

Princípios Básicos de Modelagem em Alta Resolução

<http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa>

Henrique M. J. Barbosa

Instituto de Física – USP

hbarbosa@if.usp.br



UFRJ - Curso Projeto CHUVA - Out/2011



Quem sou eu?

- Sou professor e pesquisador do IF-USP.
- Antes da USP, trabalhei como pesquisador do CPTEC-INPE entre 2004 e 2008.
- Minha formação foi na UNICAMP: bacharelado (1998), o mestrado (2000) e o doutorado em Física (2004).
- Trabalho com física da atmosfera:
 - Modelagem numérica do sistema terrestre
 - radiação, convecção e aerossóis.
 - Sensoriamento remoto com laser
 - Monção/Vapor de água na América do Sul

http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa
hbarbosa@if.usp.br

Notas de aula

Henrique Barbosa

Home | View | Print

Pesquisa

- Linhas de Pesquisa
- Lista de Publicações
- Projetos de Pesquisa
- Oportunidades
- Ensino
- Disciplinas
- Tutoriais

Outros

- Ubuntu

Contato

Pessoal

Secretaria

Visitor locations

ClustrMaps™

Click to see

Visitantes: 007439

Desde 29 Out 2008

Modelagem Numérica da Atmosfera

Filed in: Site Modclim2011a · Modified on : Mon, 28 Mar 11

Nesta curso iremos abordar a ciência que rege o sistema climático global com foco em como ela é descrita nos modelos numéricos. Trata-se de um mini-curso de pós-graduação oferecido em conjunto com o Projeto CHUVA e a FUNCEME.

Notas de aula

- [Parte 1 - Visão geral sobre modelagem climática](#)
Leitura: [Peter Lynch, BAMS 2008: The Eniac Forecasts](#)
- [Parte 2 - Equações da atmosfera](#)
Leitura: Jacobson, cap.2; Wallace & Hobbs, cap.3
Complementar: Halliday & Resnick capítulos 19 a 21; Feynman caps. 39, 42.1, 43.1 a 5, 44.1, 44.2 e 45; Jacob, cap.1 até item 1.3.1
- [Parte3 - Métodos numéricos](#)
Leitura: Jacobson, cap.3 do item 3.3 até o fim e cap.6 até item 6.4.4.3
Complementar: Jacob, cap.2 item 2.3 e 2.3.1
- [Parte4 - Métodos numéricos e convecção](#) ^Δ
[Mellor, G. L. and T. Yamada, 1982: Development of a turbulence closure model geophysical fluid problem. Rev.](#)

Aula de modelagem

- Visão geral sobre meteorologia e climatologia
- Equações da atmosfera e métodos numéricos
- Discretização e parametrizações
 - Turbulência,
 - Convecção
 - Química e aerossóis
- Exemplos do que não sabemos
- Pesquisa no campo

Um pouco de História...

As previsões de tempo começaram baseadas na observação de padrões repetitivos:

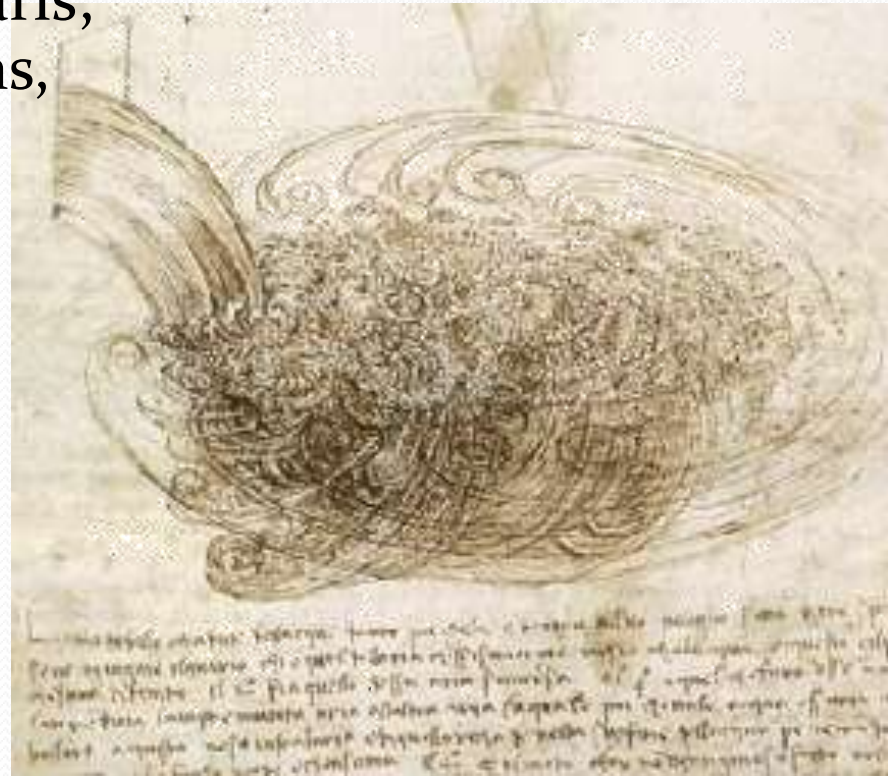
- Em 650 AC os babilônios previam o tempo a partir do padrão de nuvens e da posição dos astros
- Em 340 AC, Aristóteles descreveu uma série de situações meteorológicas no livro Meteorológica
- Desde pelo menos 300 AC que os chineses faziam algum tipo de previsão de tempo

Let us now explain lightning and thunder (...). There are two kinds of exhalation, moist and dry (...). Moist condenses into cloud (...). Heat when radiated disperses into the upper region. But any of the dry exhalation that gets trapped when the air is in process of cooling is forcibly ejected as the clouds condense and in its course strikes the surrounding clouds, and the noise caused by the impact is what we call thunder. – **Aristoteles Meteorologica**

Leonardo da Vinci

“Observe the motion of the surface of the water, which resembles that of hair, which has two motions, of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls; thus the water has eddying motions, one part of which is due to the principal current, the other to random and irreverse motion.”

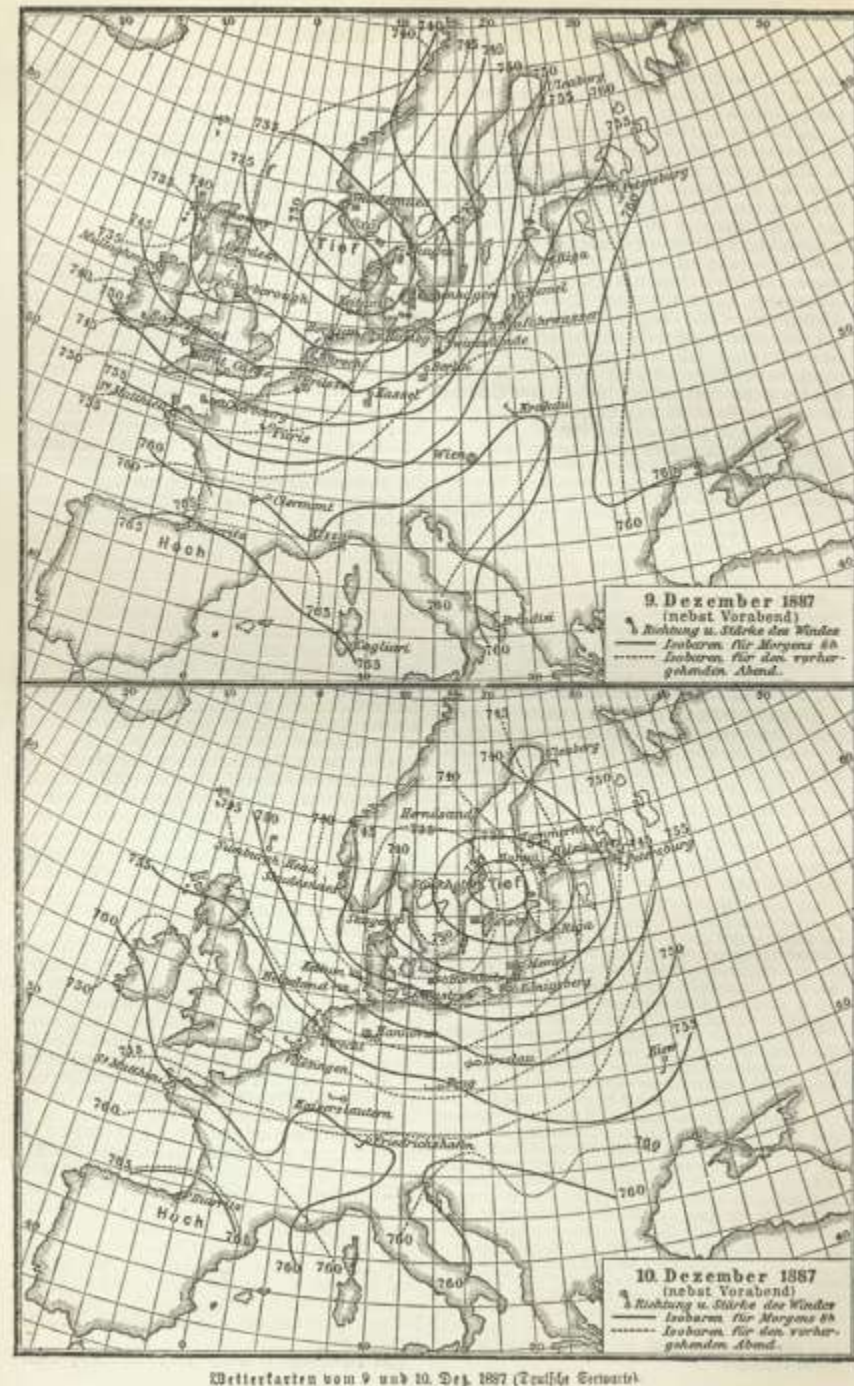
(Lumley, J.L., 1997. Phys. Fluids A, 4, 203)



História da Meteorologia

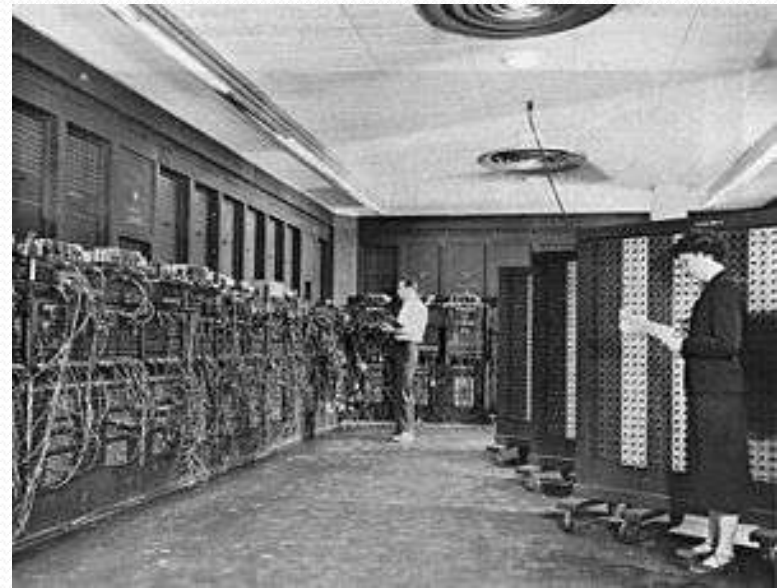
- 1400's
 - Hygrometer - Cryfts (1450)
 - Anemometer - Alberti (1450)
- 1500's
 - Thermoscope - Galileo
- 1600's
 - Barometer - Torricelli (1643)
 - Les Meteores - Descarte (1637)
- 1700's
 - Trade winds - Hadley (1730)
- 1800's
 - Three-cell model - Ferrel (1855)
 - Weather maps of surface pressure
- 1900's
 - Weather prediction from maps - Bjerknes (1903)
 - Polar front theory - Bjerknes (1921)
 - Numerical weather prediction - Richardson (1922)
 - First computer forecast - Charney / von Neumann (1948)
 - Daily balloon observations (1940's)
 - Weather satellites (Tiros I, 1960)

Previsão para a Europa 9 e 10 de dezembro de 1887



Previsão Numérica de Tempo

- Durante a 2ª guerra, os EUA financiaram a construção do primeiro computador (em segredo)
- Em 1946 o ENIAC foi apresentado ao mundo
- **Em 1950, Charney, von Neumann e outros cientistas usaram o ENIAC para fazer a 1ª previsão numérica de tempo**
- A partir de 1955 as previsões de tempo tornaram-se sistemáticas





O que é um modelo numérico?



Quais equações este modelo resolve??



Como o sistema climático funciona???



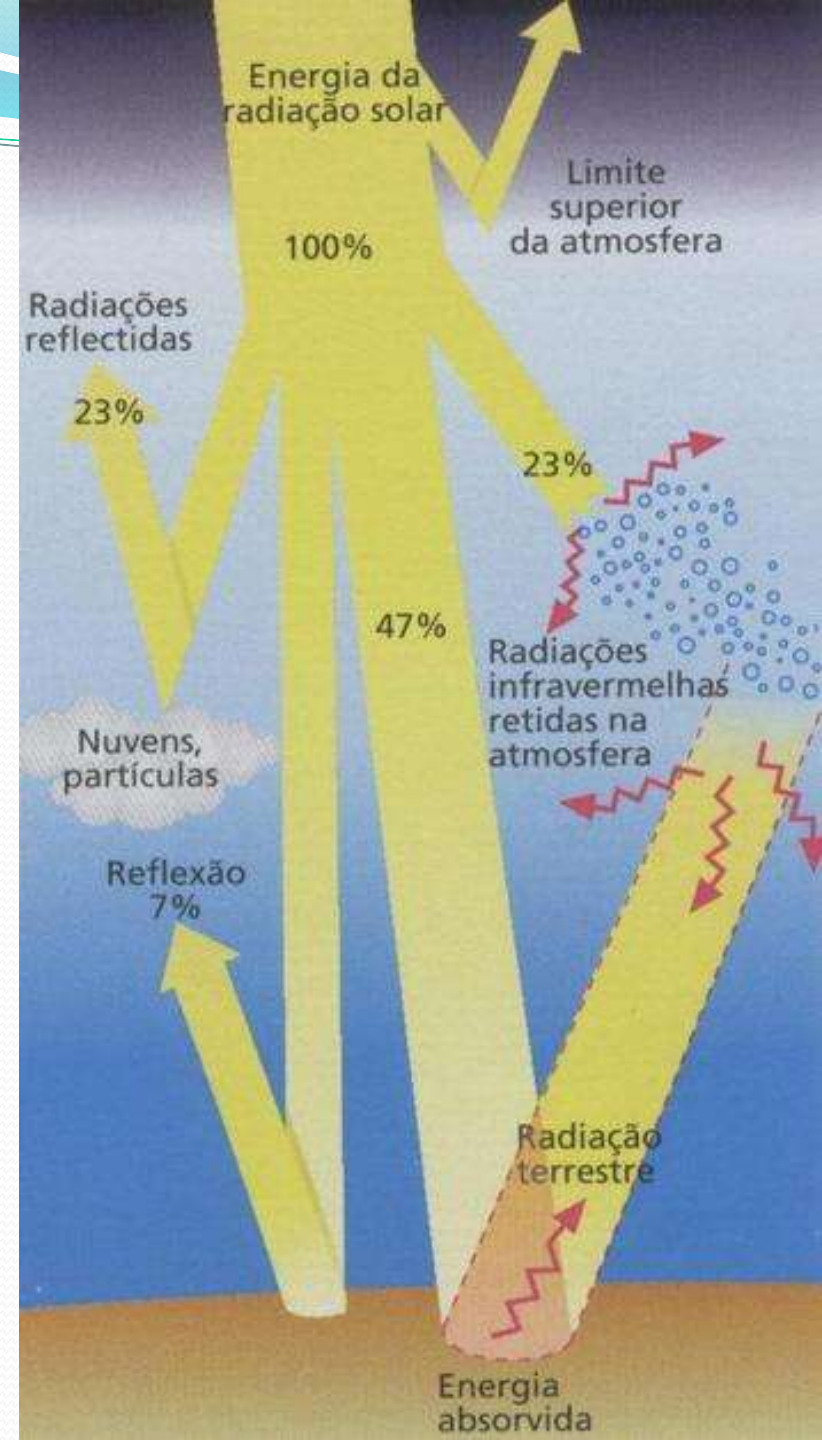
SOHO (ESA and NASA)

Radiação Solar

- A energia do sol vem na forma de radiação eletromagnética
 - Ultra-violeta
 - Visível
 - Infra-vermelho

A energia é repartida:

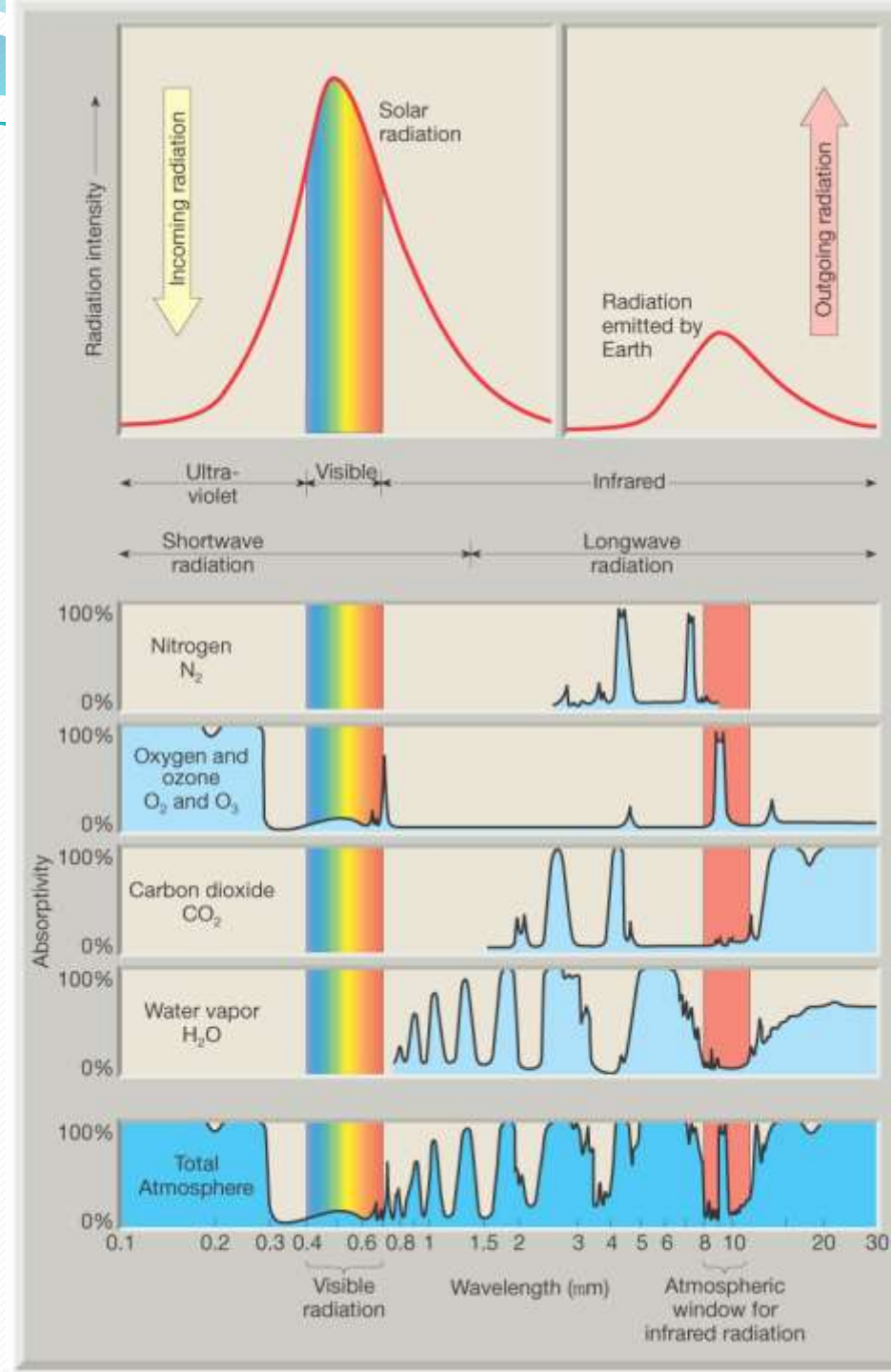
- **30%** é refletida pelas nuvens, pela atmosfera ou pela superfície e volta para o espaço
- **50%** atravessa a atmosfera e é absorvida na superfície
- **20%** é absorvida na atmosfera pelos gases e nuvens



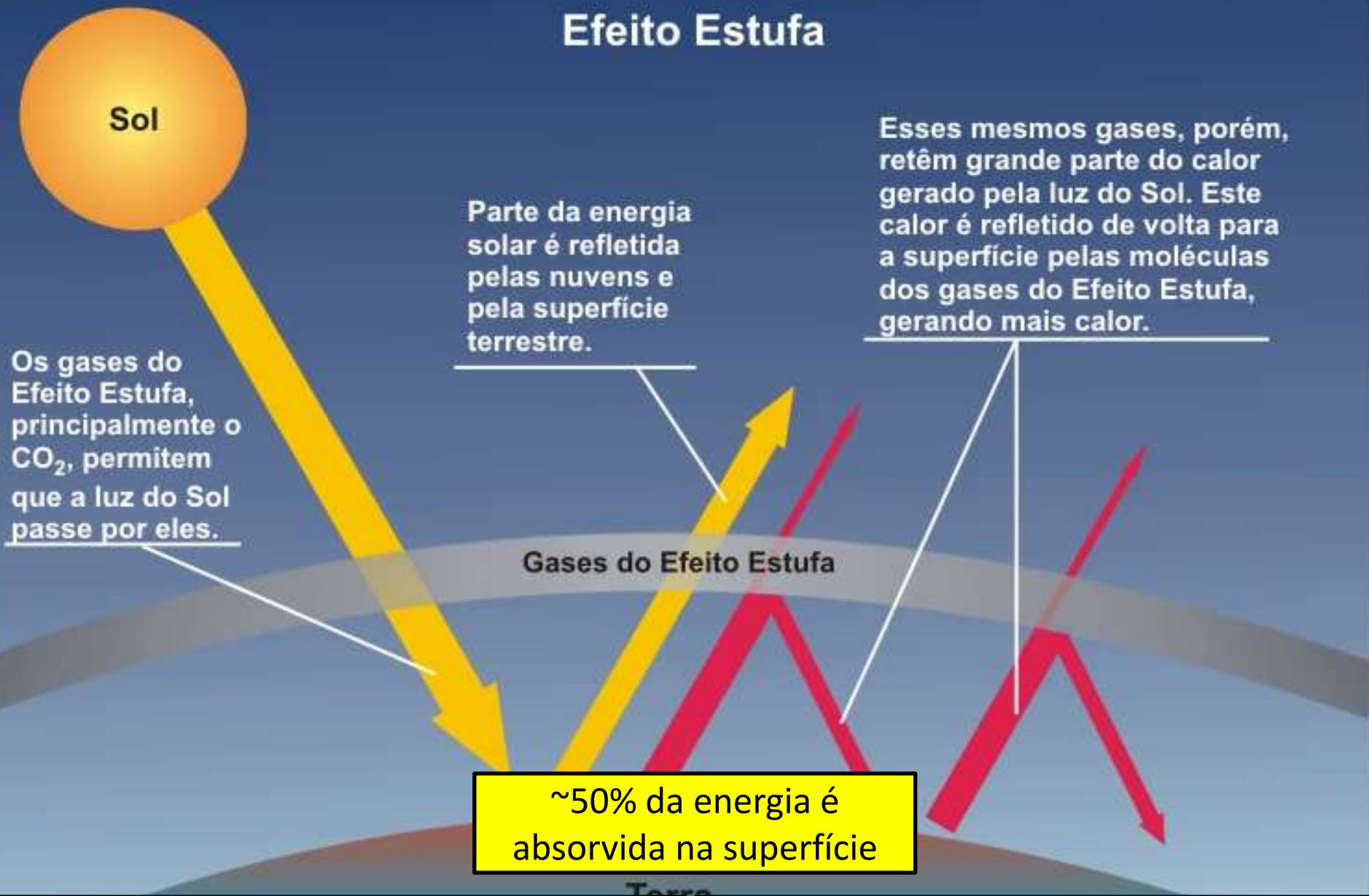
Efeito Estufa

A superfície aquecida perde energia na forma de calor, mas:

- Os gases do efeito estufa:
 - Transparentes para a radiação do Sol
 - Opacos para a radiação (calor) emitido pela Terra



Efeito Estufa



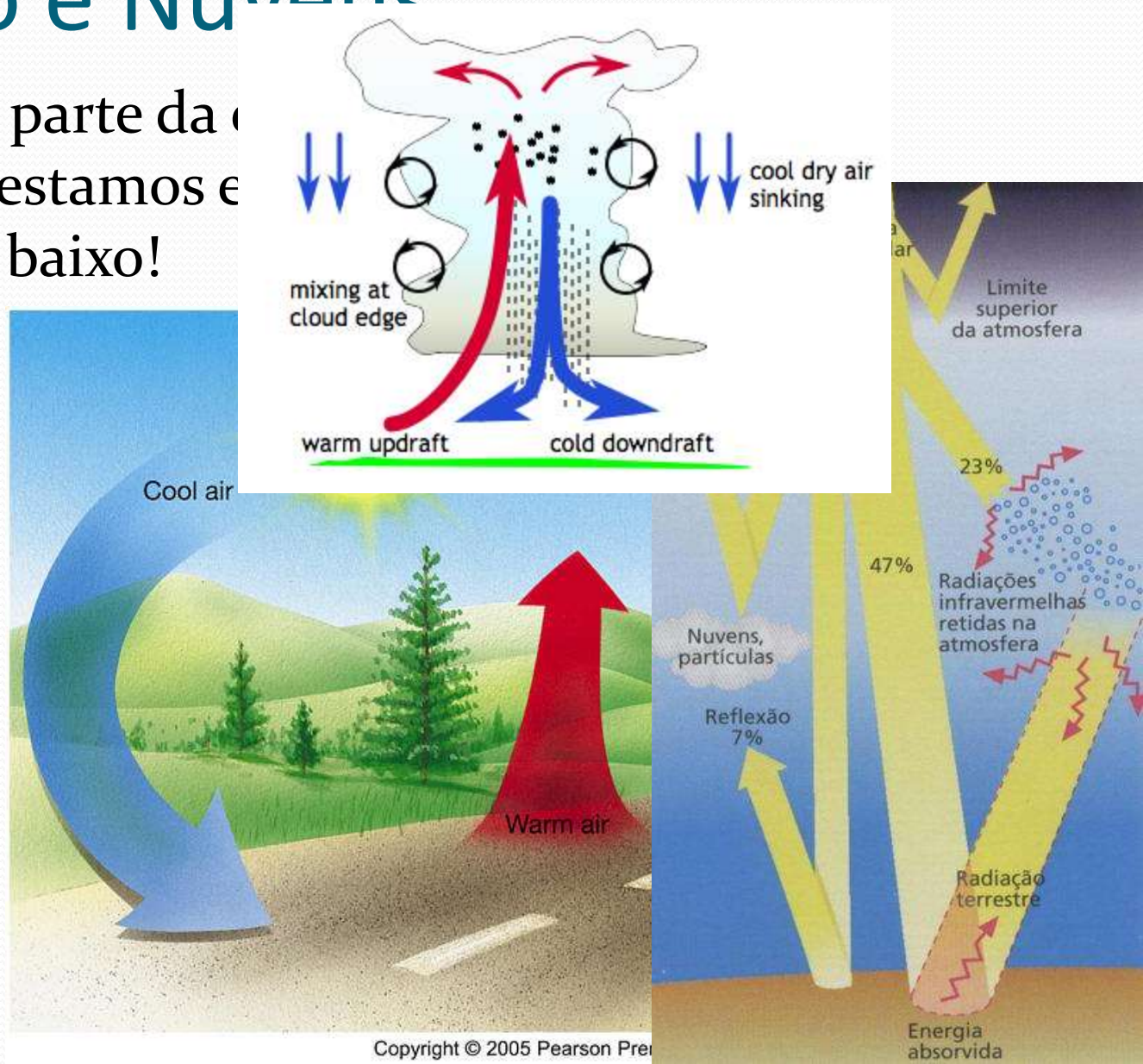
Sem o efeito estufa, a temperatura média seria de apenas -18°C

Com o efeito estufa, fica em torno de +15°C

Convecção e Nuvens

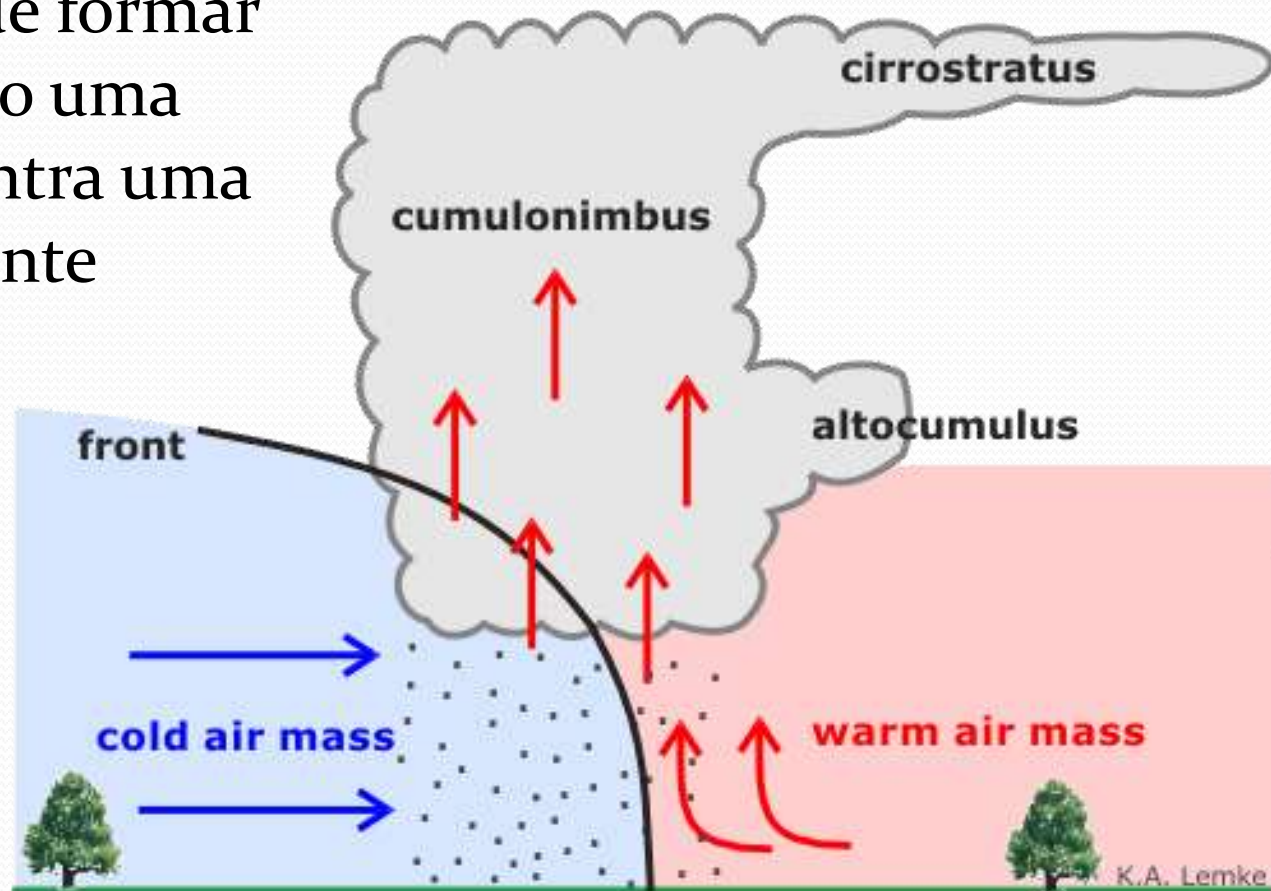
- Como a maior parte da energia é absorvida na superfície, estamos criando uma atmosfera por baixo!

O ar quente é menos denso e sobe, pois o ar frio que está em cima é mais pesado.



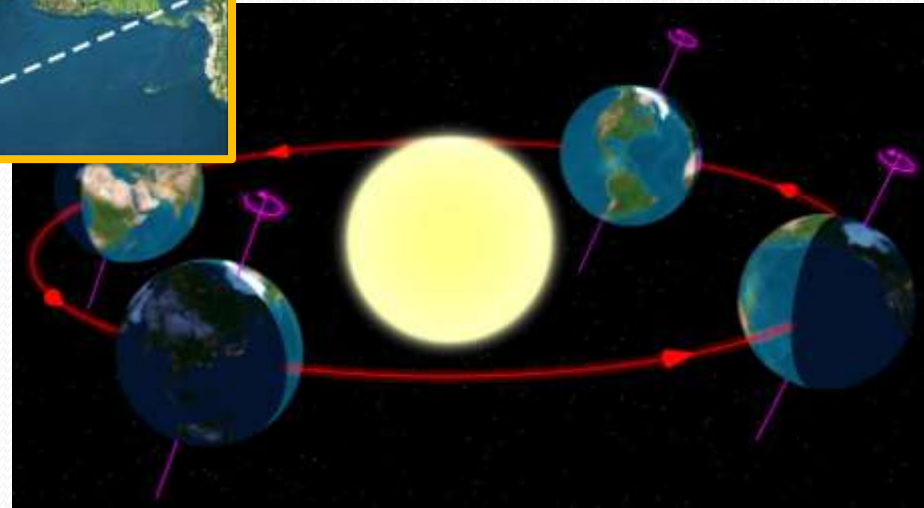
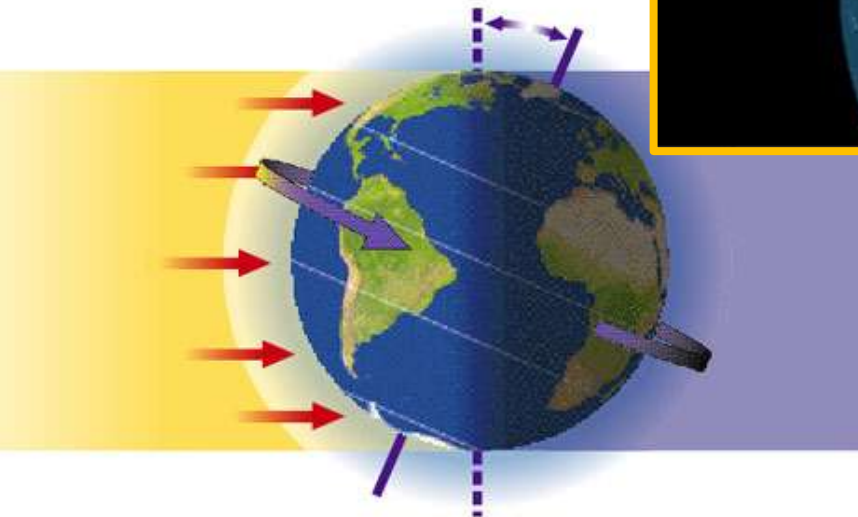
Nuvens e Frentes

- Uma outra maneira muito comum de formar nuvens é quando uma frente fria encontra uma massa de ar quente

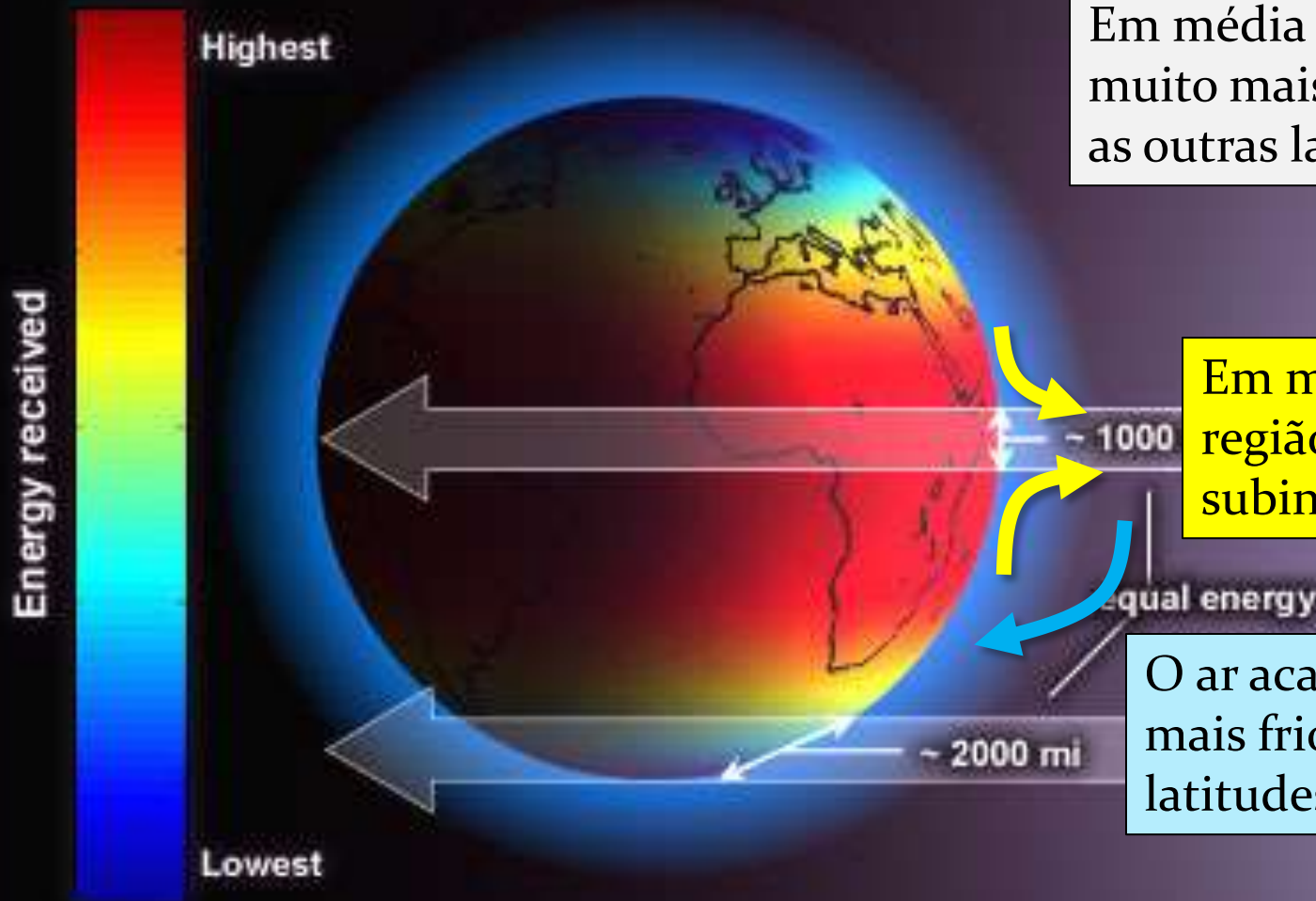


Distribuição de energia

- A energia absorvida na superfície não é distribuída igualmente em todo o planeta!



Mean Annual Global Insolation

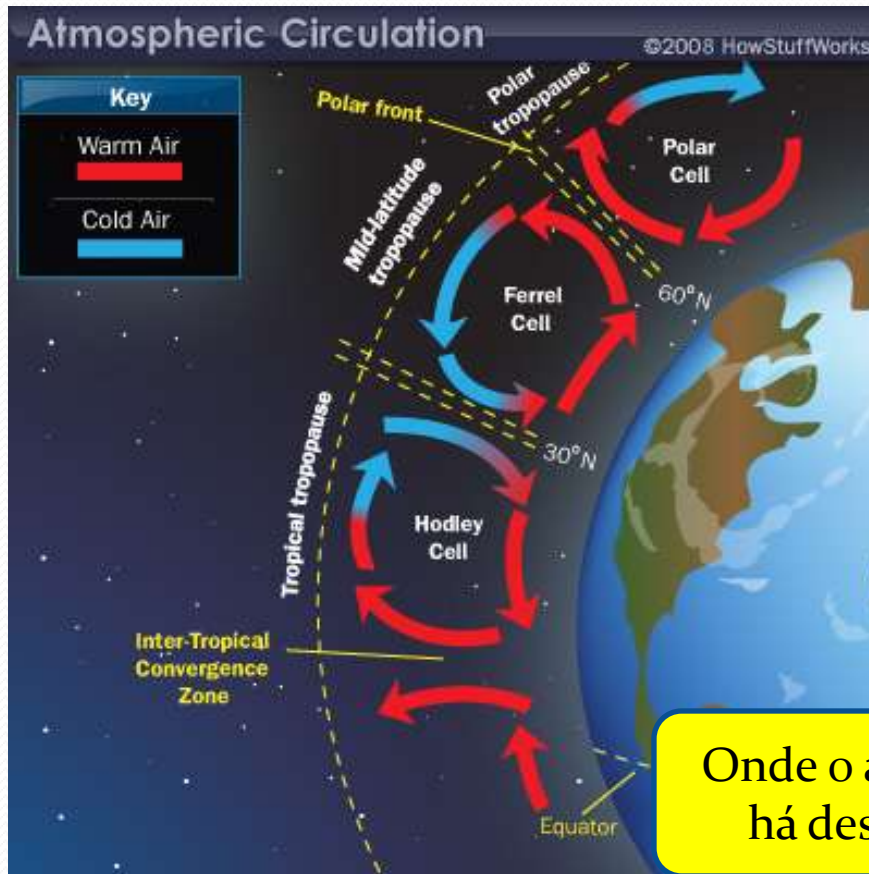


Em média o equador recebe muito mais energia do que as outras latitudes!

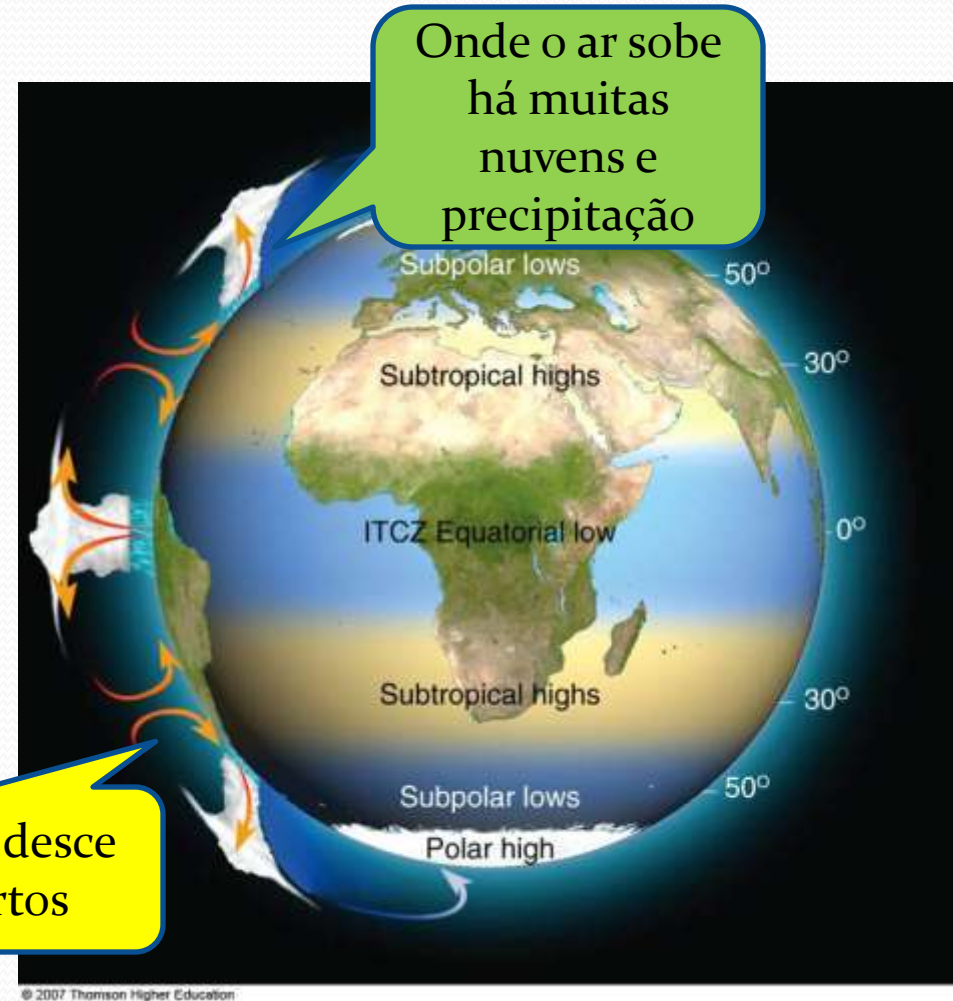
Em média o ar nessa região está sempre subindo!

