Modelagem Numérica da Atmosfera – Parte 3

http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

Henrique M. J. Barbosa
Instituto de Física – USP
hbarbosa@if.usp.br

Conservação

- A equação de conservação de massa é semelhante a conservação de momento:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(N\mathbf{v}\right) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q + D_q \nabla^2 q + F_q - S_q$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

Equações Diferenciais

- Classificação quanto ao número de variáveis
  - Ordinárias = só tem uma variável independente

$$\frac{dG(t)}{dt} = F(t)$$

  - Parciais = tem mais de uma variável independente

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u G(t,x)}{\partial x} = 0$$

Equações Diferenciais

- Classificação quanto ao grau e ordem
  - Ordem = nível da derivada mais alta
  - Grau = potência da derivada mais alta

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial uG}{\partial x} = D\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

2ª ordem e 1º grau

Equações Diferenciais

- Classificação quando a homogeneidade
  - Homogêneas = não aparecem as variáveis independentes explicitamente

$$\frac{\partial G}{\partial t} = D\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

  - Não homogêneas = variáveis independentes explícitas

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 3t^2$$

Equações Diferenciais

- Classificação quando a linearidade
  - Lineares = a variável dependente e suas derivadas só aparecem em termos de 1º grau e não há produto entre elas

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial uG}{\partial x} = 0$$

  - Não lineares = existem termos de 2º ou maior grau e/ou produtos entre variáveis dependentes e suas derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Para a atmosfera

- Eq. da conservação e termodinâmica

- Parcial
- 1º ordem
- 1º grau
- Homogênea
- **Linear**

- