\frac{L_\lambda(\Omega, s_2)}{L_\lambda(\Omega, s_1)} \right),$$
$$\Rightarrow L_\lambda(\Omega, s_2) = L_\lambda(\Omega, s_1) e^{-\int_{s_1}^{s_2} \beta_\lambda(s) ds}, \quad (3)$$

Define-se a espessura ótica:

$$\delta_\lambda(s) = \int_{s_1}^{s_2} \beta_\lambda(s) ds \Rightarrow L_\lambda(\Omega, s_2) = L_\lambda(\Omega, s_1) e^{-\delta_\lambda(s)}, \quad (4)$$

que é a Lei de Beer-Lambert-Bouguer, a qual descreve a atenuação da radiação ao atravessar um meio.

Forma geral da radiância espectral diferencial

A forma geral da radiância espectral diferencial leva em conta todos os 4 termos do saldo de radiância:

$$dL_{\lambda}(\Omega, s) = \sum_{i=1}^4 dL_{\lambda}^{(i)}(\Omega, s), \quad (5)$$

$$dL_{\lambda}(\Omega, s) = dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(3)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(4)}(\Omega, s), \quad (6)$$

Contribuições:

(1) = absorção, < 0 ; (2) = emissão, > 0 ; (3) = remoção por espalhamento, < 0 ; (4) = adição por espalhamento proveniente de outras fontes, > 0 .

Assim,

$$dL_{\lambda}(\Omega, s) = -dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega, s) - dL_{\lambda}^{(3)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(4)}(\Omega, s), \quad (7)$$

que é a ETR, uma vez que ela considera todos os processos de interação da radiação com a matéria num elemento de volume.

ETR na ausência de espalhamento

Equação de Schwarzschild

- Considera-se apenas emissão e absorção num dado λ ;
- Despreza-se todo tipo de espalhamento; Da equação 7, portanto, sobra apenas os termos:

$$dL_{\lambda}(\Omega, s) = -dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega, s); \quad (8)$$

- Útil para estudar a propagação de radiação terrestre na atmosfera (caso especial 2);



ETR na ausência de espalhamento

Equação de Schwarzschild

A radiância espectral pode sofrer variações ao atravessar uma porção de matéria:

- Atenuação por absorção:

$$dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega, s) = L_{\lambda}(\Omega, s)\beta_{\lambda,a}(s)ds; \quad (9)$$

de onde é possível definir a absorptância espectral, $a_{\lambda}(s)$,

$$a_{\lambda}(s) \equiv \frac{dL_{\lambda}(\Omega, s)}{L_{\lambda}(\Omega, s)} = \beta_{\lambda,a}(s)ds; \quad (10)$$

ETR na ausência de espalhamento

Equação de Schwarzschild

- Emissão devido à temperatura do volume de matéria:

$$dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega, s) = \epsilon_{\lambda}(s)B_{\lambda}[T(s)], \quad (11)$$

em que ϵ é a emissividade espectral e $B_{\lambda}[T(s)]$ é uma grandeza que depende da temperatura na posição s do caminho ótico.

Lei de Kirchhoff

A radiação absorvida por unidade de área deve ser igual à radiação emitida por cada uma dessas partes para manutenção do equilíbrio radiativo e térmico. Isso significa que $a_{\lambda} = \epsilon_{\lambda}, \forall \lambda$.

ETR na ausência de espalhamento

Equação de Schwarzschild

Com isso,

$$\frac{dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega, s)}{B_{\lambda}[T(s)]} = \epsilon_{\lambda}(s) = a_{\lambda}(s) = \beta_{\lambda,a}(s)ds; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dL_{\lambda}(\Omega, s) &= -dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega, s) = \\ &= -L_{\lambda}(\Omega, s)\beta_{\lambda,a}(s)ds + B_{\lambda}[T(s)]\beta_{\lambda,a}(s)ds, \\ \Rightarrow \frac{dL_{\lambda}(\Omega, s)}{\beta_{\lambda,a}(s)ds} &= -L_{\lambda}(\Omega, s) + B_{\lambda}[T(s)], \end{aligned} \quad (13)$$

que é a equação de Schwarzschild.