O ar acaba descendo mais frio em latitudes mais altas

Circulação de grande escala

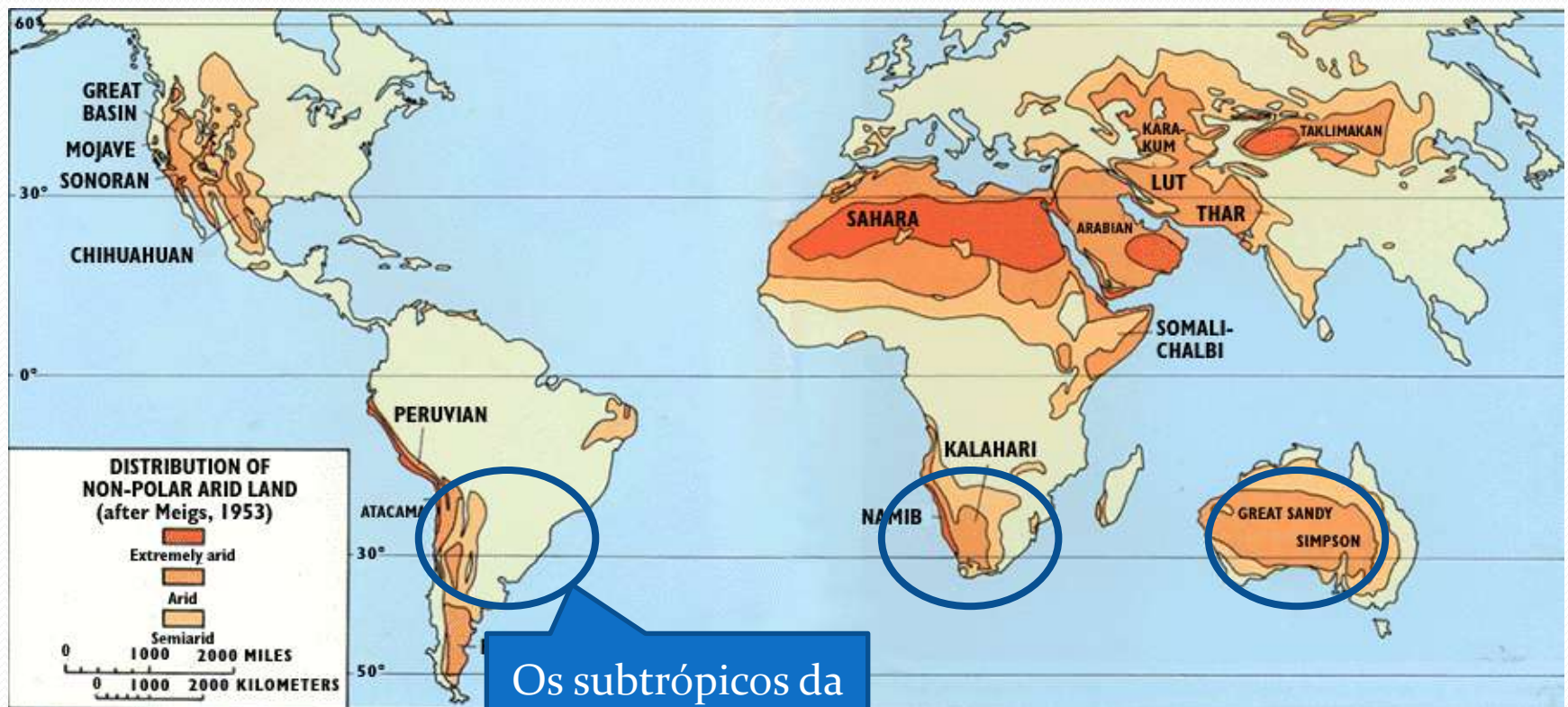


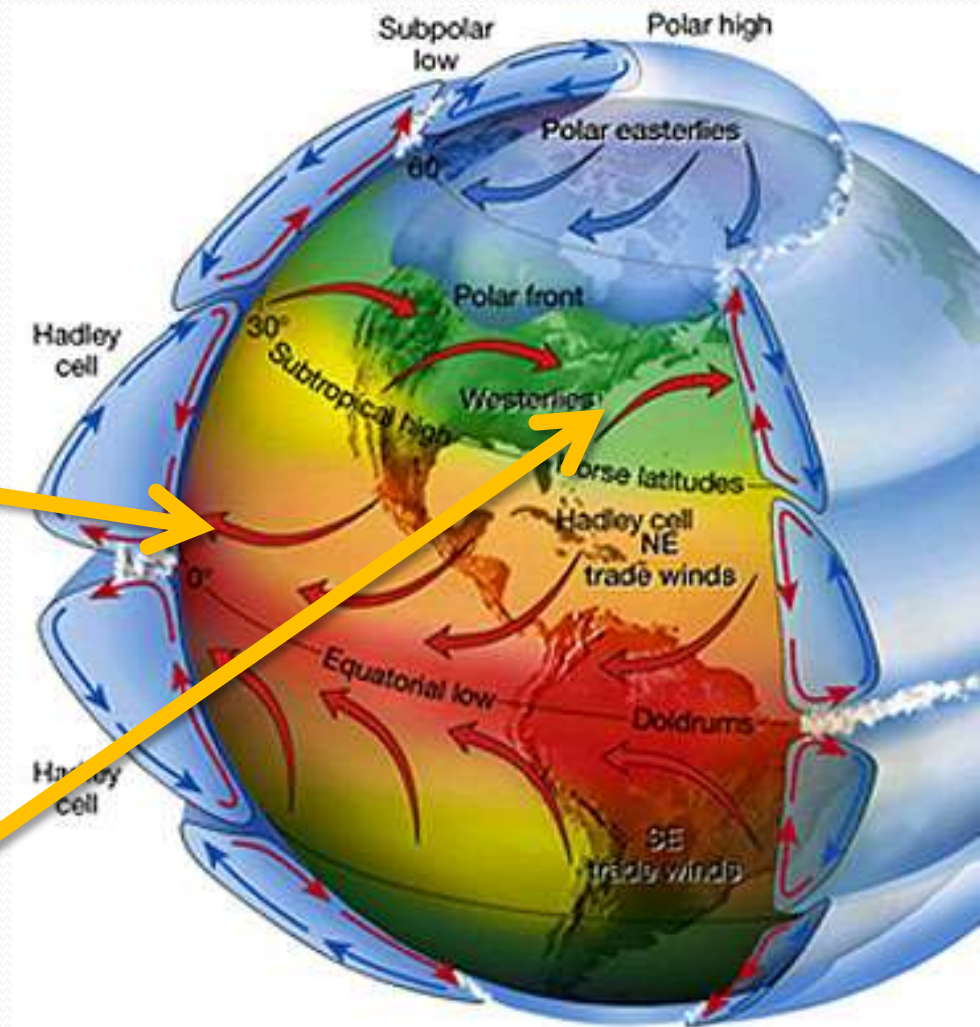
Onde o ar desce
há desertos



Localização dos grandes desertos

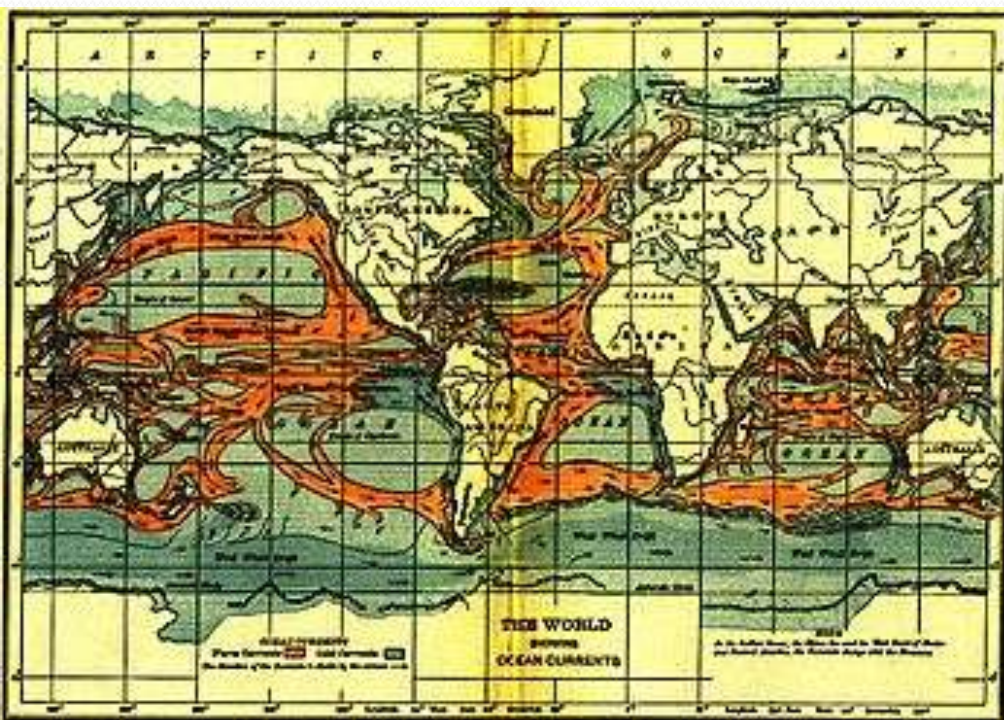
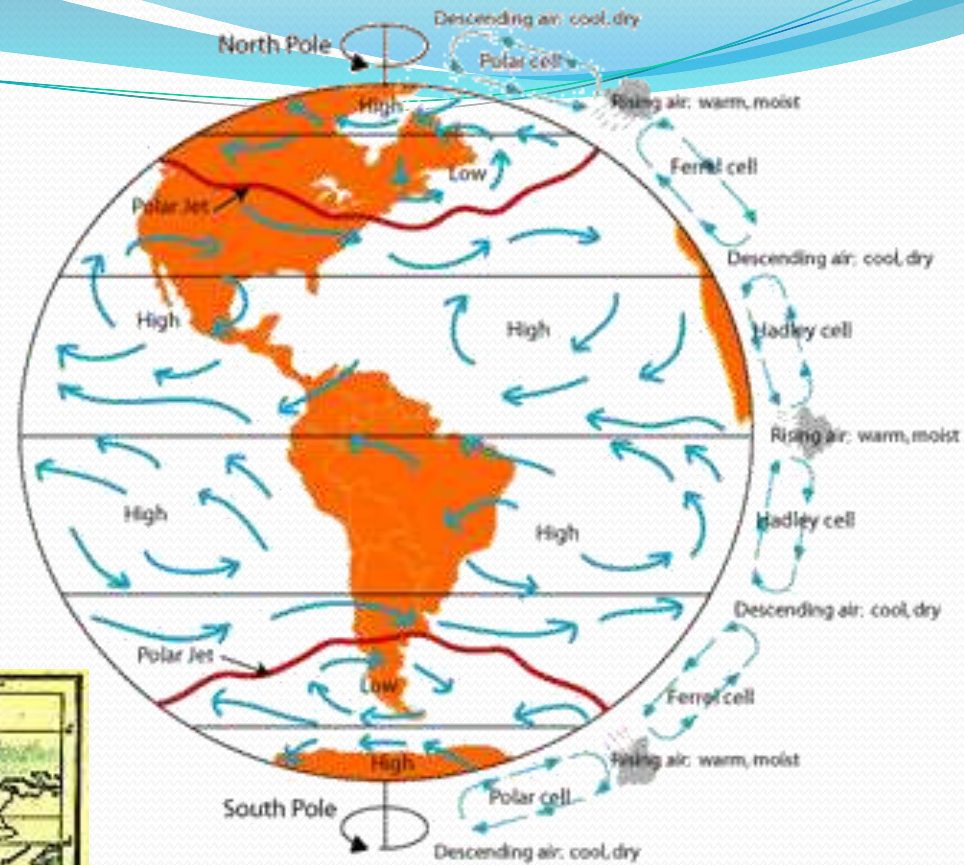
- Nas latitudes onde o ar desce seco e frio, há pouca precipitação e as regiões são desérticas.





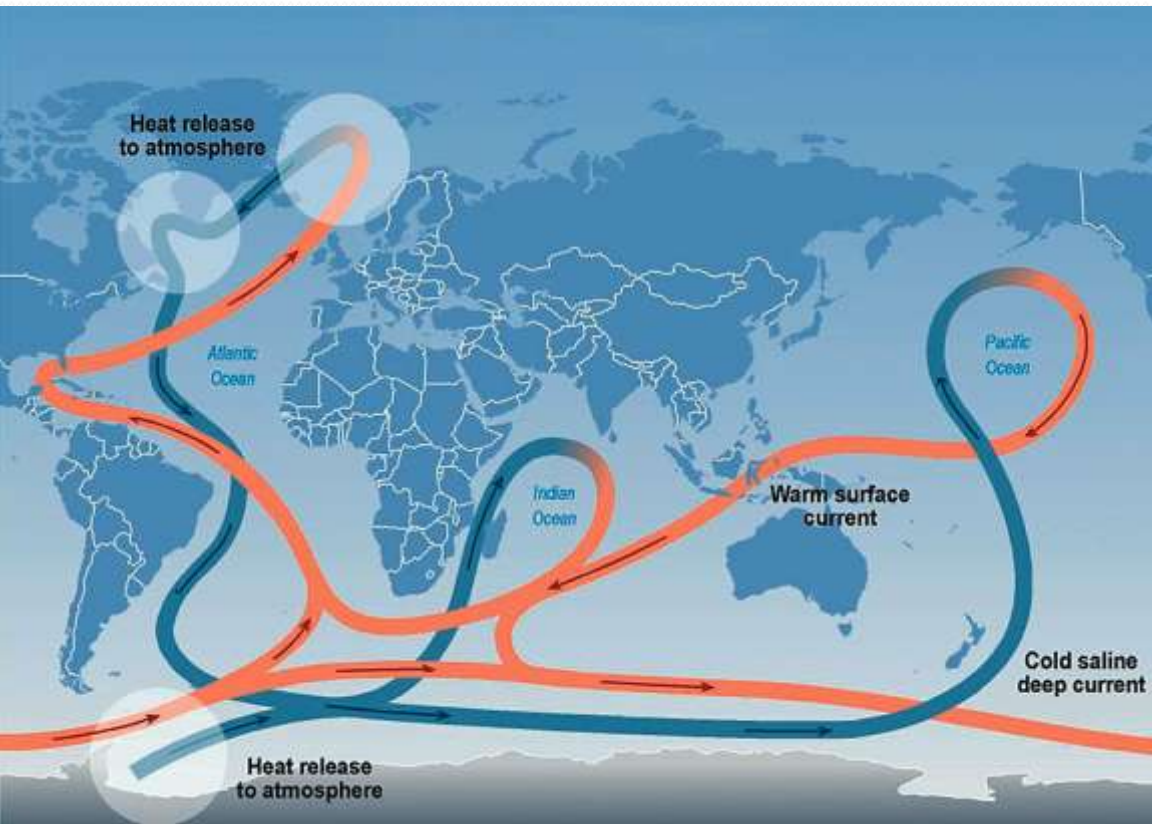
Circulação Global

- Os ventos próximos da superfície forçam o surgimento de correntes oceânicas



Circulação Oceânica

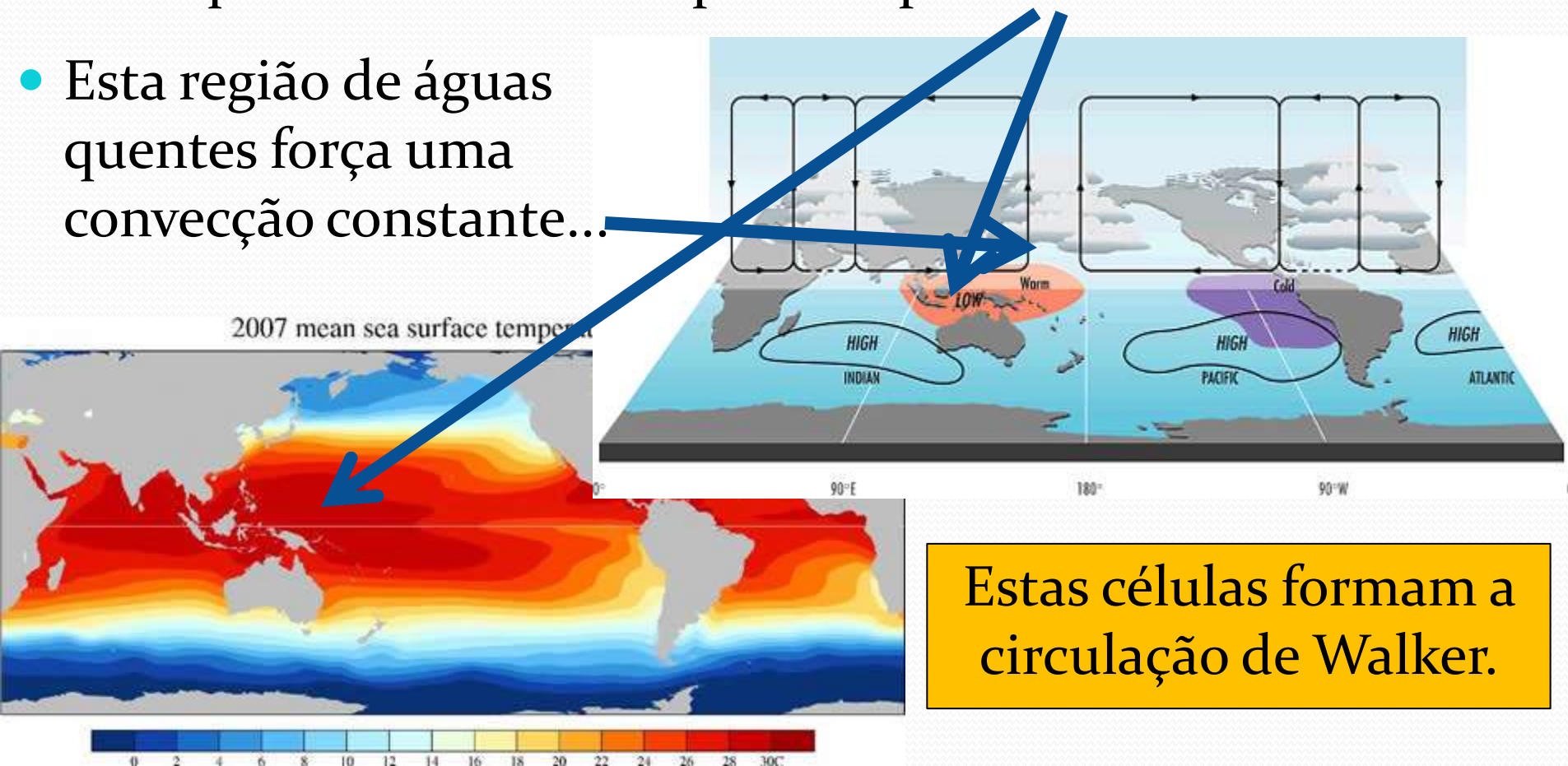
- As correntes oceânicas existem não só na superfície, mas também em águas profundas. É como um grande cinturão.



- As água superficiais são aquecidas pelo sol e levam a energia para outra regiões
- Por causa dessa corrente, a Europa é bem mais quente que o Canadá.

Circulação de Walker

- Devido a presença constante dos ventos alísios, a água mais quente vai sendo empurrada para oeste.
- Esta região de águas quentes força uma convecção constante...

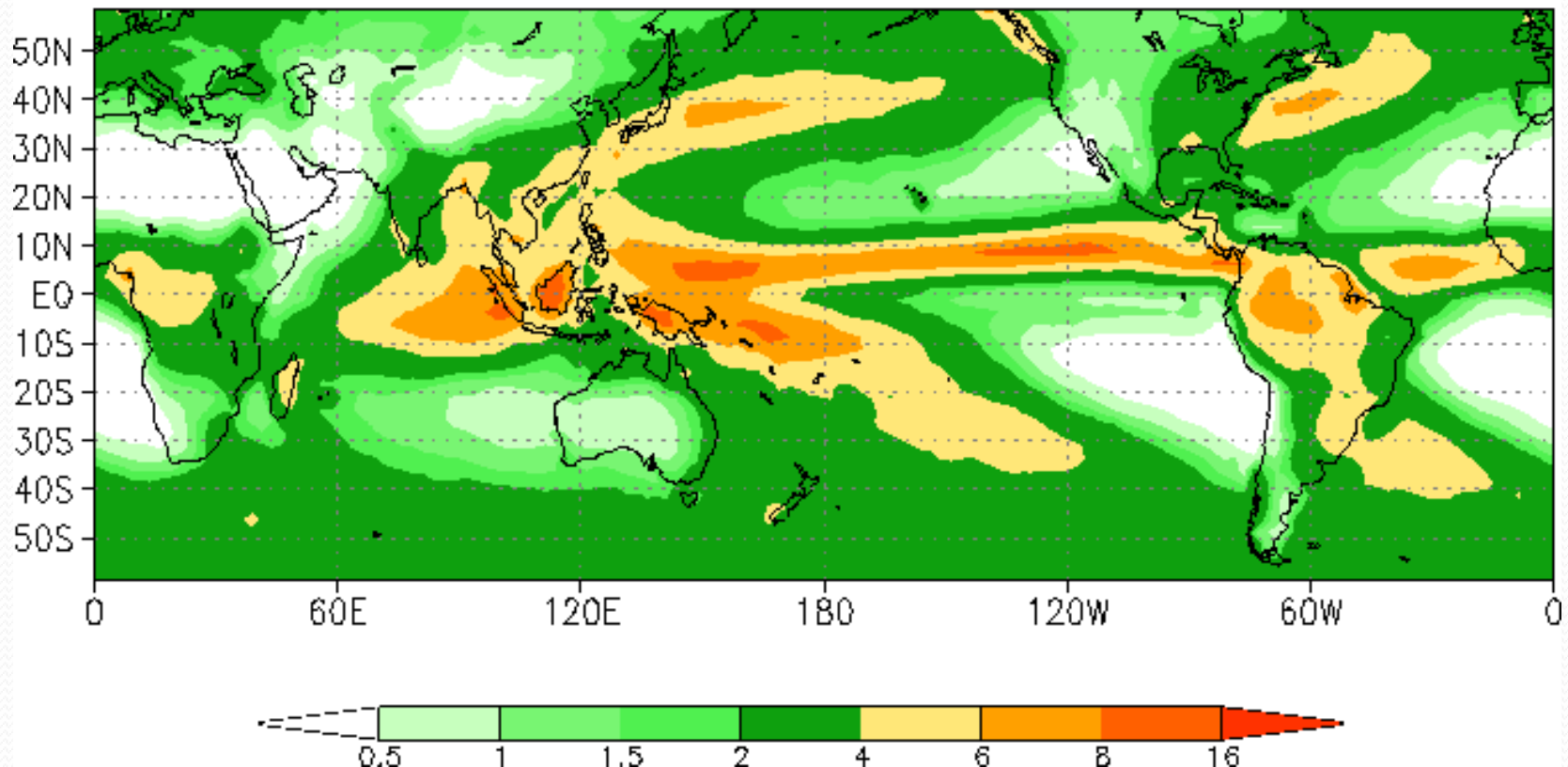


Estas células formam a circulação de Walker.

Precipitação

- A distribuição global dos ventos, e principalmente de onde eles sobem e descem, determinam em grande parte a distribuição da precipitação

Pentad mean Precipitation (mm/day): Annual mean



Resumo:

Circulação da Atmosfera e dos Oceano

- A terra recebe energia do sol, a maior parte chega na região tropical e é absorvida na superfície.
- Esse aquecimento desigual força o surgimento de ventos na atmosfera e de correntes no oceano.
- **Esta circulação redistribui a energia!**

A teoria que explica o movimentos dos fluídos é chamada de dinâmica dos fluídos.



O que é um modelo numérico?



Quais equações este modelo resolve??



Como o sistema climático funciona?

Equações de Din. dos Fluídos

- A principal equação de dinâmica dos fluídos é a de Navier-Stokes. Derivada a partir da 2ª lei de Newton, estabelece a conservação do momento

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

Difusão

Fontes e sumidouros de
momento: 2ª lei de
Newton

Conservação de Massa

- A massa é conservada, então $d\rho/dt=0$, onde

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$$

Transporte do gradiente

- Em termos da concentração específica, a equação de conservação resulta semelhante a conservação de momento:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q + D_q \nabla^2 q + F_q - S_q$$

Fontes e sumidouros de vapor

Difusão molecular

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

Fontes e sumidouros de momento: 2ª lei de Newton

Para o vapor de água

$$D \approx 0.2 \text{ cm}^2/\text{s}$$

- Na troposfera e na estratosfera, o termo de difusão é desprezível pois o livre caminho médio das moléculas é muito pequeno.

Mov. Browniano
(Einstein)

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2D} = \frac{(1\text{m})^2}{2 \cdot 0.2\text{cm}^2 / \text{s}} \approx 1.5\text{dias}$$

- Assim:

$$\frac{dq}{dt} = F - S$$

- A forma lagrangeana (d/dt) muito simples é o que está nas bases dos modelos de parcela.

