

Modelagem Numérica da Atmosfera – Parte 3

<http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa>

Henrique M. J. Barbosa
Instituto de Física – USP
hbarbosa@if.usp.br



Atmosfera

- Existem todas as frequências e todas podem ser importantes devido as interações não lineares
 - Ex.: vórtices turbulentos e convecção acontecem em escalas muito menores e mais rápidas que 200km ou 1hora
- Em modelos climáticos é bom filtrar as altas frequência para eliminar o ruído (queremos o comportamento médio)
- Resultados de Raupp & Silva Dias mostram que é importante a interação entre escalas (diurna->Madden Julian).
 - Ex.: Super-parametrização => MJ, El Nino,

Equações Diferenciais



Equações Diferenciais

- Classificação quanto ao número de variáveis
 - Ordinárias = só tem uma variável independente

$$\frac{dG(t)}{dt} = F(t)$$

- Parciais = tem mais de uma variável independente

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial uG(t, x)}{\partial x} = 0$$

Equações Diferenciais

- Classificação quanto ao grau e ordem
 - Ordem = nível da derivada mais alta
 - Grau = potência da derivada mais alta

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial uG}{\partial x} = D \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

2ª ordem e 1º grau

Equações Diferenciais

- Classificação quando a homogeneidade
 - Homogêneas = não aparecem as variáveis independentes explicitamente

$$\frac{\partial G}{\partial t} = D \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

- Não homogêneas = variáveis independentes explícitas

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 3t^2$$

Equações Diferenciais

- Classificação quando a linearidade
 - Lineares = a variável dependente e suas derivadas só aparecem em termos de 1º grau e não há produto entre elas

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial u G}{\partial x} = 0$$

- Não lineares = existem termos de 2º ou maior grau e/ou produtos entre variáveis dependentes e suas derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Exemplo: atmosfera

- Eq. da conservação e termodinâmica

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q + D_q \nabla^2 q + F_q - S_q$$

- Eq de momento (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \underbrace{-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{circled}} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

- Parcial
- 2º ordem
- 1º grau
- Homogênea
- **Linear**

- Parcial
- 2º ordem
- 1º grau
- Homogênea
- **NÃO-Linear**

Equações Diferenciais: Solução



Dificuldades a frente...

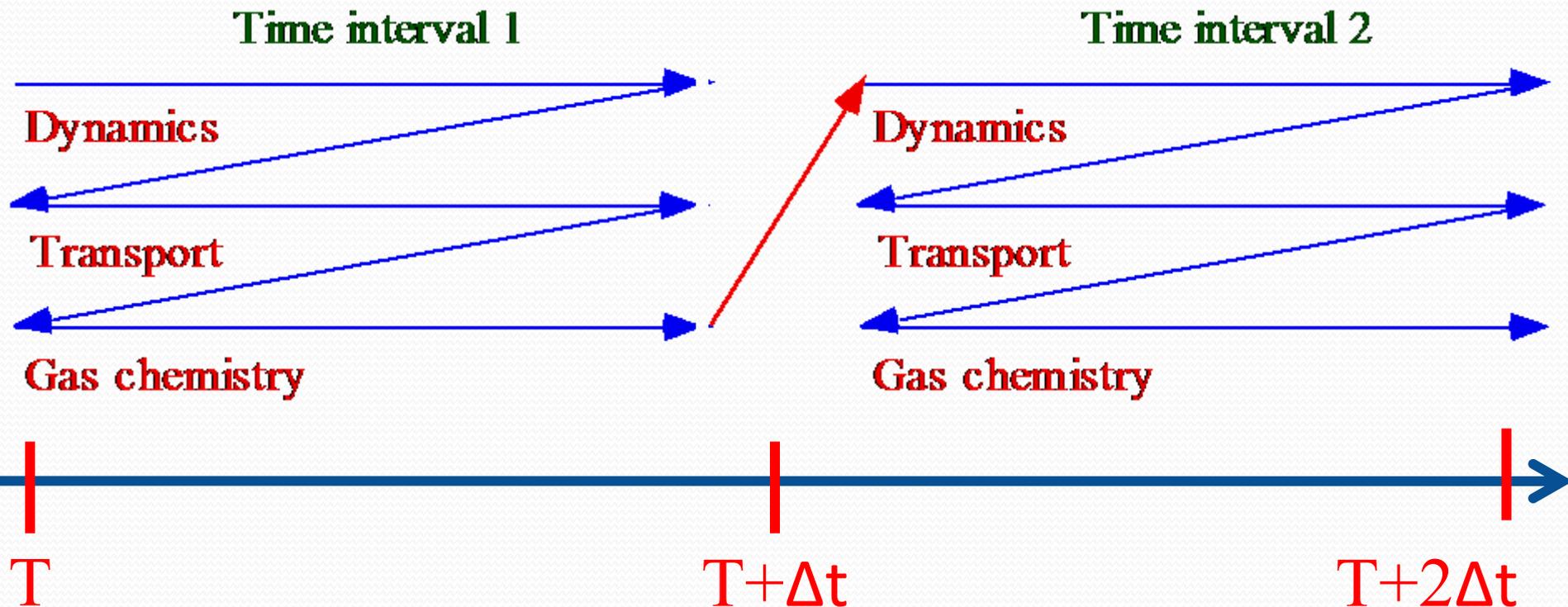
- Como resolver uma equação complicada?

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$

- De uma vez só, ou seja, encontrar $N(x,y,z,t)$?
- Quando temos vários processos físicos acontecendo ao mesmo tempo?
- Dadas as limitações atuais dos computadores ?

Separação de Operadores

- O que se faz é resolver separadamente cada um dos processos. Por exemplo, um modelo numérico calcula separadamente: dinâmica, radiação, convecção, etc...



Separação de Operadores

- Exemplo, a equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$

- Operator-split nos termos de advecção-difusão

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N$$

- Operator-split nos termos forçantes

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Separação de Operadores

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} \approx -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) + D \nabla^2 N$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} \approx \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Resolver estas equações seqüencialmente é **uma aproximação** da solução completa! Este método em particular é chamado de método dos intervalos fracionários.

Alguns modelos trocam a ordem em x,y,z entre dois time-steps para conseguir uma solução mais independente da separação dos operadores.

Separação de Operadores

- Em alguns modelos, como o CPTEC-AGCM, a equação é separada ainda mais:

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx -\nabla \cdot (\mathbf{v}N)$$

Transporte

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx D\nabla^2 N$$

Difusão Molecular

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Física sub-grade

Equações Diferenciais: Solução



- Mesmo para estas equações simples, a solução ainda não é trivial.