ETR na ausência de absorção

- São considerados apenas os processos de espalhamento;
- Boa aproximação para o espectro solar na região do visível;
- A equação 7 fica, neste caso, escrita como:

$$dL_{\lambda}(\Omega, s) = -dL_{\lambda}^{(3)}(\Omega, s) + dL_{\lambda}^{(4)}(\Omega, s); \quad (14)$$

- A componente (4) é um efeito resultante dos espalhamentos múltiplos no interior do volume de matéria. A probabilidade de ocorrência desses espalhamentos aumenta proporcionalmente com a profundidade ótica e com a densidade de partículas espalhadoras no meio;

ETR na ausência de absorção

A radiância espectral pode sofrer variações ao atravessar uma porção de matéria, assim como no caso anterior:

- Atenuação parcial da radiância incidente por espalhamento:

$$dL_{\lambda}^{(3)}(\Omega, s) = L_{\lambda}(\Omega, s)\beta_{\lambda,e}(s)ds; \quad (15)$$

- Aumento da radiância difusa por constituintes da matéria na orientação de interesse:

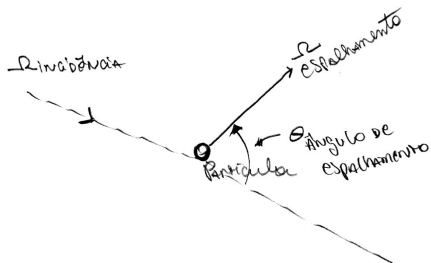
$$dL_{\lambda}^{(4)}(\Omega, s) = J_{\lambda}(\Omega, s)\beta_{\lambda,e}(s)ds; \quad (16)$$

$$J_{\lambda}(\Omega, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L_{\lambda}(\Omega', s)p(\lambda, s, \Omega', \Omega)d\Omega' \quad (17)$$

em que $L_{\lambda}(\Omega', s)$ é a radiância disponível para espalhamento proveniente da direção Ω' e $p(\lambda, s, \Omega', \Omega)$ é a função de fase.

ETR na ausência de absorção

Função de fase é uma função que determina o padrão angular de espalhamento e que depende dos ângulos de incidência, de espalhamento e do comprimento de onda da radiação incidente.



- A função de fase é normalizada:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\lambda, \cos \Theta) d\Omega = 1;$$

$$\cos \Theta = \cos \theta_{in} \cos \theta_{esp} + \sin \theta_{in} \sin \theta_{esp} \cos (\phi_{in} - \phi_{esp});$$

ETR na ausência de absorção

Adicionando à equação 14 os termos de 15 e 16,

$$\begin{aligned}dL_\lambda(\Omega, s) &= -L_\lambda(\Omega, s)\beta_{\lambda,e}(s)ds + J_\lambda(\Omega, s)\beta_{\lambda,e}(s)ds, \\ \Rightarrow \frac{dL_\lambda(\Omega, s)}{\beta_{\lambda,e}(s)ds} &= -L_\lambda(\Omega, s)\beta_{\lambda,e}(s)ds + J_\lambda(\Omega, s),\end{aligned}\quad (18)$$

que é a ETR para quando há apenas espalhamento.

Equação geral de transferência radiativa

O caso geral é obtido ao somar as contribuições 13 e 18 (relativas aos termos (1), (2), (3), (4)):

$$dL_\lambda(\Omega, s) = -L_\lambda(\Omega, s)\beta_{\lambda,e}(s)ds + J_\lambda(\Omega, s)\beta_{\lambda,e}(s)ds - \\ -L_\lambda(\Omega, s)\beta_{\lambda,a}(s)ds + B_\lambda[T(s)]\beta_{\lambda,a}(s)ds; \quad (19)$$

Definições importantes:

$$\beta_\lambda(s) = \beta_{\lambda,a}(s) + \beta_{\lambda,e}(s), \quad \omega_{0,\lambda} = \frac{\beta_{\lambda,e}(s)}{\beta_\lambda(s)} \\ \beta_{\lambda,e}(s) = \omega_{0,\lambda}\beta_\lambda(s), \quad \beta_{\lambda,a}(s) = [1 - \omega_{0,\lambda}]\beta_\lambda(s). \quad (20)$$

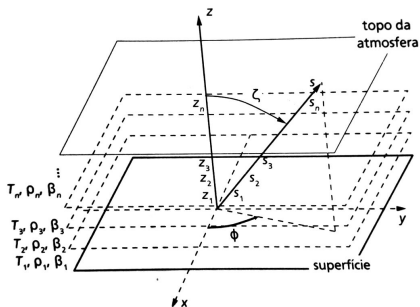
$\omega_{0\lambda} \equiv$ albedo simples;