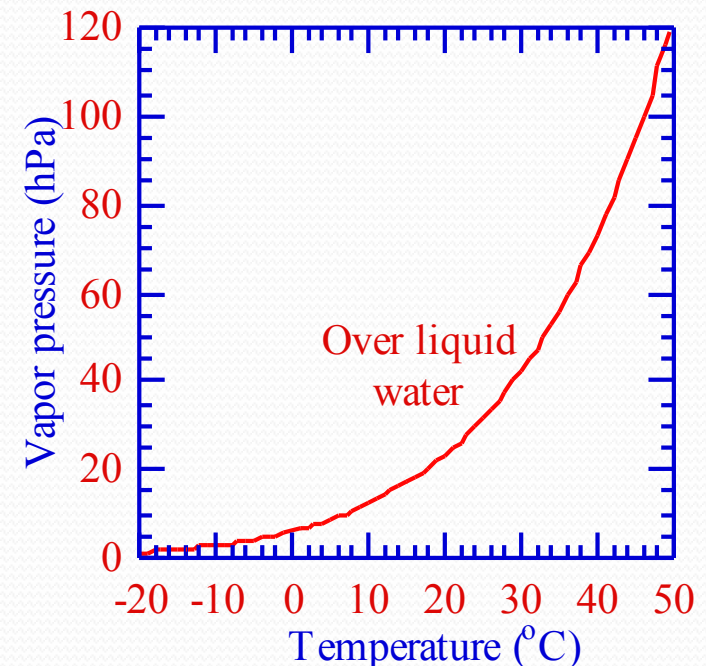
Equação de Clausius-Clapeyron

- A pressão de vapor de saturação varia com a temperatura:

$$\frac{dp_{v,s}}{dT} = \frac{\rho_{v,s}}{T} L_e$$

- E podemos encontrar uma expressão para ela:

$$p_{v,s} = 6.112 \exp\left(\frac{17.67T_c}{T_c + 243.5}\right)$$

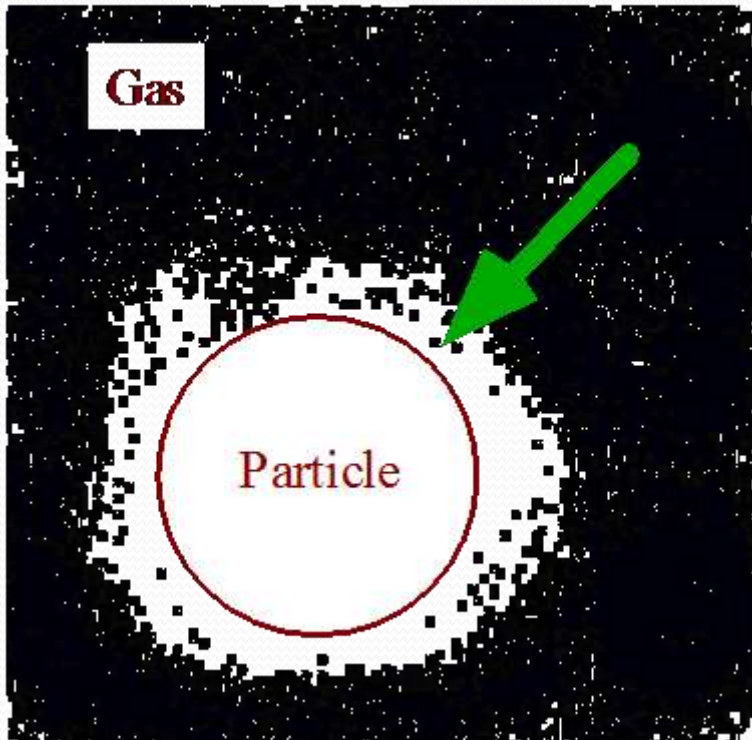


Condensação/Evaporação

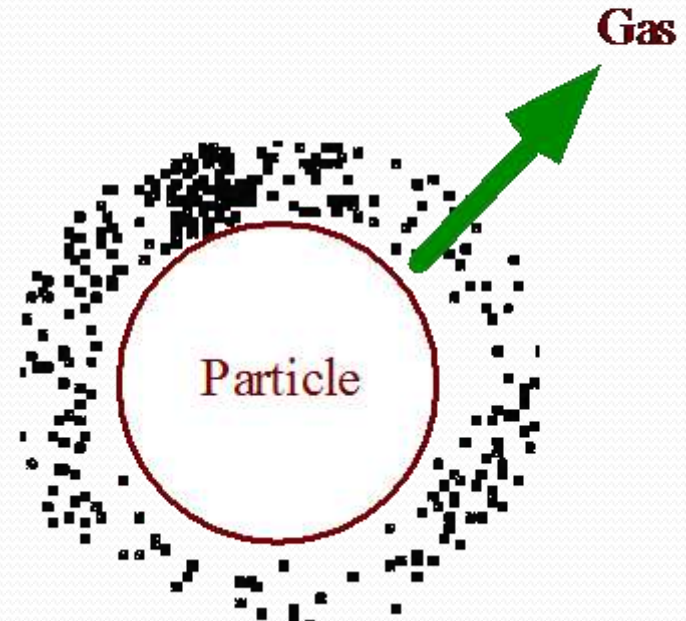
Condensação para $p_v > p_{v,s}$

Evaporação para $p_v < p_{v,s}$

Condensation

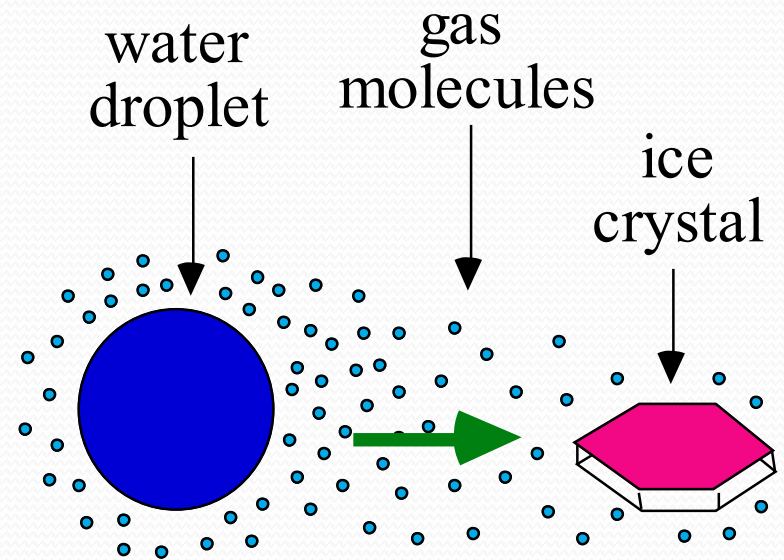
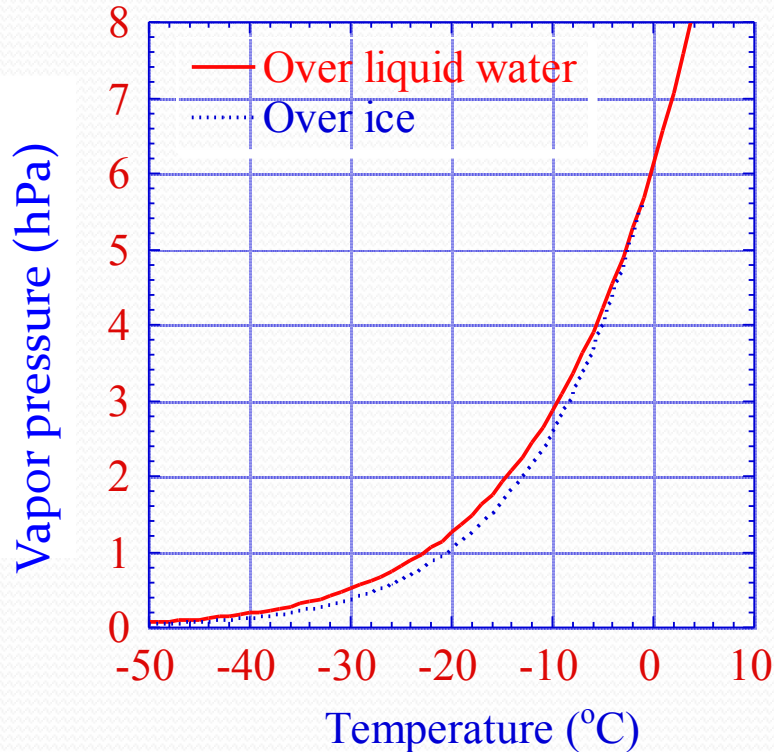


Evaporation



Formation of Rain in Cold Clouds

Ice Crystal (Bergeron) Process



- $p_{v,s}$ sobre gelo é menor que sobre água
- As gotas evaporam e o vapor flui para os cristais

1a lei da termodinâmica

- Não vamos mostrar toda a dedução, mas podemos definir uma temperatura potencial virtual

$$\theta_v = T_v \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p_a} \right)^\kappa$$

- Que já inclui a variação com a pressão e escrever a equação termodinâmica resolvida pelos modelos

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{1}{c_p^d} \frac{\theta_v}{T_v} \frac{dQ}{dt}$$

Temperatura Virtual

- Assim, a equação de estado para o ar úmido pode ser escrita de duas maneiras:

$$p_a = \rho_a R_m T = \rho_a R' T_v$$

- T_v é a temperatura necessário para o ar seco ter a mesma pressão e densidade do ar úmido.

$$T_v = T \frac{R_m}{R'} = T \frac{1 + \omega_v / \varepsilon}{1 + \omega_v} = T \left(1 + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} q_v \right) = T (1 + 0.608 q_v)$$

Equação de estado do ar úmido

Pressão total é dada pela soma da pressão de ar seco e vapor:

$$p_a = p_d + p_v = \rho_d R' T + \rho_v R_v T = \rho_a R' T \frac{\rho_d + \rho_v R_v / R'}{\rho_a}$$

Juntando os termos, temos:

$$p_a = \rho_a R' T \frac{1 + \omega_v / \varepsilon}{1 + \omega_v} \quad \text{onde:} \quad \varepsilon = \frac{R'}{R_v} \quad \omega_v = \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

E assim podemos escrever a pressão total como:

$$p_a = \rho_a R_m T$$

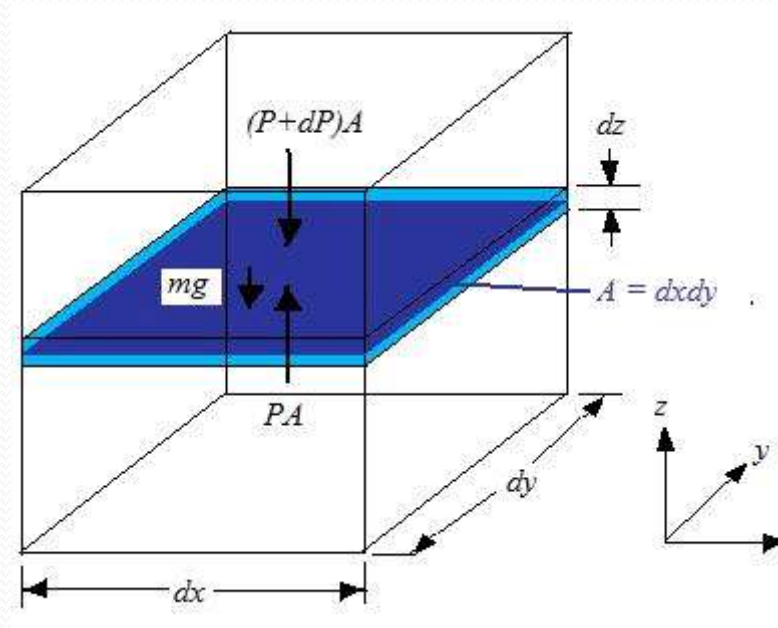
Onde a constante dos gases para o ar úmido é:

$$R_m = R' \frac{1 + \omega_v / \varepsilon}{1 + \omega_v} = R' (1 + 0.608 q_v)$$

Equação Hidrostática

- É a equação de movimento na ausência de aceleração verticais. É dada pelo equilíbrio entre a força gradiente de pressão e a gravidade

$$dp_a = -\rho_a g dz$$



Algumas Equações da atmosfera

$$dp_a = -\rho_a g dz$$

$$p_a = \rho_a R' T_v$$

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \frac{1}{c_p^d} \frac{\theta_v}{T_v} \frac{dQ}{dt}$$

$$T_v = T(1 + 0.608 q_v)$$

$$\theta_v = T_v \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{p_a} \right)^\kappa$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

+ Reações químicas
+ Aerossóis

Equações de Din. dos Fluídos

Diferenciais!

- Estas equações juntas podem descrever o movimento
 - da atmosfera,
 - das correntes oceânicas,
 - da água em um cano,
 - do ar passando sobre uma asa
 - das estrelas em uma galáxia

Equações Diferenciais



Equações Diferenciais

- Classificação quanto ao **número de variáveis**
 - Ordinárias = só tem uma variável independente

$$\frac{dG(t)}{dt} = F(t)$$

- Parciais = tem mais de uma variável independente

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial uG(t, x)}{\partial x} = 0$$

Equações Diferenciais

- Classificação quanto ao **grau e ordem**
 - Ordem = nível da derivada mais alta
 - Grau = potência da derivada mais alta

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial uG}{\partial x} = D \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

2ª ordem e 1º grau

Equações Diferenciais

- Classificação quando a **homogeneidade**
 - Homogêneas = não aparecem as variáveis independentes explicitamente

$$\frac{\partial G}{\partial t} = D \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

- Não homogêneas = variáveis independentes explícitas

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 3t^2$$

Equações Diferenciais

- Classificação quando a **linearidade**

- Lineares = a variável dependente e suas derivadas só aparecem em termos de 1º grau e não há produto entre elas

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial u G}{\partial x} = 0$$

- Não lineares = existem termos de 2º ou maior grau e/ou produtos entre variáveis dependentes e suas derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Exemplo: atmosfera

- Eq. da conservação e termodinâmica

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q + D_q \nabla^2 q + F_q - S_q$$

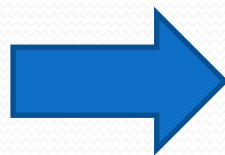
- Parcial
- 2º ordem
- 1º grau
- Homogênea
- Linear**

- Eq de momento (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

- Parcial
- 2º ordem
- 1º grau
- Homogênea
- NÃO-Linear**

$$\sum_j v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$



CAOS



O que é um modelo numérico?



Quais equações este modelo resolve?



Como o sistema climático funciona?

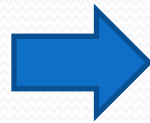
Previsão de Tempo Global

Precisamos:

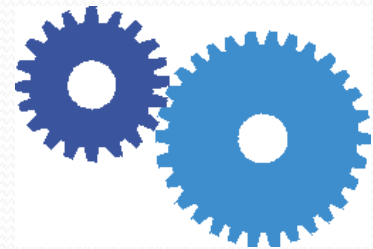
- Equações que descrevem a física da atmosfera
- Escrever um programa para resolvê-las
- Um bom computador



Código fonte:
um texto escrito em
uma linguagem de
programação



Compilador



Programa executável:
Linguagem de
máquina

Previsão de Tempo Global

Precisamos:

- Equações que descrevem a física da atmosfera
- Escrever um programa para resolvê-las
- Um bom computador



Equações Diferenciais: Solução



Dificuldades a frente...

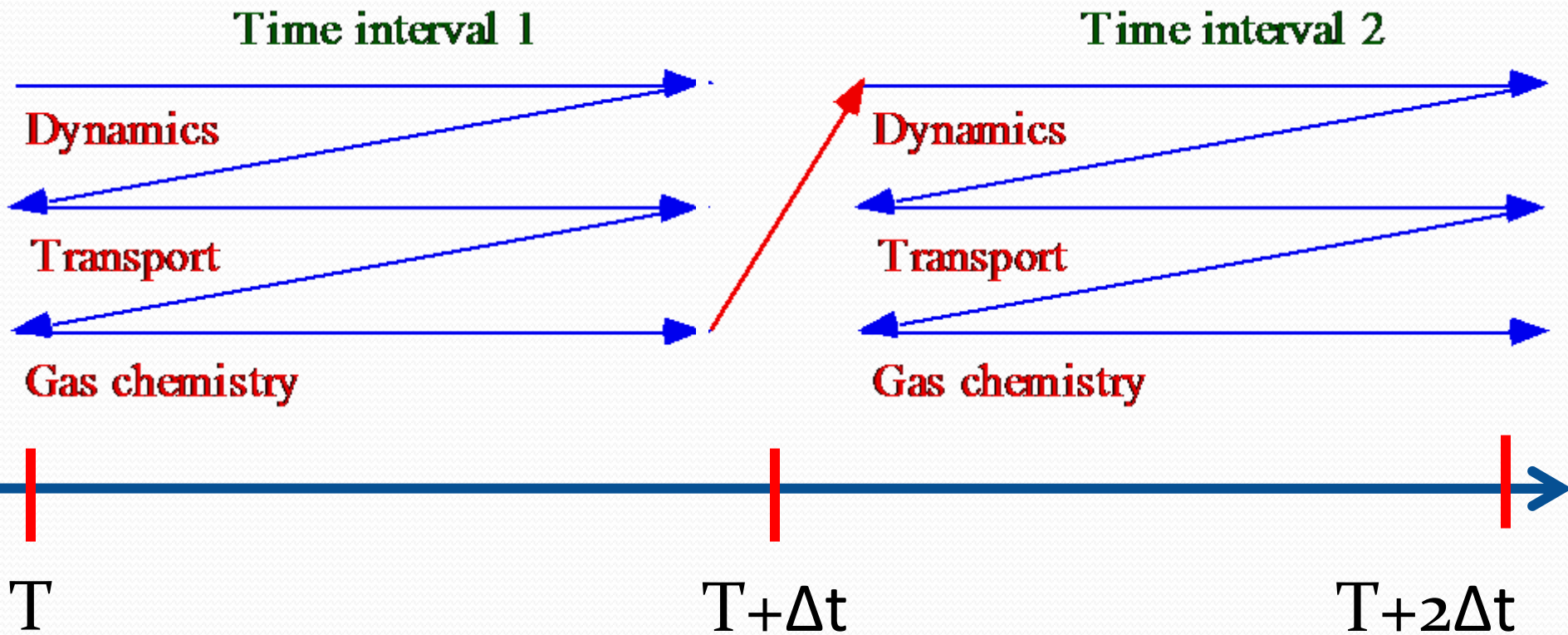
- Como resolver uma equação complicada?

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$

- De uma vez só, ou seja, encontrar $N(x,y,z,t)$?
- Quando temos vários processos físicos acontecendo ao mesmo tempo?
- Dadas as limitações atuais dos computadores ?

Separação de Operadores

- O que se faz é resolver separadamente cada um dos processos. Por exemplo, um modelo numérico calcula separadamente: dinâmica, radiação, convecção, etc...



Separação de Operadores

- Exemplo, a equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$

- Operator-split nos termos de advecção-difusão

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N$$

- Operator-split nos termos forçantes

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Separação de Operadores

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} \approx -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) + D \nabla^2 N$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} \approx \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Resolver estas equações seqüencialmente **é uma aproximação** da solução completa! Este método em particular é chamado de método dos intervalos fracionários.

Alguns modelos trocam a ordem em x,y,z entre dois time-steps para conseguir uma solução mais independente da separação dos operadores.