Solução de uma Eq. Dif.

- Para resolvê-las precisamos de condições de contorno. As **CC** podem ser de vários tipos e depende de qual problema estamos resolvendo
- Exemplo:
 - Podemos resolver **$dN/dt=F(t)$** se soubermos **$N_0=N(t=0)$**
 - Este tipo de **CC** é uma condição inicial (**C.I.**) de um problema de valor inicial.

Solução de uma Eq. Dif.

- Quando precisamos da **CC** nas duas extremidades do domínio, temos um problema de valor de contorno.
- Exemplo:
 - Para resolver
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
 - Precisamos de **$u(x, t=0)$** e também **$u(0, t)$** e **$u(L, t)$**
 - Problema de C.I. em **t** e problema de CC em **x**
- Exemplo: o nudging do BRAMS nas fronteiras do domínio

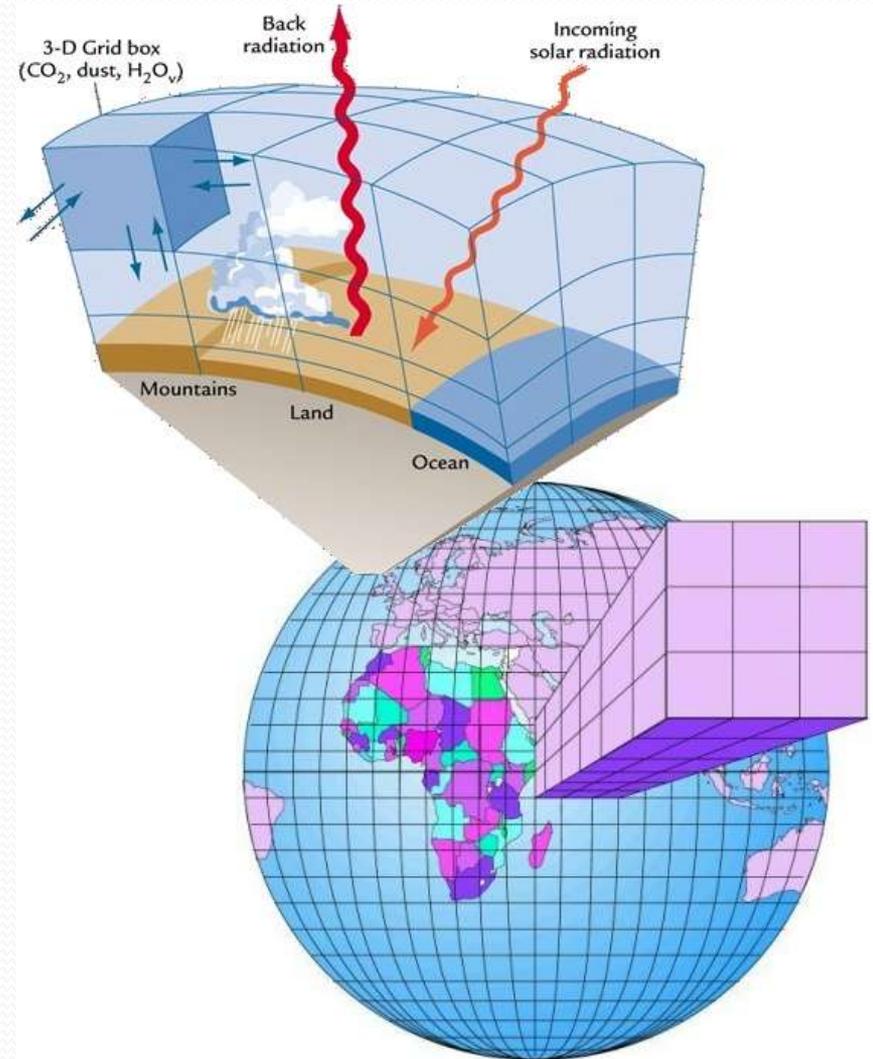
Equações Diferenciais: Solução



- São equações diferenciais e representam uma conservação local!
- São contínuas e válidas em todos os pontos do espaço físico (x,y,z,t)

Como resolver numericamente?

Discretização



Discretização: Limitações

- Quando discretizamos no tempo e no espaço **temos que usar intervalos finitos** e por isso a solução numérica não representa todos os movimentos da atmosfera.

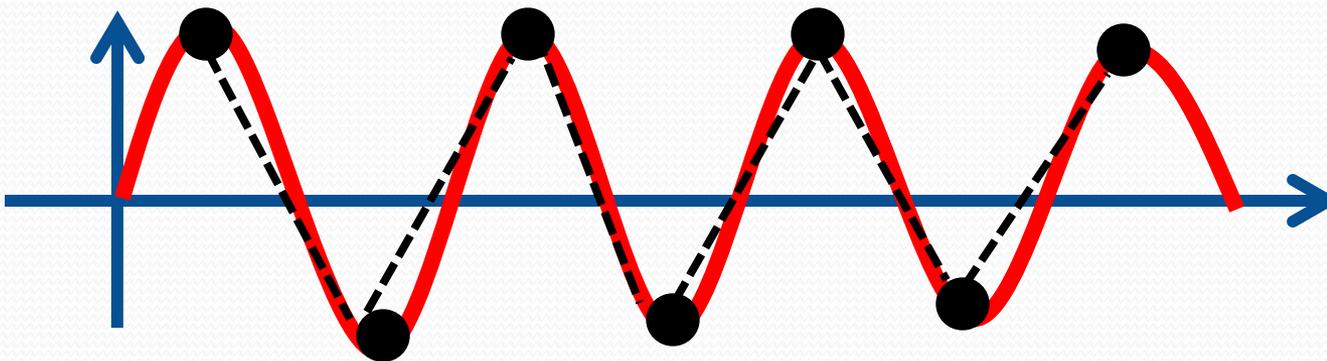
Escala	Δx	Δt
Meso escala	5 x 5 km	5 s
Regional	50 x 50 km	1 min
Global	250 x 250 km	30 min

Sampling Theorem

- Seja $h(t)$ uma função contínua no tempo. Se medimos $h(t)$ a cada Δ segundos, existe uma frequência crítica

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}, \text{ freq de Nyquist}$$

Máxima que pode ser observada com essa amostragem.



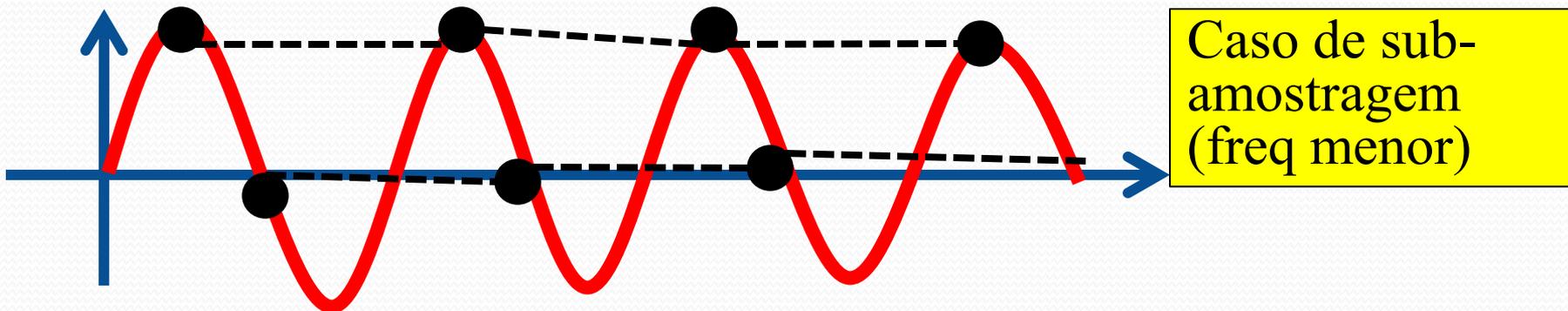
Minimamente amostrado com o dobro da frequência do fenômeno

... Ou teorema de Nyquist

- Seja $h(t)$ uma função contínua no tempo. Se medimos $h(t)$ a cada Δ segundos, existe uma frequência crítica

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}, \text{ freq de Nyquist}$$

Máxima que pode ser observada com essa amostragem.



Teorema

- Seja $\mathbf{h}(\mathbf{t})$ e sua transformada de Fourier $\mathbf{H}(\mathbf{f})$, se $\mathbf{H}(\mathbf{f})=0$ qualquer que seja $|\mathbf{f}|>\mathbf{f}_c$, então $\mathbf{h}(\mathbf{t})$ é completamente determinada se for amostrada em intervalos $\Delta \leq 1/2\mathbf{f}_c$.
- Exemplo:

$$f_c^t = \frac{1}{2 \times 30 \text{ min}} = 0.02 \text{ Hz} \Rightarrow T > 1 \text{ hora}$$

$$f_c^x = \frac{1}{2 \times 100 \text{ km}} = 0.005 \text{ km}^{-1} \Rightarrow \lambda > 200 \text{ km}$$

Turbulência

- A equação de Navier-Stokes é não linear

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

- Isso produz caos na solução $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ e implica em escoamento turbulento. Apenas em condições especiais o fluxo é laminar.
- $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ flutua aleatoriamente em escalas menores que **1mm** e mais rápidas que **10Hz!** Impossível de resolver nos modelos (até mesmo em um **L.E.S.**)

Anemômetro sônico



Language:  

[Home Page](#) | [About Us](#) | [Site Map](#) | [News & Press Releases](#) | [Contact](#)

METEOROLOGICAL INSTRUMENTS

APPLICATIONS

LITERATURE & SUPPORT

EXHIBITIONS

DISTRIBUTORS

CONTACT

[Home Page](#) > [Meteorological Instruments](#) > [Anemometers](#) > [HS Range](#) > [HS-50](#)

Horizontal-Head Anemometer HS-50™

- ✓ Precision 3-axis ultrasonic anemometer
- ✓ 40m/s wind speed, 0-359° wind direction
- ✓ U, V, W Vector Outputs
- ✓ 50Hz Output Rate
- ✓ Horizontal Head for Minimal Flow Disturbance

GET A QUOTE



Research Anemometer Enquiry

[Send Online Enquiry](#)



[Send Email Enquiry](#)

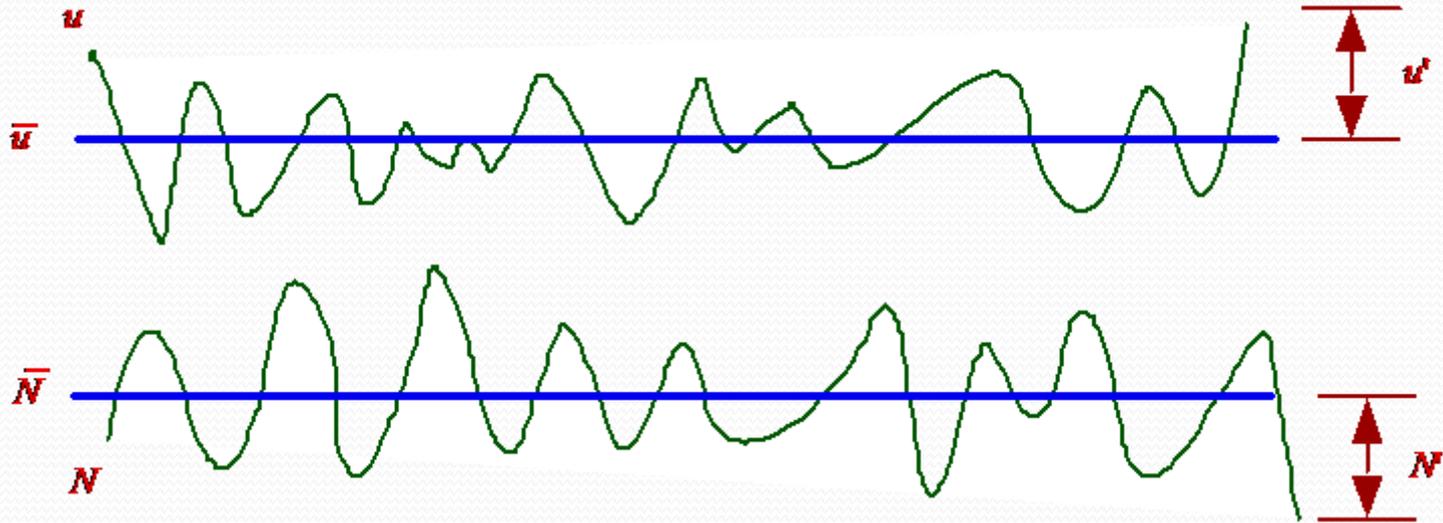


Tel: +44 (0)1590 613500

Research Anemometer Photos



A média de Reynolds



A concentração exata em (x, y, z, t)

$$N = \bar{N} + N'$$

Onde a média no volume do grid-box e no time-step é

$$\bar{N} = \frac{1}{\Delta t \Delta Vol} \int_t^{t+\Delta t} \int_V^{V+\Delta V} N(\vec{r}, t) \cdot dt \cdot dVol$$

A média de Reynolds

- \bar{N} depende do grid-box e do passo de tempo e é o valor previsto/calculado pelo modelo!
- Por definição \mathbf{N}' flutua em torno de $\mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{N}}' = \mathbf{0}$

Podemos fazer a mesma decomposição para a velocidade:

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}'$$

E então substituímos ambas nas equações originais

$$\frac{\partial \bar{N} + N'}{\partial t} = -\nabla \cdot \left((\bar{N} + N')(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \right) + D_N \nabla^2 (\bar{N} + N')$$

Expandindo a equação

- Expandindo e tomando a média (\mathbf{x} e \mathbf{t}), para o 1º termo:

$$\overline{\frac{\partial \bar{N} + N'}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial \bar{N}}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial N'}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{N}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t}$$

- Fazendo o mesmo para os demais termos, temos:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' N'}) + D \nabla^2 \bar{N} = F - S$$

Advecção pelo
vento médio

Fluxo turbulento
cinemático. É o efeito
sub-grade !!

Expansão turbulenta

A difusão turbulenta é muito maior que a molecular, então sobra apenas:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' N'}) = F - S$$

Para a equação da continuidade concentração específica

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{q} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \overline{\mathbf{v}' q'}) = F - S$$

Para a equação da continuidade em densidade

$$\frac{\partial \bar{\rho}_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{\rho}_a) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \rho'_a}) = 0$$

Precisamos parametrizar!!

Parametrização

- O modelo resolve e conhece apenas os valores médios em cada grid-box, \mathbf{v} e \mathbf{q} , como então podemos estimar o fluxo turbulento $\langle \mathbf{v}'\mathbf{q}' \rangle$??
- Fazendo uma analogia com a lei de Fick

$$\mathbf{F}\psi = -D\nabla\psi$$

- Assume-se que o fluxo turbulento é proporcional ao gradiente (**teoria K** ou teoria do transporte dos gradientes)

$$\overline{u'q'} \propto \nabla q$$

Teoria K

O fluxo turbulento de um parâmetro é relacionado ao gradiente do valor médio do parâmetro. Assim, os termos do fluxo cinemático turbulento ficam:

$$\overline{u'N'} = -K_{h,xx} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}, \text{ em } x$$

Onde K_h é um coeficiente de difusão turbulenta (Para energia e momento: $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$). Assim,

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \bar{N}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \bar{N}) + F - S$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{q} = \frac{1}{\rho_a} (\nabla \cdot \rho_a \mathbf{K}_h \nabla) \bar{q} + F - S$$

Matriz de difusão

- K_h é a matriz de difusão e K_x , K_y e K_z são os coeficientes de difusão turbulenta.

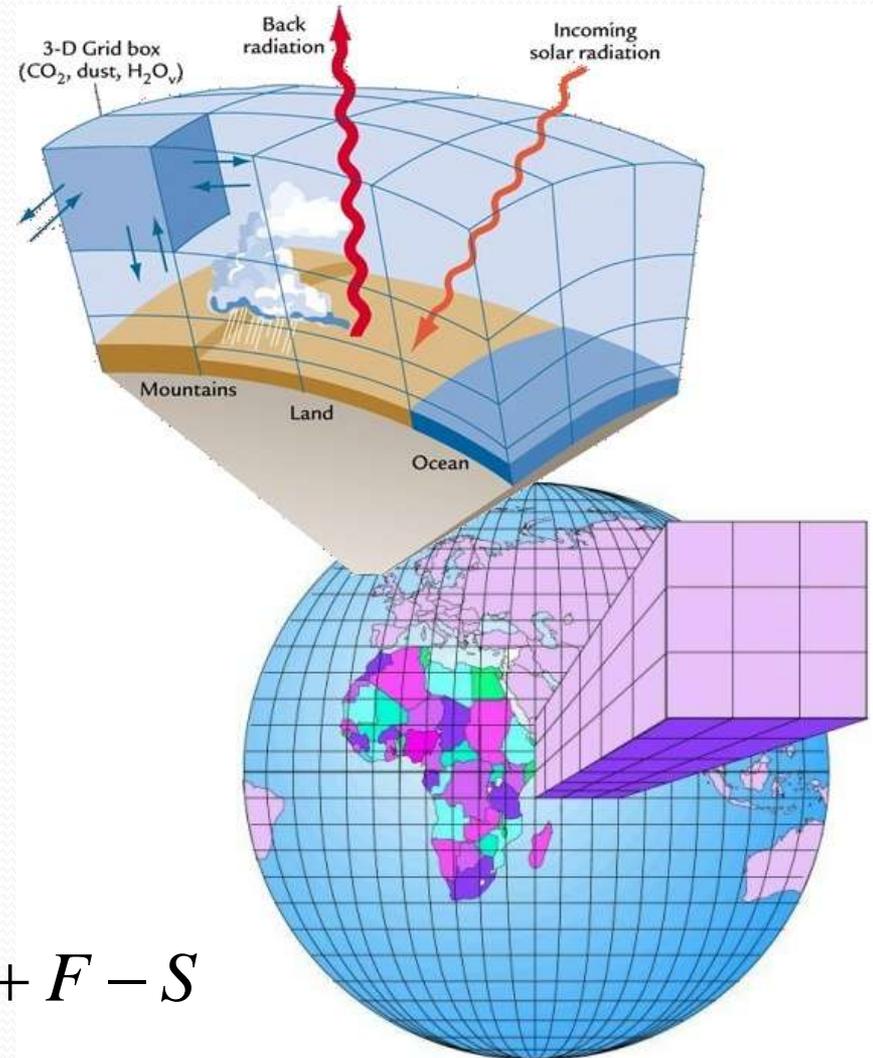
$$\mathbf{K}_h = \begin{bmatrix} K_{h,xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{h,yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{h,zz} \end{bmatrix}$$

- Os termos cruzados dão uma covariância entre o transporte turbulento em direções diferentes e em geral são assumidos nulos.
- A diagonal dá o transporte do gradiente devido a mistura turbulenta

O que falta?

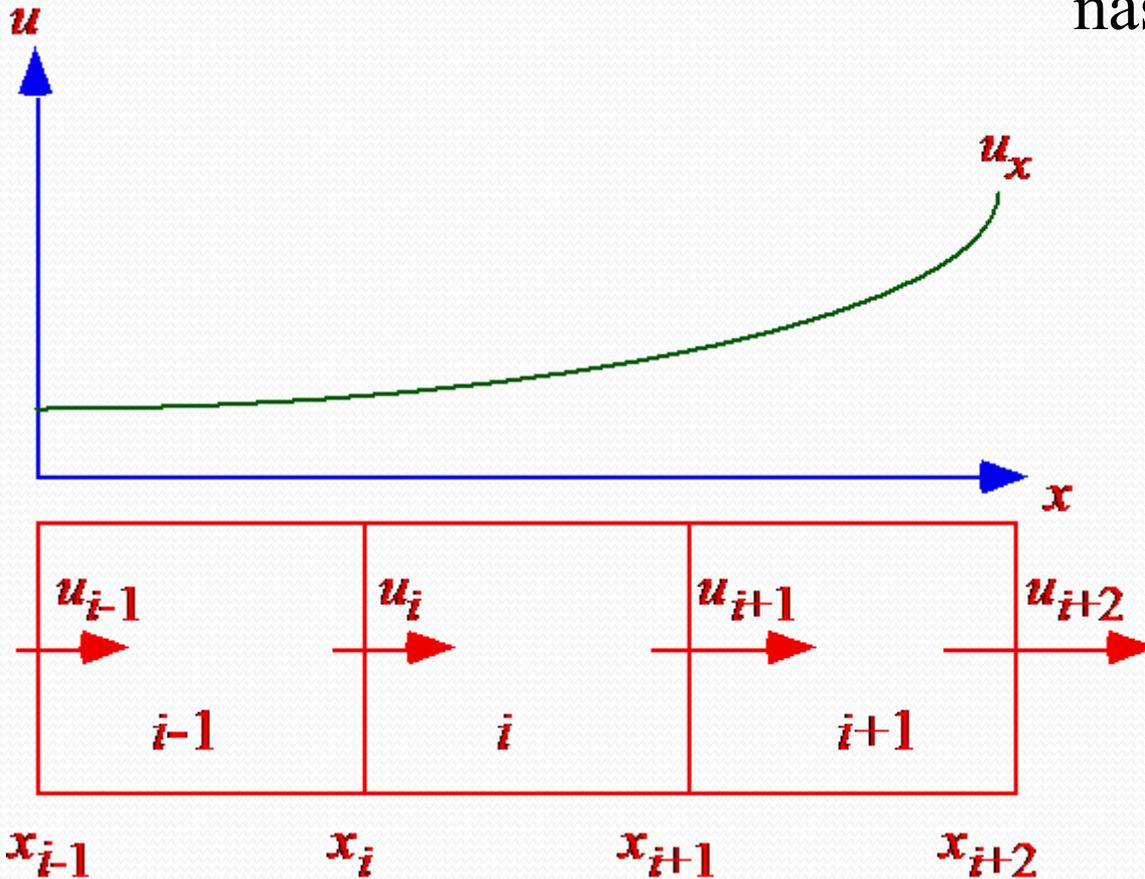
- Decompomos o fluxo em torno da média do grid-box...
- ...mas ainda temos uma EDP “contínua”.
- Como resolver as derivadas?

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{q} = \frac{1}{\rho_a} (\nabla \cdot \rho_a \mathbf{K}_h \nabla) \bar{q} + F - S$$



Diferenças Finitas

Trocamos os valores contínuos por discretos nas equações...



$$\frac{\partial u}{\partial x} = ??$$

Diferenças Finitas

Definimos as diferenças Δu no ponto x_i

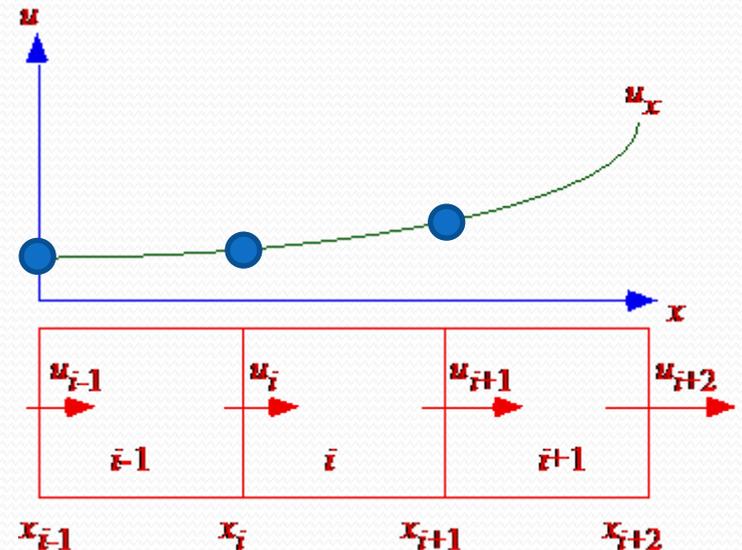
$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_{i-1} \quad \text{diferença centrada}$$

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad \text{diferença avançada}$$