Equação geral de transferência radiativa

Ao incluir as relações 20 na equação 19, após algumas manipulações, obtém-se a equação geral para a Transferência Radiativa:

$$\frac{dL_{\lambda}(\Omega, s)}{\beta_{\lambda}(s)} = -L_{\lambda}(\Omega, s) + [1 - \omega_{0,\lambda}(s)]B_{\lambda}[T(s')] + \omega_{0,\lambda}(s)J_{\lambda}(\Omega, s) \quad (21)$$

$$\omega_{0,\lambda} \rightarrow 1 \Rightarrow \beta_{\lambda,a}(s) \rightarrow 0, \quad \omega_{0,\lambda} \rightarrow 0 \Rightarrow \beta_{\lambda,e}(s) \rightarrow 0$$



Profundidade ótica infinitesimal:

$$d\tau_{\lambda}(z) = -\beta_{\lambda}(z)dz$$

- Atmosfera tem espessura vertical (≈ 100 Km) muito menor que o raio da Terra (6300 Km);
- Atmosfera considerada como um conjunto de camadas planas, horizontalmente homogêneas;
- Direção de propagação $\Omega = \Omega(\pm\mu, \phi)$, $\mu = \cos \zeta$;
 $+$ \rightarrow feixe ascendente,
 $-$ \rightarrow feixe descendente; s é a posição do caminho ótico $ds = \frac{dz}{\cos \zeta} = \frac{dz}{\mu}$.

Atmosfera plano-paralela

Com as definições anteriores,

$$\frac{\pm\mu dL_\lambda(z, \mu, \phi)}{d\tau} = L_\lambda(z, \pm\mu, \phi) - [1 - \omega_{0,\lambda(z)}]B_\lambda[T(z)] - \omega_{0,\lambda(z)}J_\lambda(z, \pm\mu, \phi) \quad (22)$$

É interessante escrever a ETR separadamente para as componentes radiativas ascendente ($\mu > 0$) e descendente ($\mu < 0$).

Caso ascendente ($\mu > 0$)

$$\frac{\mu dL_\lambda(z, \mu, \phi)}{d\tau} = L_\lambda(z, \mu, \phi) - [1 - \omega_{0,\lambda(z)}]B_\lambda[T(z')] - \omega_{0,\lambda(z)}J_\lambda(z, \mu, \phi) \quad (23)$$

Manipulações importantes:

- multiplica-se todos os lados da equação 23 por $\frac{d\tau}{\mu} e^{\frac{-\tau}{\mu}}$,
- utiliza-se a derivação
 $df(A, B) = d[\mp A \exp(\pm B)] = \mp \exp(\pm B)dA - A \exp(\pm B)dB$,
- O resultado é integrado desde a superfície ($\tau = \tau_{sup}$) até um ponto qualquer da atmosfera ($\tau = \tau'$)

$$\begin{aligned}
 L_{\lambda}(\tau', \mu, \phi) &= L_{\lambda}(\tau_{sup}, \mu, \phi) e^{\left(\frac{-\tau_{sup} + \tau'}{\mu}\right)} - \\
 &- \int_{\tau_{sup}}^{\tau'} \frac{(1 - \omega_0(\tau))}{\mu} B_{\lambda}[T(\tau)] e^{\left(\frac{-\tau + \tau'}{\mu}\right)} d\tau - \\
 &- \int_{\tau_{sup}}^{\tau'} \frac{\omega_0(\tau)}{\mu} J_{\lambda}(\tau, \mu, \phi) e^{\left(\frac{-\tau + \tau'}{\mu}\right)} d\tau
 \end{aligned} \tag{24}$$

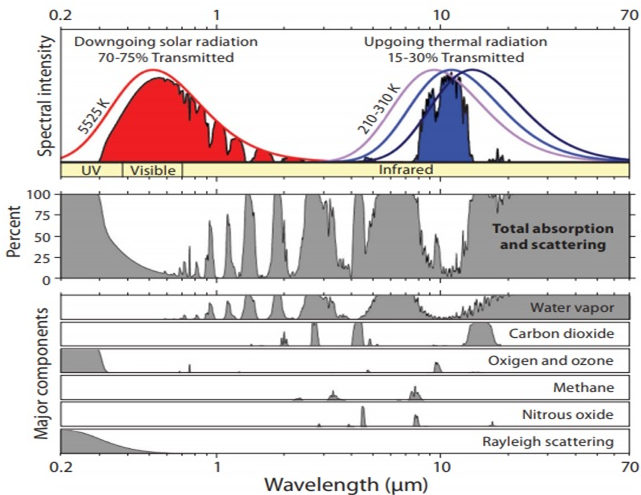
Atmosfera plano-paralela

O caso descendente ($\mu < 0$) é completamente análogo e segue os mesmos passos para as manipulações algébricas, com a diferença de que a integração da radiância é feita desde o topo da atmosfera até uma altitude qualquer com profundidade ótica τ .