Separação de Operadores

- Em alguns modelos, como o CPTEC-AGCM, a equação é separada ainda mais:

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx -\nabla \cdot (\mathbf{v}N)$$

Transporte

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx D\nabla^2 N$$

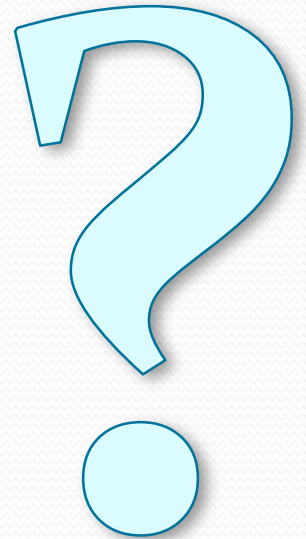
Difusão Molecular

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Física sub-grade

Equações Diferenciais: Solução

- Mesmo para estas equações simples, a solução ainda não é trivial.



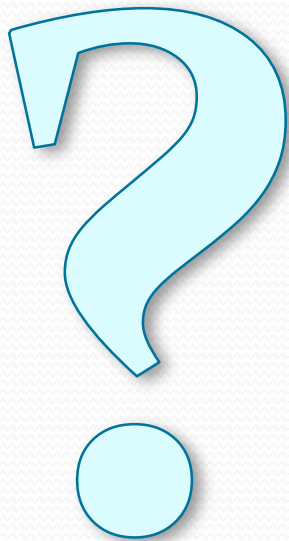
Solução de uma Eq. Dif.

- Para resolvê-las precisamos de condições de contorno. As **CC** podem ser de vários tipos e depende de qual problema estamos resolvendo
- Exemplo:
 - Podemos resolver **$dN/dt=F(t)$** se soubermos **$N_0=N(t=0)$**
 - Este tipo de **CC** é uma condição inicial (**C.I.**) de um problema de valor inicial.

Solução de uma Eq. Dif.

- Quando precisamos da **CC** nas duas extremidades do domínio, temos um problema de valor de contorno.
- Exemplo:
 - Para resolver $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
 - Precisamos de **$u(x, t=0)$** e também **$u(0, t)$** e **$u(L, t)$**
 - Problema de C.I. em **t** e problema de CC em **x**
- Exemplo: o nudging do BRAMS nas fronteiras do domínio

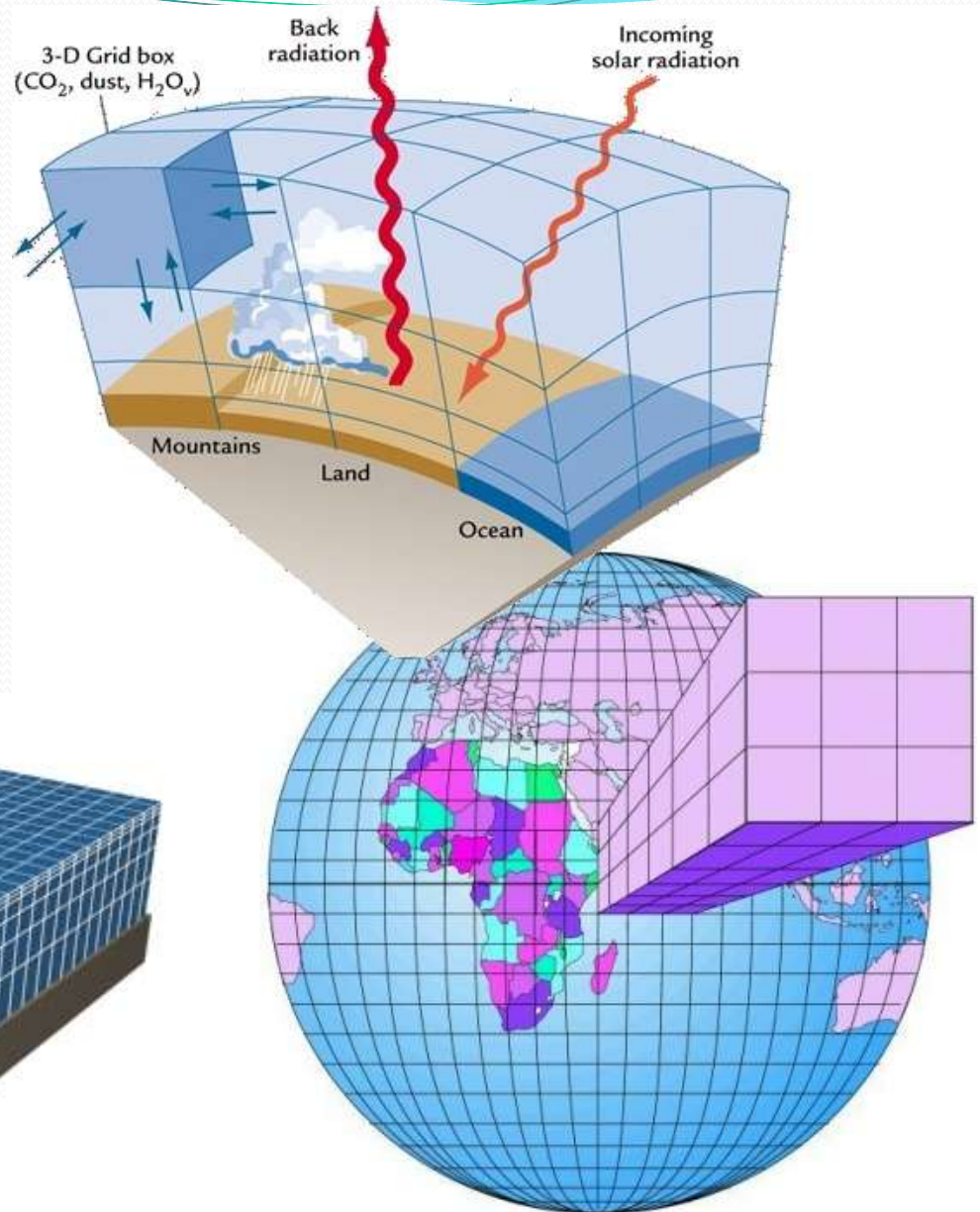
Equações Diferenciais: Solução



- São equações diferenciais e representam uma conservação local!
- São contínuas e válidas em todos os pontos do espaço físico (x,y,z,t)

Como resolver
numericamente?

Discretização



Discretização: Limitações

- Quando discretizamos no tempo e no espaço **temos que usar intervalos finitos** e por isso a solução numérica não representa todos os movimentos da atmosfera.

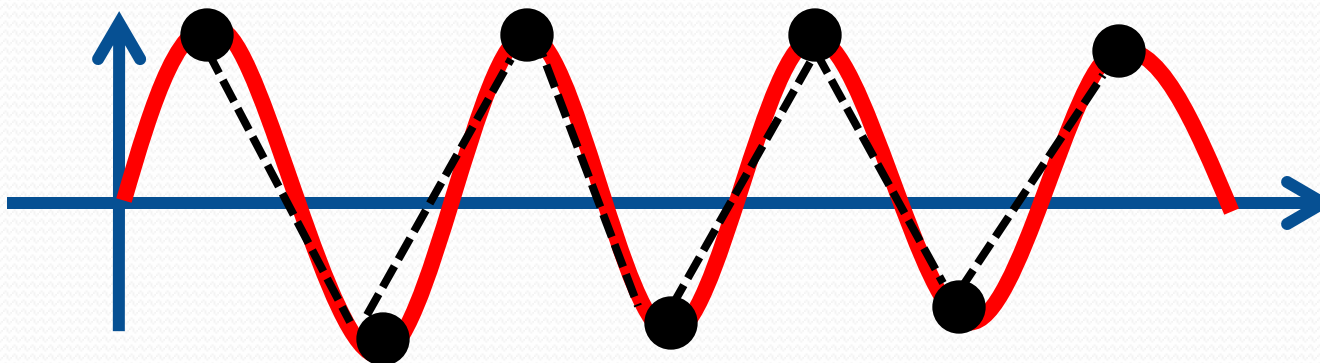
Escala	Δx	Δt
Meso escala	5 x 5 km	5 s
Regional	50 x 50 km	1 min
Global	250 x 250 km	30 min

Sampling Theorem

- Seja $h(t)$ uma função contínua no tempo. Se medimos $h(t)$ a cada Δ segundos, existe uma frequência crítica

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}, \text{ freq de Nyquist}$$

Máxima que pode ser observada com essa amostragem.



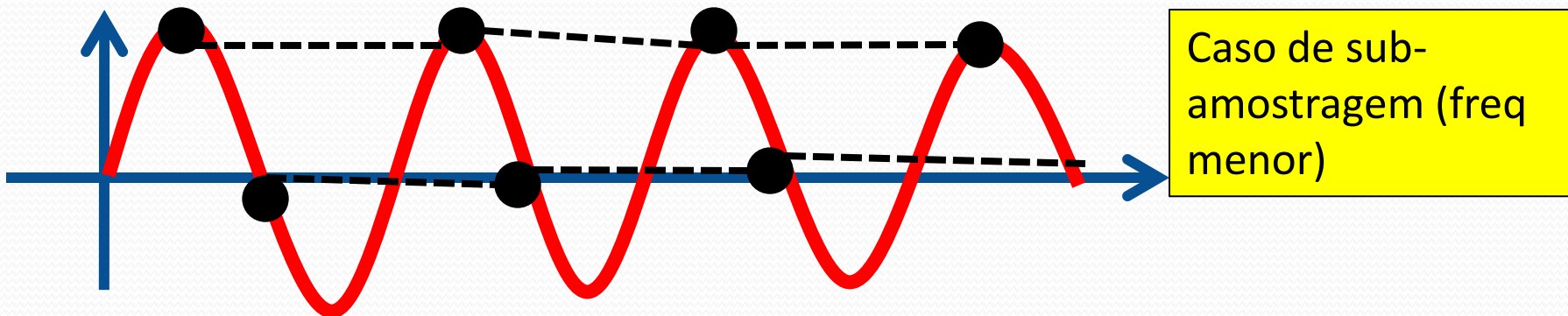
Minimamente amostrado com o dobro da frequência do fenômeno

... Ou teorema de Nyquist

- Seja $h(t)$ uma função contínua no tempo. Se medimos $h(t)$ a cada Δ segundos, existe uma frequência crítica

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}, \text{ freq de Nyquist}$$

Máxima que pode ser observada com essa amostragem.



Teorema

- Seja $h(t)$ e sua transformada de Fourier $H(f)$, se $H(f)=0$ qualquer que seja $|f|>f_c$, então $h(t)$ é completamente determinada se for amostrada em intervalos $\Delta \leq 1/2f_c$.
- Exemplo:

$$f_c^t = \frac{1}{2 \times 30 \text{ min}} = 0.02 \text{ Hz} \Rightarrow T > 1 \text{ hora}$$

$$f_c^x = \frac{1}{2 \times 100 \text{ km}} = 0.005 \text{ km}^{-1} \Rightarrow \lambda > 200 \text{ km}$$

Turbulência


- A equação de Navier-Stokes é não linear

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

- Isso produz caos na solução $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ e implica em escoamento turbulento. Apenas em condições especiais o fluxo é laminar.
- $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ flutua aleatoriamente em escalas menores que **1mm** e mais rápidas que **10Hz**! Impossível de resolver nos modelos (até mesmo em um **L.E.S.**)

Anemômetro sônico

GILL
INSTRUMENTS

Language:  

[Home Page](#) | [About Us](#) | [Site Map](#) | [News & Press Releases](#) | [Contact](#)

METEOROLOGICAL INSTRUMENTS

APPLICATIONS

LITERATURE & SUPPORT

EXHIBITIONS

DISTRIBUTORS

CONTACT

[Home Page](#) → [Meteorological Instruments](#) → [Anemometers](#) → [HS Range](#) → [HS-50](#)

Horizontal-Head Anemometer HS-50™

- ✓ Precision 3-axis ultrasonic anemometer
- ✓ 40m/s wind speed, 0-359° wind direction
- ✓ U, V, W Vector Outputs
- ✓ 50Hz Output Rate
- ✓ Horizontal head for Minimal Flow Disturbance

GET A QUOTE



Research Anemometer Enquiry

Send Online Enquiry



Send Email Enquiry

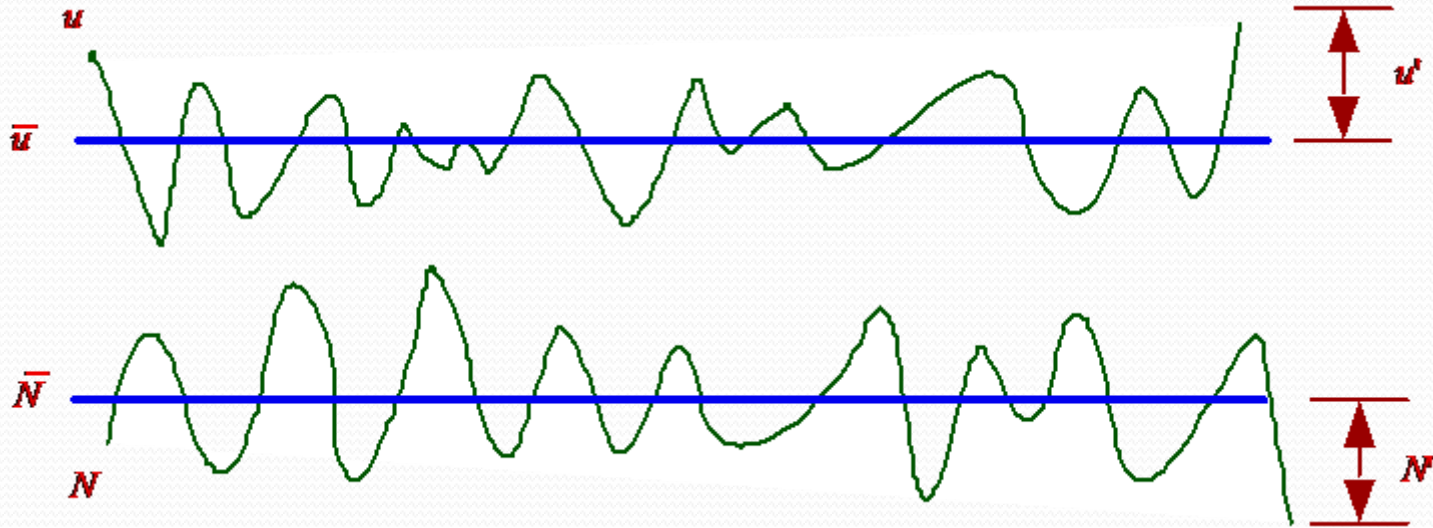


Tel: +44 (0)1590 613500

Research Anemometer Photos



A média de Reynolds



A concentração exata em (x, y, z, t)

$$N = \bar{N} + N'$$

Onde a média no volume do grid-box e no time step é

$$\bar{N} = \frac{1}{\Delta t \Delta Vol} \int_t^{t+\Delta t} \int_V^{V+\Delta V} N(\vec{r}, t) \cdot dt \cdot dVol$$

A média de Reynolds

- \overline{N} depende do grid-box e do passo de tempo e é o valor previsto/calculado pelo modelo!
- Por definição \mathbf{N}' flutua em torno de $\mathbf{0}$ e $\overline{\mathbf{N}'} = \mathbf{0}$

Podemos fazer a mesma decomposição para a velocidade:

$$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{V}'$$

E então substituímos ambas nas equações originais

$$\frac{\partial \overline{N} + N'}{\partial t} = -\nabla \cdot \left((\overline{N} + N')(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \right) + D_N \nabla^2 (\overline{N} + N')$$

Expandindo a equação

- Expandindo e tomando a média (\mathbf{x} e \mathbf{t}), para o 1º termo:

$$\overline{\frac{\partial \bar{N} + N'}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\bar{N}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{N'}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\bar{N}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{N}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t}$$

- Fazendo o mesmo para os demais termos, temos:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' N'}) + D \nabla^2 \bar{N} = F - S$$

Advecção pelo vento
médio

Fluxo turbulento
cinemático. É o efeito
sub-grade !!

Expansão turbulenta

A difusão turbulenta é muito maior que a molecular, então sobra apenas:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' N'}) = F - S$$

Para a equação da continuidade concentração específica

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{q} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \overline{\mathbf{v}' q'}) = F - S$$

Para a equação da continuidade em densidade

$$\frac{\partial \bar{\rho}_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{\rho}_a) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \rho'_a}) = 0$$

Precisamos
parametrizar!!

Parametrização

- O modelo resolve e conhece apenas os valores médios em cada grid-box, \mathbf{v} e \mathbf{q} , como então podemos estimar o fluxo turbulento $\langle \mathbf{v}'\mathbf{q}' \rangle$??
- Fazendo uma analogia com a lei de Fick

$$\mathbf{F}\psi = -D\nabla\psi$$

- Assume-se que o fluxo turbulento é proporcional ao gradiente (**teoria K** ou teoria do transporte dos gradientes)

$$\overline{u'q'} \propto \nabla q$$

Teoria K

O fluxo turbulento de um parâmetro é relacionado ao gradiente do valor médio do parâmetro. Assim, os termos do fluxo cinemático turbulento ficam:

$$\overline{u'N'} = -K_{h,xx} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}, \text{ em } x$$

Onde K_h é um coeficiente de difusão turbulenta (Para energia e momento: $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$). Assim,

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \bar{N}) + F - S$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{q} = \frac{1}{\rho_a} (\nabla \cdot \rho_a \mathbf{K}_h \nabla) \bar{q} + F - S$$

Matriz de difusão

- K_h é a matriz de difusão e K_x , K_y e K_z são os coeficientes de difusão turbulenta.