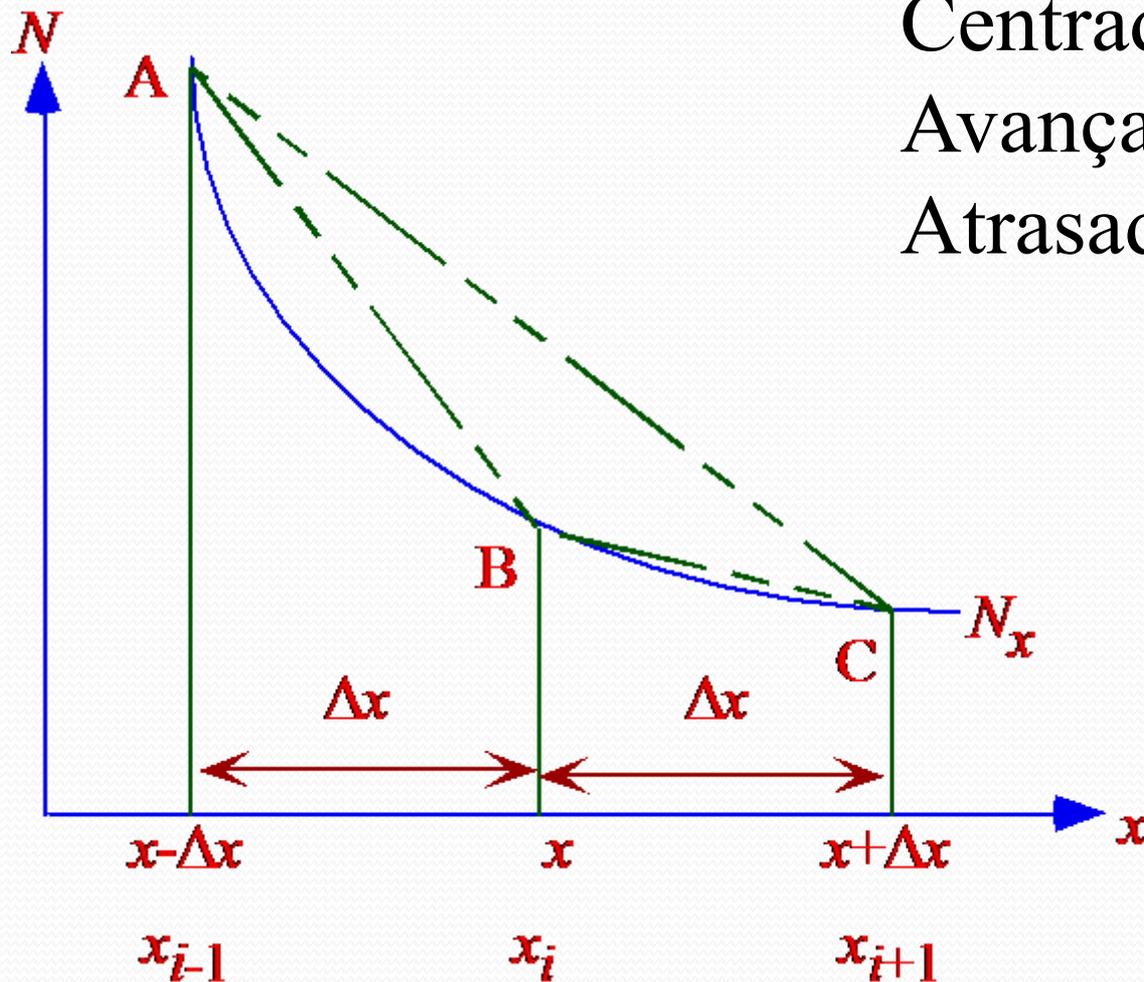
$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1} \quad \text{diferença atrasada}$$

Estamos aproximando a derivada pela tangente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



Diferenças Finitas



Centrada (AC)
Avançada (BC)
Atrasada (AB)

Expansão em série de Taylor

Expandindo em Taylor em torno do ponto x , calculamos o valor em $x+\Delta x$

$$N_{x+\Delta x} = N_x + \Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} \dots$$

Ou em torno de $x-\Delta x$

Iguais de sinais
opostos

$$N_{x-\Delta x} = N_x - \Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} \dots$$

Expansão em série de Taylor

Assim, temos que

$$N_{x+\Delta x} + N_{x-\Delta x} = 2N_x + \Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \Delta x^4 \frac{\partial^4 N_x}{\partial x^4} + \dots$$

Que pode ser rearranjado para

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{N_{x+\Delta x} - 2N_x + N_{x-\Delta x}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Desprezando termos de 2a ordem e superiores

$$O(\Delta x^2) = -\frac{1}{12} \Delta x^2 \frac{\partial^4 N_x}{\partial x^4} - \dots$$

É aproximação de 2a ordem para a segunda derivada

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - 2N_x + N_{x-\Delta x}}{\Delta x^2}$$

Expansão em série de Taylor

Agora vamos subtrair as duas equações. Os termos pares cancelam...

$$N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x} = 2\Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{3} \Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} + \dots$$

Rearranjando, temos

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \frac{N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Onde truncamos da mesma maneira

$$O(\Delta x^2) = -\frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} - \dots$$

É uma aproximação de segunda ordem para a primeira derivada

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{N_{i+1} - N_{i-1}}{2\Delta x}$$

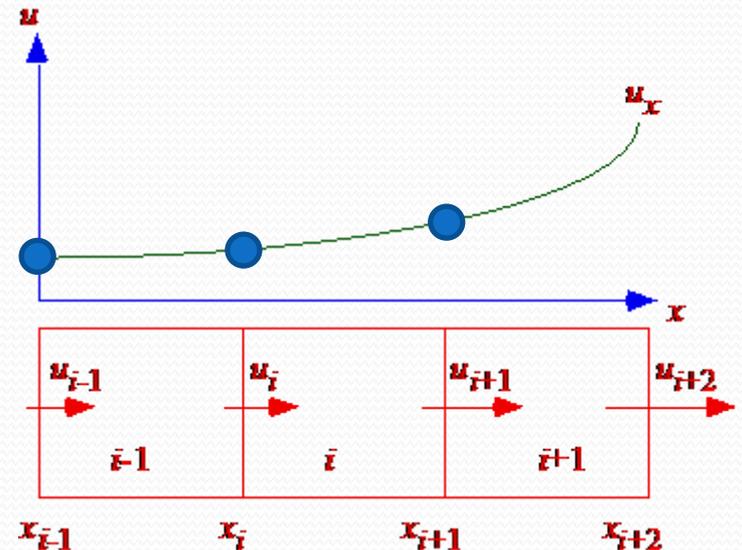
Diferenças finitas – 1ª derivada em x

Aproximação de 1ª ordem avançada em x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - N_x}{\Delta x} = \frac{N_{i+1} - N_i}{\Delta x}$$

Aproximação de 1ª ordem atrasada em x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_x - N_{x-\Delta x}}{\Delta x} = \frac{N_i - N_{i-1}}{\Delta x}$$



Diferenças finitas – Derivada no tempo

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_{t+h} - N_{t-h}}{2h} + O(2)$$