$$\begin{aligned}
 L_{\lambda}(\tau', -\mu, \phi) &= L_{\lambda}(0, -\mu, \phi) e^{\left(\frac{-\tau'}{\mu}\right)} + \\
 &+ \int_0^{\tau'} \frac{(1 - \omega_0(\tau))}{\mu} B_{\lambda}[T(\tau)] e^{\left(\frac{\tau - \tau'}{\mu}\right)} d\tau - \\
 &+ \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0(\tau)}{\mu} J_{\lambda}(\tau, -\mu, \phi) e^{\left(\frac{\tau - \tau'}{\mu}\right)} d\tau
 \end{aligned} \tag{25}$$

Radiação transmitida pela atmosfera

RADIAÇÃO TRANSMITIDA PELA ATMOSFERA



Propagação de radiação Solar

Ausência de emissão

Propagação da radiação solar na região do espectro visível:

- Temperatura do Sol \gg Temperatura do planeta Terra \Rightarrow termo da ETR relativo à emissão de radiação pode ser desprezado;
- Considera-se apenas processos de espalhamento;
- De acordo com a figura anterior, observa-se que praticamente não há absorção de radiação na região do visível;

ETR:

$$\pm \mu \frac{dL_\lambda}{d\tau} = L_\lambda - \omega_0(\tau) J_\lambda. \quad (26)$$

Radiância escrita em termos das componentes direta (S_λ) e difusa(I_λ):

$$L_\lambda(\tau, \pm\mu, \phi) = S_\lambda(\tau, -\mu_0, \phi_0) + I_\lambda(\tau, \pm\mu, \phi) \quad (27)$$

$$L_\lambda(\tau, \pm\mu, \phi) = S_\lambda(\tau)\delta(\mu - \mu_0)\delta(\phi - \phi_0) + I_\lambda(\tau, \pm\mu, \phi) \quad (28)$$

Importante para resolver a equação 26 separadamente para cada contribuição e reescrever a função de espalhamento (equação 17):

$$J_\lambda(\tau, \pm\mu, \phi) = \frac{S_\lambda(\tau)}{4\pi} p_\lambda(\tau, \cos \Theta_0) + \int_0^1 \int_{-2\pi}^{2\pi} I_\lambda(\tau, \mu', \phi') p_\lambda(\tau, \cos \Theta'_0) \frac{d\mu' d\phi'}{4\pi} \quad (29)$$

Índice 0 \equiv devido ou proveniente da radiação solar.

Solução da componente difusa:

$$\pm\mu \frac{dl_{\lambda}(\tau, \pm\mu, \phi)}{d\tau} = I_{\lambda}(\tau, \pm\mu, \phi) - \frac{\omega_0(\tau)}{4\pi} S_{\lambda}(\tau) p_{\lambda}(\tau, \cos \Theta_0) -$$

$$- \frac{\omega_0(\tau)}{4\pi} \int \int_{0,1}^{2\pi,1} I_{\lambda}(\tau, \mu', \phi') p_{\lambda}(\tau, \cos \Theta'_0) d\mu' d\phi' \quad (30)$$

- Produção da radiância difusa por espalhamento de radiância solar direta;
- Produção de radiância difusa por espalhamento da radiância disponível em τ ;

Solução da componente direta:

$$-\mu_0 \frac{dS_\lambda(\tau)}{d\tau} = s_{\lambda(\tau)}. \quad (31)$$

Integrando de τ' a 0, obtém-se a Lei de Beer:

$$S_\lambda(\tau') = S_{\lambda,0} e^{\frac{-\tau'}{\mu_0}}. \quad (32)$$

O que mostra que a radiância espectral solar direta sofre atenuação exclusivamente pela lei de Beer.