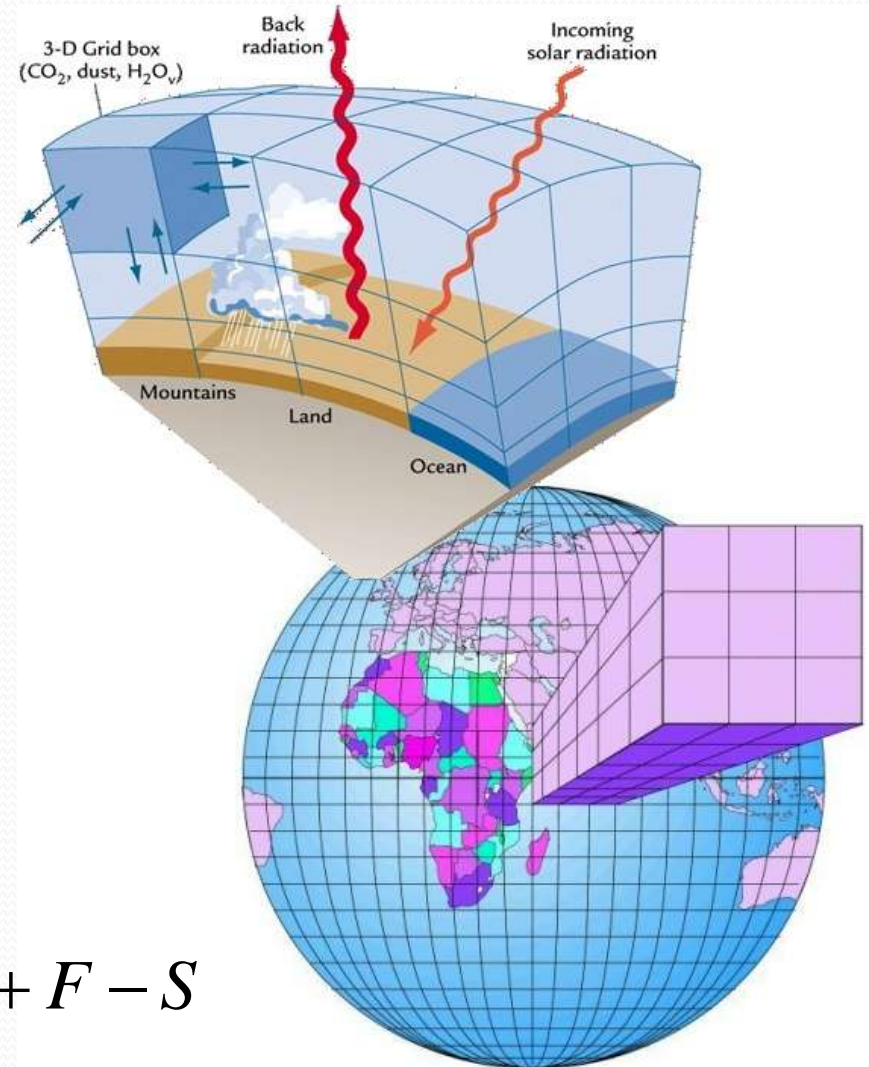
$$\mathbf{K}_h = \begin{bmatrix} K_{h,xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{h,yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{h,zz} \end{bmatrix}$$

- Os termos cruzados dão uma covariância entre o transporte turbulento em direções diferentes e em geral são assumidos nulos.
- A diagonal dá o transporte do gradiente devido a mistura turbulenta

O que falta?

- Decompomos o fluxo em torno da média do grid-box...
- ...mas ainda temos uma EDP “contínua”.
- Como resolver as derivadas?

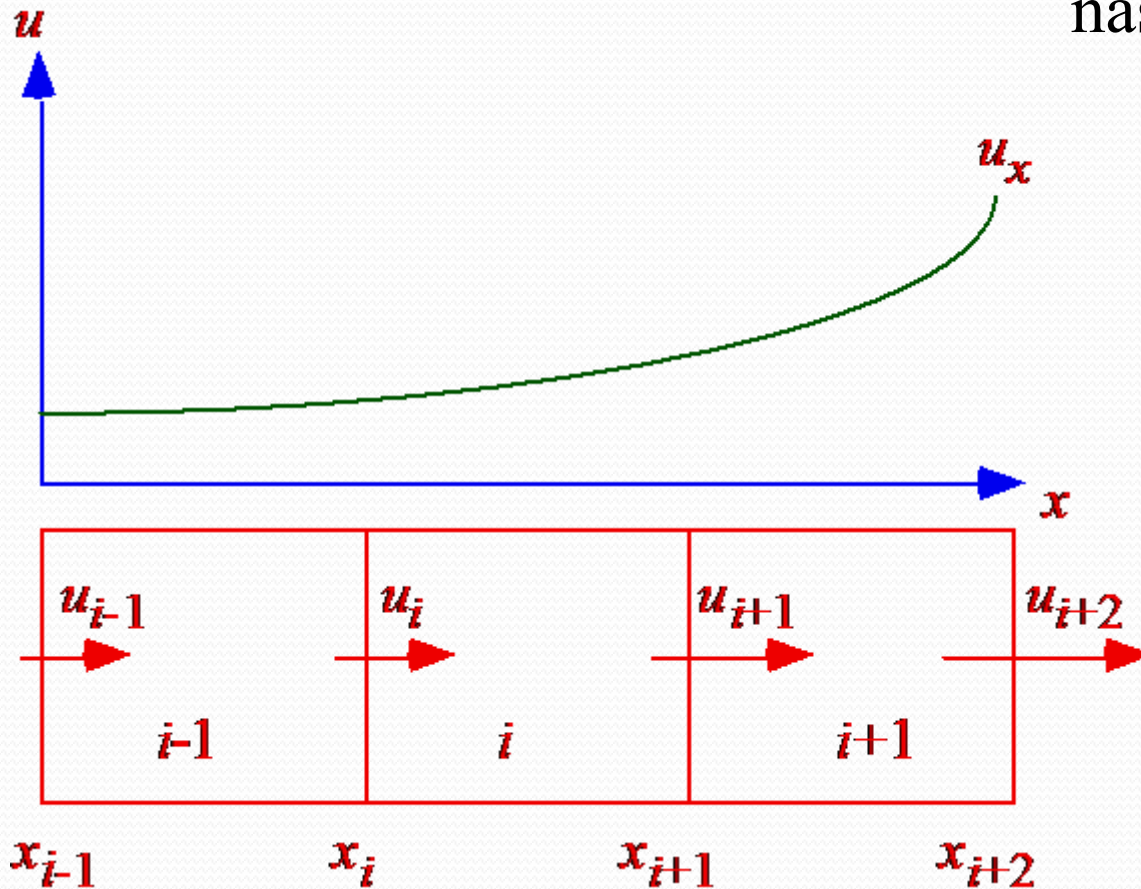
$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{q} = \frac{1}{\rho_a} (\nabla \cdot \rho_a \mathbf{K}_h \nabla) \bar{q} + F - S$$



Diferenças Finitas

Trocamos os valores contínuos por discretos nas equações...

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ??$$



Diferenças Finitas

Definimos as diferenças Δu no ponto x_i

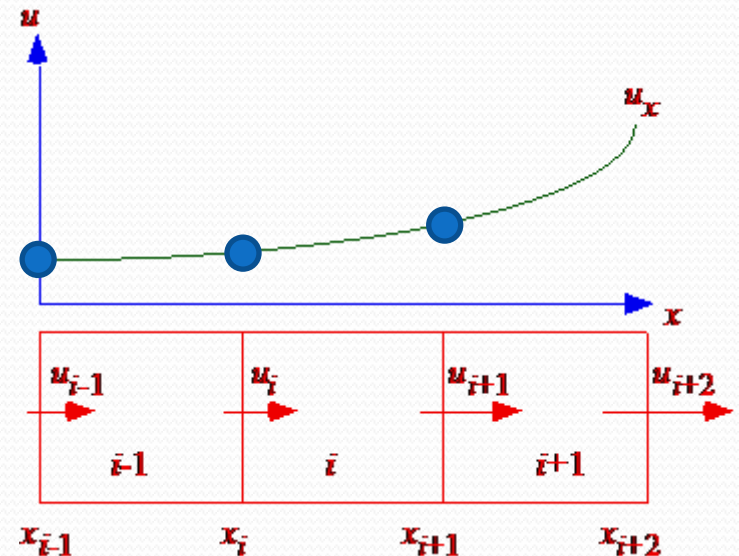
$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_{i-1} \quad \text{diferença centrada}$$

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad \text{diferença avançada}$$

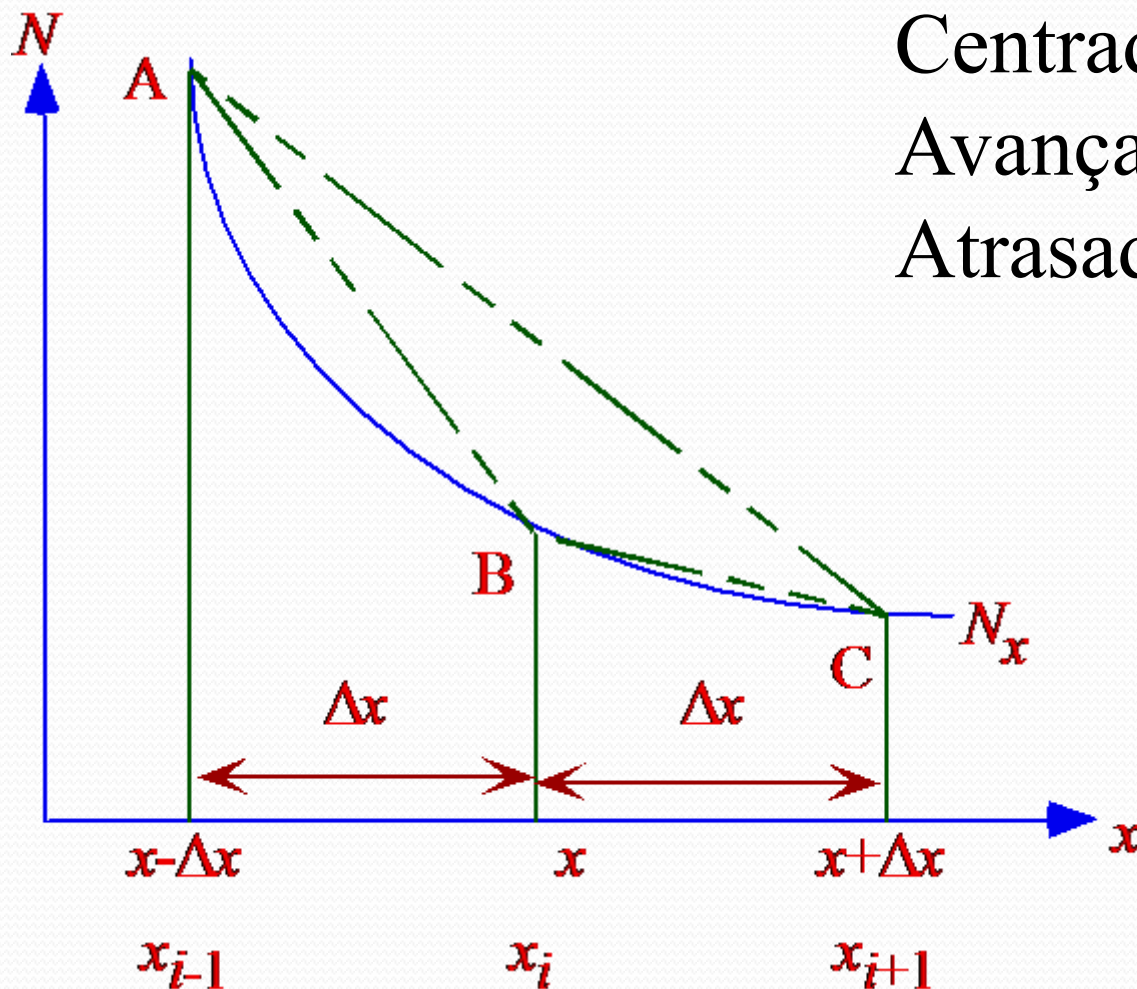
$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1} \quad \text{diferença atrasada}$$

Estamos aproximando a derivada pela tangente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



Diferenças Finitas



Centrada (AC)
Avançada (BC)
Atrasada (AB)

Expansão em série de Taylor

Expandindo em Taylor em torno do ponto x , calculamos o valor em $x+\Delta x$

$$N_{x+\Delta x} = N_x + \Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} \dots$$

Ou em torno de $x-\Delta x$

Iguais de sinais
opostos

$$N_{x-\Delta x} = N_x - \Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} \dots$$

Expansão em série de Taylor

Assim, temos que

$$N_{x+\Delta x} + N_{x-\Delta x} = 2N_x + \Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \Delta x^4 \frac{\partial^4 N_x}{\partial x^4} + \dots$$

Que pode ser rearranjado para

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{N_{x+\Delta x} - 2N_x + N_{x-\Delta x}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Desprezando termos de 2a ordem e superiores

$$O(\Delta x^2) = -\frac{1}{12} \Delta x^2 \frac{\partial^4 N_x}{\partial x^4} - \dots$$

É aproximação de 2a ordem para a segunda derivada

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - 2N_x + N_{x-\Delta x}}{\Delta x^2}$$

Expansão em série de Taylor

Agora vamos subtrair as duas equações. Os termos pares cancelam...

$$N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x} = 2\Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{3} \Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} + \dots$$

Rearranjando, temos

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \frac{N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Onde truncamos da mesma maneira

$$O(\Delta x^2) = -\frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} - \dots$$

É uma aproximação de segunda ordem para a primeira derivada

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{N_{i+1} - N_{i-1}}{2\Delta x}$$

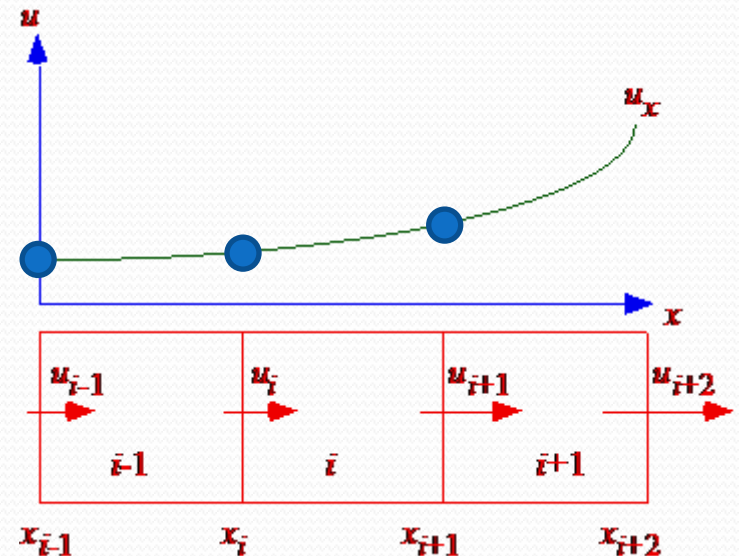
Diferenças finitas – 1ª derivada em x

Aproximação de 1ª ordem avançada em x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - N_x}{\Delta x} = \frac{N_{i+1} - N_i}{\Delta x}$$

Aproximação de 1ª ordem atrasada em x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_x - N_{x-\Delta x}}{\Delta x} = \frac{N_i - N_{i-1}}{\Delta x}$$



Diferenças finitas – Derivada no tempo

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_{t+h} - N_{t-h}}{2h} + O(2)$$

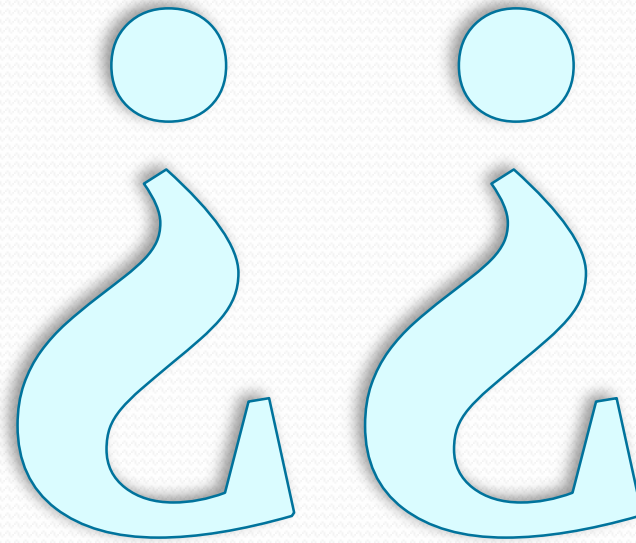
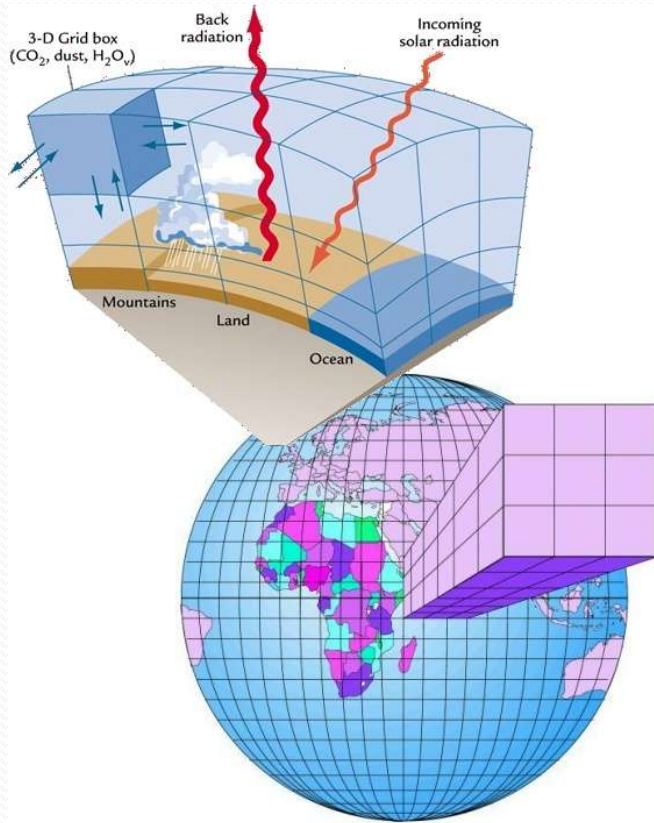
$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_{t+h} - N_t}{h} + O(1)$$

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_t - N_{t-h}}{h} + O(1)$$

Resumo

- Equação complicada $\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$
- +Reynolds -Difusão $\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}\bar{N}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \bar{N}) + F - S$
- Operator Splitting $\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}\bar{N})$
- Diferenças finitas $\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} - \dots$

E essa solução funciona ?!?