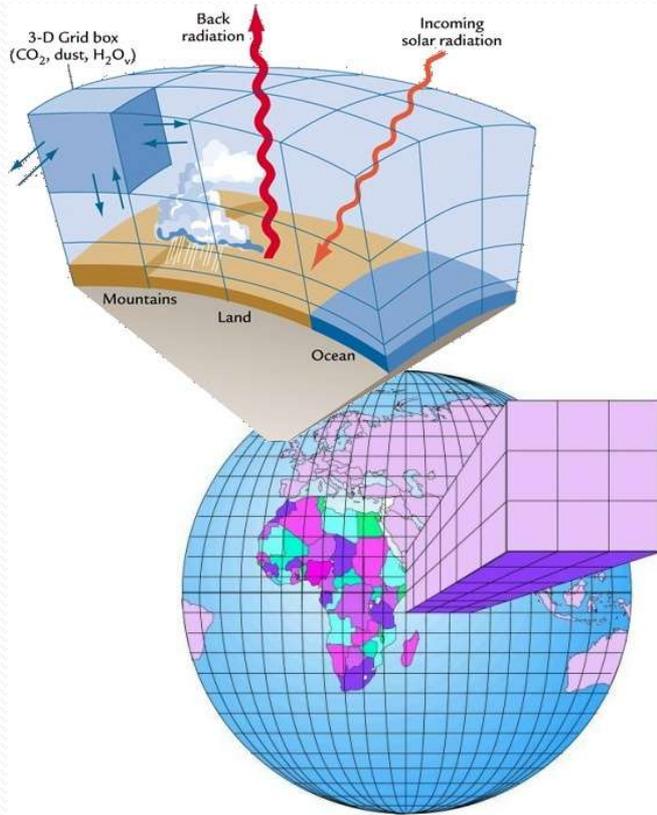
$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_{t+h} - N_t}{h} + O(1)$$

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_t - N_{t-h}}{h} + O(1)$$

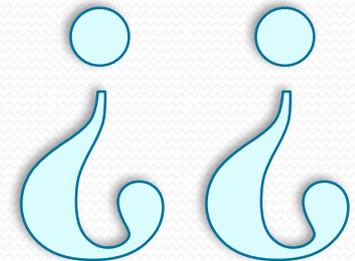
Resumo

- Equação complicada
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$
- +Reynolds -Difusão
$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}\bar{N}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \bar{N}) + F - S$$
- Operator Splitting
$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}\bar{N})$$
- Diferenças finitas
$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} - \dots$$

E essa solução funciona?!?



$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = - \frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} - \dots$$



Critérios

- Uma solução numérica para uma equação diferencial reproduz a solução analítica apenas se vários critérios forem satisfeitos
 - Convergência
 - Consistência
 - Ordem da aproximação
 - Convergência geral
 - Estabilidade numérica

(1) Convergência

- A expressão em diferenças finitas deve convergir para a forma diferencial no sentido do teorema central do limite:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta N}{\Delta x} \right\|$$

(2) Consistência

- Ao fazer a expansão em série de Taylor, jogamos fora termos de alta ordem....
- Para a aproximação em diferenças finitas ser válida, o erro no truncamento deve ir para zero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\| \text{T.E.} \left(\frac{\Delta N}{\Delta x} \right) \right\| = 0$$

- Matematicamente, se (1) então (2) e vice-versa

(3) Convergência geral

- Além de que as expressões em diferenças finitas convergem para as diferenciais, precisamos que a solução numérica convirja para a solução analítica

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \left\| N_{e,x,t} - N_{f,x,t} \right\| = 0$$

(4) Ordem da aproximação

- A ordem da aproximação é a menor potência em Δx ou Δt deixada de fora na expansão de Taylor.
- É preciso que a aproximação seja da mesma ordem em todas as variáveis para haver estabilidade e convergência.

Estabilidade

- A diferença entre a solução numérica e analítica não deve crescer com o tempo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|N_{e,x,t} - N_{f,x,t}\| \leq C$$

- Condicionalmente estável
 - Estável para $\Delta t < \Delta T_{\max}$
- Incondicionalmente estável:
 - É sempre estável qualquer que seja o Δt
- Incondicionalmente instável:
 - Instável qualquer que seja o Δt

Convergência e estabilidade de parte da solução (splitting) não garante convergência geral!

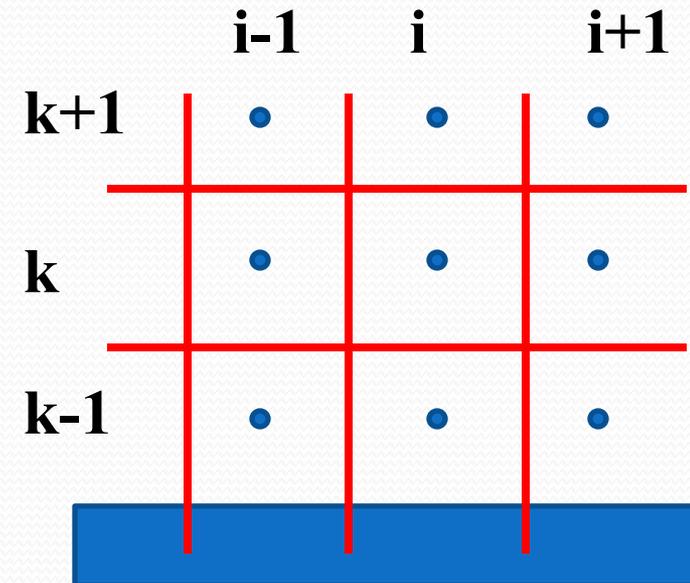
Exemplo

- Equação de advecção difusão apenas em x

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (Nu)$$

- Uma possível representação em diferenças finitas, fazendo explícito no tempo, seria

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x}$$



A maneira como discretizamos determina a estabilidade.