Propagação de radiação terrestre

Ausência de espalhamento

- Radiação emitida pela superfície e pelos constituintes atmosféricos propaga-se ao longo da atmosfera sem sofrer processos de **espalhamento**;
- Considera-se ausência de nuvens e de aerossóis da moda grossa ($r > 2\mu m$);
- Solução obtida pela integração da equação de Schwarzschild (13).

$$\pm \mu \frac{dL_\lambda}{d\tau} = L_\lambda - B_\lambda[T(\tau)]; \quad (33)$$

A ETR 33 é resolvida separadamente para as componentes ascendente ($\mu > 0$) e descendente ($\mu < 0$).

Caso $\mu > 0$:

$$\mu \frac{dL_\lambda}{d\tau} = L_\lambda - B_\lambda[T(s)] \Rightarrow \mu \frac{dL_\lambda}{d\tau} - L_\lambda = -B_\lambda[T(\tau)]; \quad (34)$$

O procedimento para integração é similar ao caso solar, em que, neste caso, emprega-se multiplicação membro a membro por $\frac{d\tau}{\mu} e^{\frac{-\tau}{\mu}}$ e o cálculo é feito entre τ_{sup} e τ' .

$$L_{\lambda}(\tau', +\mu, \phi) = L_{\lambda}(\tau_s, +\mu, \phi)e^{\frac{(\tau' - \tau_s)}{\mu}} - \frac{1}{\mu} \int_{\tau_s}^{\tau'} B_{\lambda}[T(\tau)]e^{\frac{\tau' - \tau}{\mu}} d\tau \quad (35)$$

- Primeira componente relativa à transferência parcial da contribuição à radiância emitida pela superfície;
- Segunda componente relativa à transferência parcial da contribuição à radiância emitida desde a superfície até a camada de interesse;

O caso $\mu < 0$ é completamente análogo ao caso anterior, com as mesmas manipulações matemáticas. A integração, neste caso, é efetuada do topo da atmosfera até um nível de altura com profundidade ótica τ' . Aqui, deve-se levar em consideração a hipótese de que a radiância espectral descendente é nula no topo da atmosfera.

$$L_{\lambda}(\tau', -\mu, \phi) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau'} B_{\lambda}[T(\tau)] e^{\frac{(\tau-\tau')}{\mu}} d\tau \quad (36)$$

Contribuições exclusivamente devido à temperatura da região.

Discrete Ordinate Radiative Transfer

- Considera uma expansão da função de fase em uma série de $2N$ polinômios de Legendre;
- Radiância escrita como uma série de Fourier:

$$L(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^{2N-1} L^m(\tau, \mu) \cos^m(\phi_0 - \phi) \quad (37)$$

Nova ETR:

$$\mu_i \frac{dL^m(\tau, \mu_i)}{d\tau} = L^m(\tau, \mu_i) - \sum_{j=0}^N w_j D^m(\tau, \mu_i, \mu_j) \times L^m(\tau, \mu_j) - Q^m(\tau, \mu_i) \quad (38)$$

$$i = \pm 1, \dots, \pm N$$

Onde D^m e Q^m são funções que dependem dos polinômios de Legendre P_l^m e de $\omega(\tau)$. A equação 38 pode ser vista como um sistema de $2N$ equações diferenciais acopladas. Considera-se que τ e que a função de fase são constantes em cada camada.

Quadratura de Gauss:

$$\int_{4\pi} f d\Omega = \sum_{i=1}^N \omega_i f(s_i); \quad (39)$$

SBDART e Libradtran:

- Utilizam DISORT para solução da ETR;
- Propostos para cálculos de radiância em atmosfera limpa e com nuvens;
- Código do SBDART desenvolvido em FORTRAN 77, praticamente não há atualizações recentes do modelo (± 10 anos). Libradtran desenvolvido em C e atualizado;
- ETR pode ser resolvida para diferentes comprimentos de onda;
- Consideram 6 superfícies diferentes para cálculo de albedo: oceano, deserto, neve, lago, água limpa e vegetação;
- modelos consideram 6 perfis atmosféricos
- Teoria Mie é utilizada para obtenção de parâmetros físicos de gotículas e partículas de aerossol e gelo;
- aula do prof. Alexandre tratará Libradtran com maiores detalhes;

Outros modelos para solução da ETR: Monte Carlo, Dois Fluxos, Ordenadas Discretas por Transformada de Laplace, Método Iterativo para Ordenadas Discretas...