$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = - \frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} - \dots$$

Critérios

- Uma solução numérica para uma equação diferencial reproduz a solução analítica apenas se vários critérios forem satisfeitos
 - Convergência
 - Consistência
 - Ordem da aproximação
 - Convergência geral
 - Estabilidade numérica

(1) Convergência

- A expressão em diferenças finitas deve convergir para a forma diferencial no sentido do teorema central do limite:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta N}{\Delta x} \right\|$$

(2) Consistência

- Ao fazer a expansão em série de Taylor, jogamos fora termos de alta ordem....
- Para a aproximação em diferenças finitas ser válida, o erro no truncamento deve ir para zero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \text{T.E.} \left(\frac{\Delta N}{\Delta x} \right) \right\| = 0$$

- Matematicamente, se (1) então (2) e vice-versa

(3) Convergência geral

- Além de que as expressões em diferenças finitas convergem para as diferenciais, precisamos que a solução numérica convirja para a solução analítica

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|N_{e,x,t} - N_{f,x,t}\| = 0$$

(4) Ordem da aproximação

- A ordem da aproximação é a menor potência em Δx ou Δt deixada de fora na expansão de Taylor.
- É preciso que a aproximação seja da mesma ordem em todas as variáveis para haver estabilidade e convergência.

Estabilidade

- A diferença entre a solução numérica e analítica não deve crescer com o tempo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|N_{e,x,t} - N_{f,x,t}\| \leq C$$

- Condicionalmente estável
 - Estável para $\Delta t < \Delta T_{\max}$
- Incondicionalmente estável:
 - É sempre estável qualquer que seja o Δt
- Incondicionalmente instável:
 - Instável qualquer que seja o Δt

Convergência e estabilidade de parte da solução (splitting) não garante convergência geral!

Exemplo

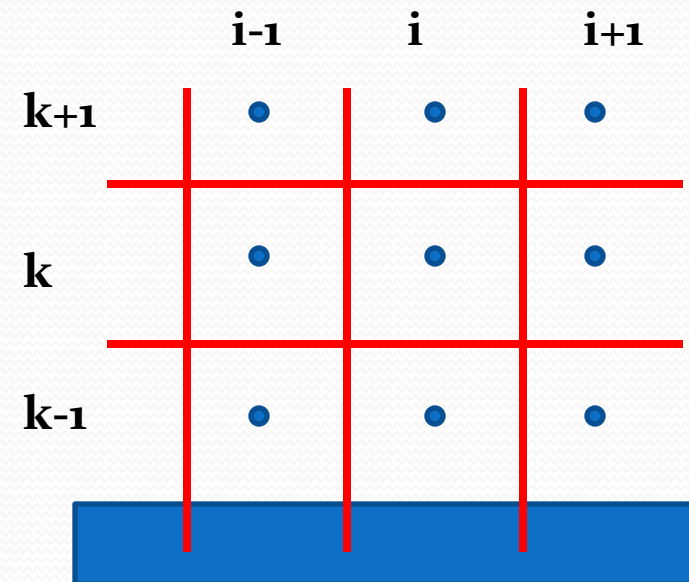
- Equação de advecção difusão apenas em x

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (Nu)$$

- Uma possível representação em diferenças finitas, fazendo explícito no tempo, seria

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = - \frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x}$$

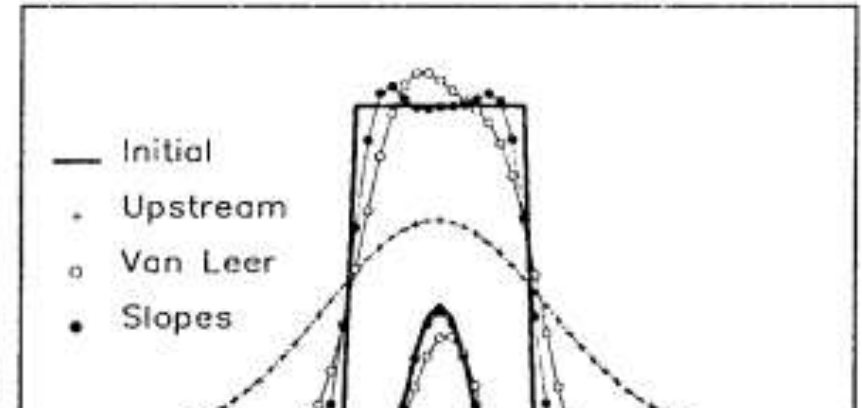
A maneira como discretizamos determina a estabilidade.



Problemas numéricos

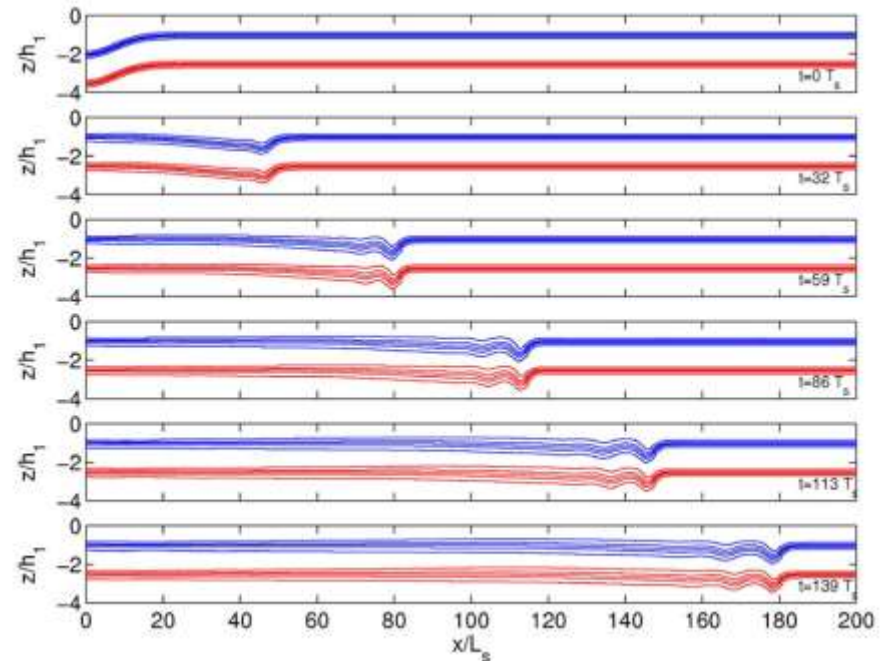
Difusão numérica

Um pico se espalha artificialmente pelos grid-boxes



Oscilação numérica

Podem surgir ondas dispersas atrás ou na frente de um pico



Não-monotônico

Os gradientes não são preservados durante o transporte

Discretização

- Queremos integrar a equação numericamente, i.e., encontrar $N(t+\Delta t)$ em função de $N(t)$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu)$$

- Há três maneiras diferentes de fazer a discretização no tempo que levam a soluções conceitualmente diferentes:
 - **Explícita** – calcula-se $t+1$ em função apenas dos valores pré calculados: $t, t-1, \dots$
 - **Implícita** – calcula-se $t+1$ em função apenas dos valores desconhecidos em $t+1$
 - **Semi-implícito** – calcula-se $t+1$ com base tanto em $t+1$, quanto $t, t-1, \dots$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema explícito

- No lado direito da equação aparecem apenas termos no tempo (t)

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} + K \frac{N_t^{i+1} - 2N_t^i + N_t^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- E a solução para N_{t+1}^i é trivial:

$$N_{t+1}^i = N_t^i - \Delta t \frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} + \Delta t K \frac{N_t^{i+1} - 2N_t^i + N_t^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- Com apenas um laço **i=1,imax** resolvemos o problema!

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema explícito

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} + K \frac{N_t^{i+1} - 2N_t^i + N_t^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- Essa solução é de 1ª ordem avançada no tempo e de 2ª ordem centrada no espaço. O problema é que esta solução é
 - Condicionalmente estável – apenas para **K** pequeno
 - Incondicionalmente instável para **K=0** ou **K** grande

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema implícito

- No lado direito da equação aparecem apenas termos no tempo (**t+1**)

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_{t+1}^{i+1} - Nu_{t+1}^{i-1}}{2\Delta x} + K \frac{N_{t+1}^{i+1} - 2N_{t+1}^i + N_{t+1}^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- E a solução para N_{t+1}^i é **não-trivial** e acopla **i**, **i-1** e **i+1**.
- Agrupando os termos, temos

$$N_{t+1}^i \left(-\frac{u_{t+1}^{i+1}}{2\Delta x} + \frac{K}{\Delta x^2} \right) \Delta t$$

Esquema implícito

- Fazendo o mesmo para os outros termos, temos

$$\underbrace{\Delta t \left(\frac{K}{\Delta x^2} - \frac{u_{t+1}^{i+1}}{2\Delta x} \right)}_{A_i} N_{t+1}^{i+1} - \underbrace{\left(1 + \frac{2K}{\Delta x^2} \Delta t \right)}_{B_i} N_{t+1}^i + \underbrace{\Delta t \left(\frac{K}{\Delta x^2} + \frac{u_{t+1}^{i-1}}{2\Delta x} \right)}_{C_i} N_{t+1}^{i-1} = N_t^i$$

- Que é um sistema de equações diferenciais acopladas.

$$A_i N_{t+1}^{i+1} + B_i N_{t+1}^i + C_i N_{t+1}^{i-1} = N_t^i$$

- Que podem ser resolvidas na forma matricial....

Solução Matricial

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & A_{M-2} & B_{M-2} & C_{M-2} & 0 \\ & & A_{M-1} & B_{M-1} & C_{M-1} \\ 0 & \dots & 0 & A_M & B_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \\ \vdots \\ N^M \end{pmatrix}_{t+1} = \begin{pmatrix} N^1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{sfc} \\ N^2 \\ \vdots \\ N^M \end{pmatrix}_t$$

Sistema tridiagonal.
Resolvido com eliminação
de Gauss

- Onde já incluímos a condição de contorno devido ao fluxo de superfície (é preciso discretizar de uma maneira um pouco diferente na interface)

Discretização

- As soluções da equação de difusão são, em geral:
 - Condicionalmente estáveis, se o esquema é explícito ou semi-implícito
 - Condicionalmente ou incondicionalmente estáveis, se o esquema é implícito

Critério de Estabilidade

- O critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy determina qual é o espaçamento de grade máximo para haver estabilidade na equação de difusão:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{|V_{\max}|}, \text{ ou número de Courant } \varepsilon = \frac{|V_{\max}|}{\Delta x / \Delta t} < 1$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{|K_{\max}|}$$

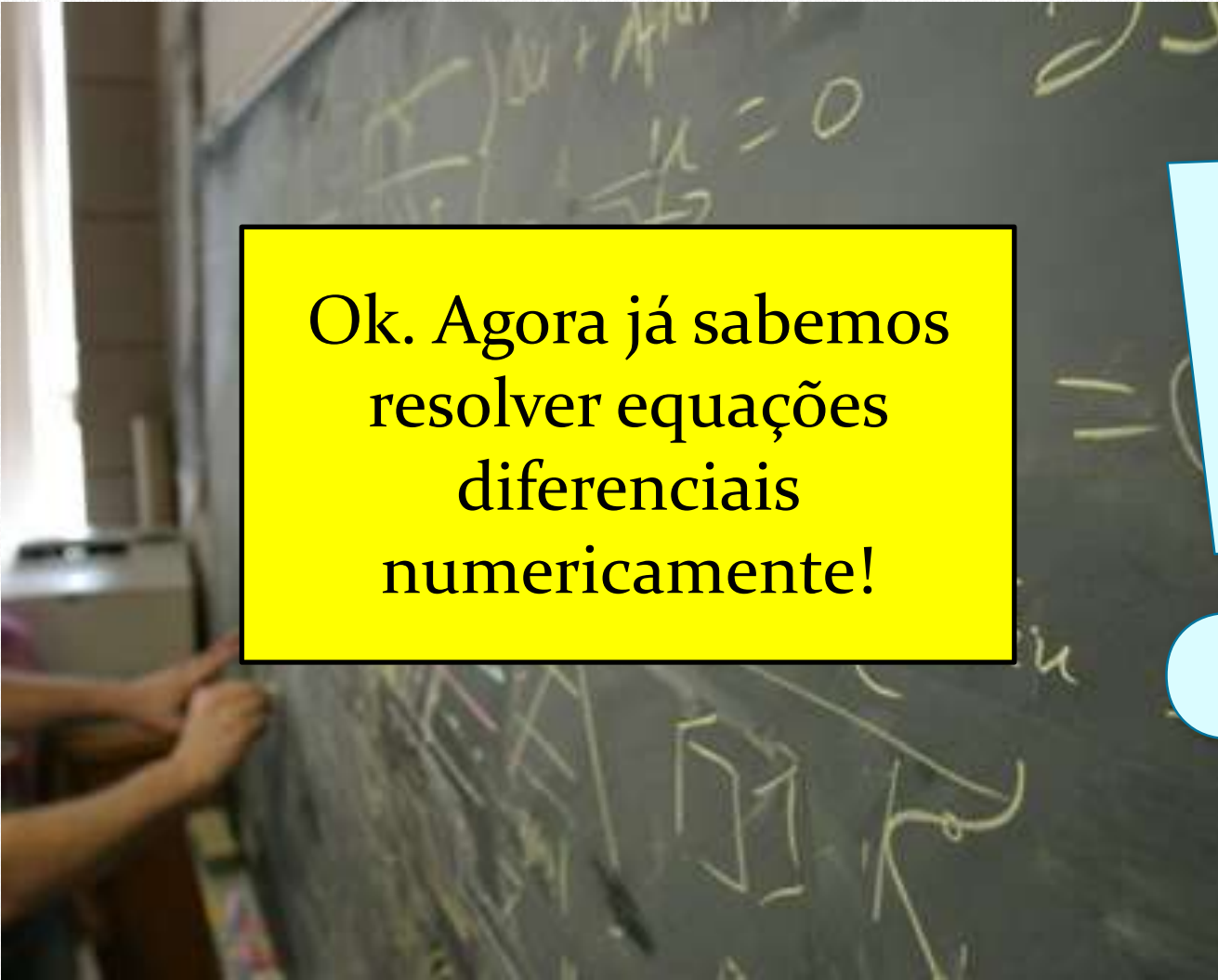
Fácil de entender:
Em 1 Δt a parcela não pode
atravessar mais do que 1 grid-box

Critério de Estabilidade

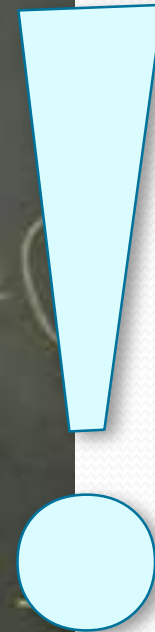
- Dependendo do espaçamento, há um limite para a resolução temporal!
- Exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = 5km \\ |V_{\max}| = 20m / s \\ \Delta z = 100m \\ |w_{\max}| = 1m / s \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t < 250s$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta z = 100m \\ |w_{\max}| = 1m / s \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t < 100s$$

Equações Diferenciais: Solução

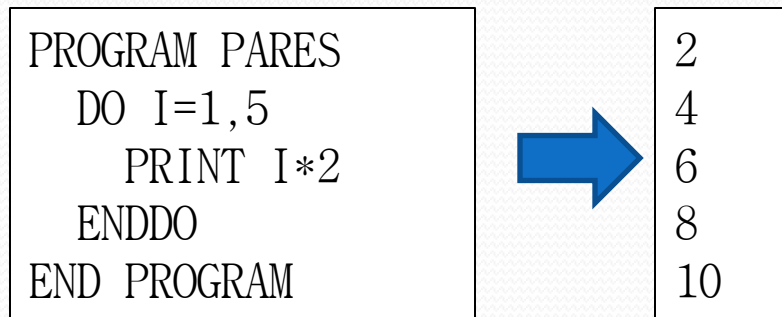
A chalkboard filled with handwritten mathematical equations and diagrams. A person's hands are visible on the left side, writing on the board. The equations include $y'' + y = 0$ and $y = \sin(x)$.

Ok. Agora já sabemos
resolver equações
diferenciais
numericamente!

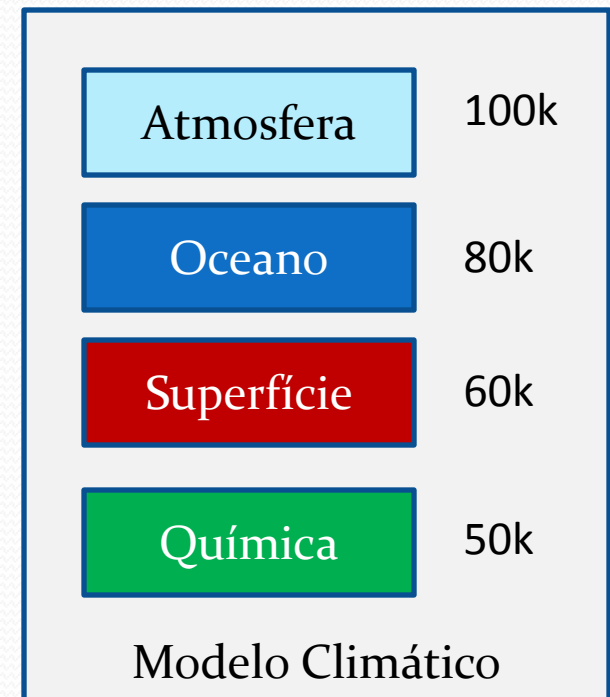


Complexidade Computacional

- A alta complexidade de um modelo atmosférico requer muitos pesquisadores e muitos anos para o seu desenvolvimento.



Programa de 3 linhas para
escrever na tela os 5
primeiros números pares



100-300 MIL linhas de código



O que é um modelo numérico?



Quais equações este modelo resolve?



Como o sistema climático funciona?