Problemas numéricos

Difusão numérica

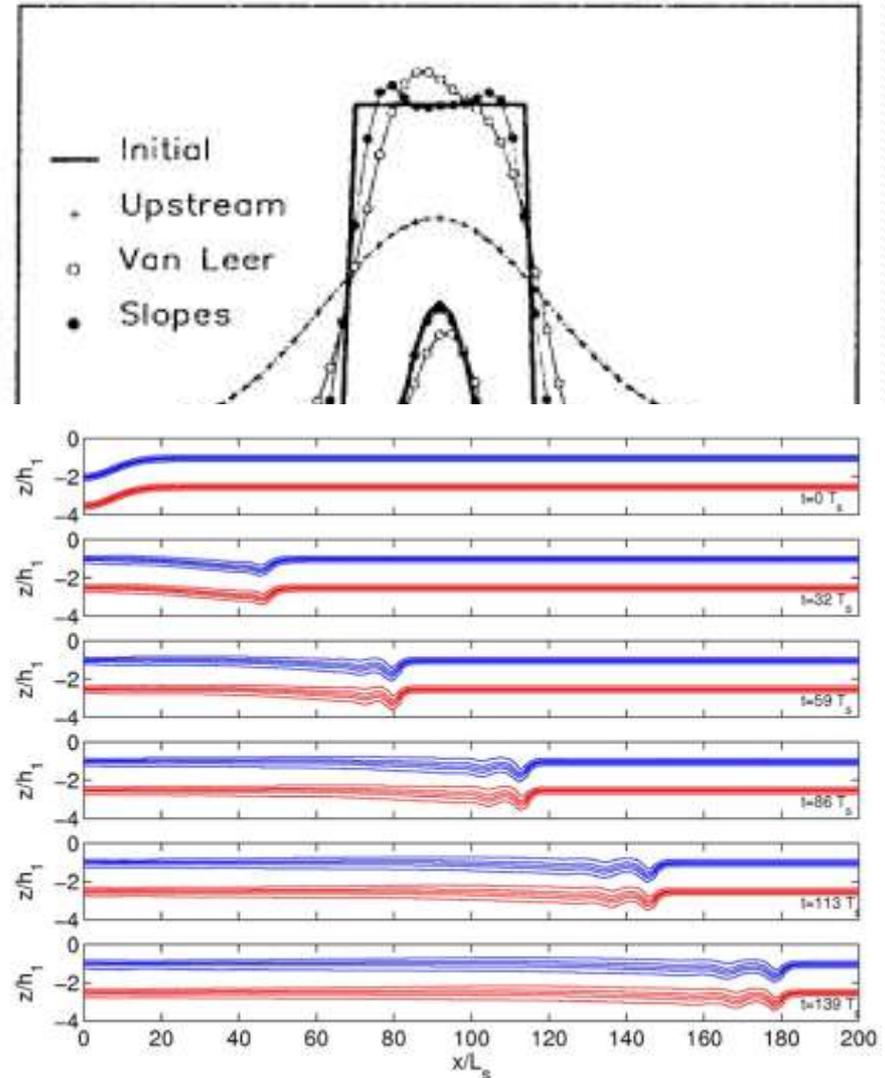
Um pico se espalha artificialmente pelos grid-boxes

Oscilação numérica

Podem surgir ondas dispersas atrás ou na frente de um pico

Não-monotônico

Os gradientes não são preservados durante o transporte





Entrando em detalhes...

Discretização

- Queremos integrar a equação numericamente, i.e., encontrar $N(t+\Delta t)$ em função de $N(t)$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu)$$

- Há três maneiras diferentes de fazer a discretização no tempo que levam a soluções conceitualmente diferentes:
 - **Explícita** – calcula-se $t+1$ em função apenas dos valores pré calculados: $t, t-1, \dots$
 - **Implícita** – calcula-se $t+1$ em função apenas dos valores desconhecidos em $t+1$
 - **Semi-implícito** – calcula-se $t+1$ com base tanto em $t+1$, quanto $t, t-1, \dots$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema explícito

- No lado direito da equação aparecem apenas termos no tempo (**t**)

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} + K \frac{N_t^{i+1} - 2N_t^i + N_t^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- E a solução para N_{t+1}^i é trivial:

$$N_{t+1}^i = N_t^i - \Delta t \frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} + \Delta t K \frac{N_t^{i+1} - 2N_t^i + N_t^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- Com apenas um laço **i=1,imax** resolvemos o problema!

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema explícito

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_t^{i+1} - Nu_t^{i-1}}{2\Delta x} + K \frac{N_t^{i+1} - 2N_t^i + N_t^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- Essa solução é de 1ª ordem avançada no tempo e de 2ª ordem centrada no espaço. O problema é que esta solução é
 - Condicionalmente estável – apenas para **K** pequeno
 - Incondicionalmente instável para **K=0** ou **K** grande

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema implícito

- No lado direito da equação aparecem apenas termos no tempo (**t+1**)

$$\frac{N_{t+1}^i - N_t^i}{\Delta t} = -\frac{Nu_{t+1}^{i+1} - Nu_{t+1}^{i-1}}{2\Delta x} + K \frac{N_{t+1}^{i+1} - 2N_{t+1}^i + N_{t+1}^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- E a solução para N_{t+1}^i é **não trivial** e acopla **i**, **i-1** e **i+1**.
- Agrupando os termos, temos

$$N_{t+1}^i \left(-\frac{u_{t+1}^{i+1}}{2\Delta x} + \frac{K}{\Delta x^2} \right) \Delta t$$

Esquema implícito

- Fazendo o mesmo para os outros termos, temos

$$\underbrace{\Delta t \left(\frac{K}{\Delta x^2} - \frac{u_{t+1}^{i+1}}{2\Delta x} \right)}_{A_i} N_{t+1}^{i+1} - \underbrace{\left(1 + \frac{2K}{\Delta x^2} \Delta t \right)}_{B_i} N_{t+1}^i + \underbrace{\Delta t \left(\frac{K}{\Delta x^2} + \frac{u_{t+1}^{i-1}}{2\Delta x} \right)}_{C_i} N_{t+1}^{i-1} = N_t^i$$

- Que é um sistema de equações diferenciais acopladas.

$$A_i N_{t+1}^{i+1} + B_i N_{t+1}^i + C_i N_{t+1}^{i-1} = N_t^i$$

- Que podem ser resolvidas na forma matricial....

Discretização

- As soluções da equação de difusão são, em geral:
 - Condicionalmente estáveis, se o esquema é explícito ou semi-implícito
 - Condicionalmente ou incondicionalmente estáveis, se o esquema é implícito

Critério de Estabilidade

- O critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy determina qual é o espaçamento de grade máximo para haver estabilidade na equação de difusão:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{|V_{\max}|}, \text{ ou número de Courant } \varepsilon = \frac{|V_{\max}|}{\Delta x / \Delta t} < 1$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{|K_{\max}|}$$

Fácil de entender:
Em $1 \Delta t$ a parcela não pode
atravessar mais do que 1 grid-box

Critério de Estabilidade

- Dependendo do espaçamento, há um limite para a resolução temporal!
- Exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = 5km \\ |V_{\max}| = 20m/s \\ \Delta z = 100m \\ |w_{\max}| = 1m/s \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t < 250s$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta z = 100m \\ |w_{\max}| = 1m/s \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t < 100s$$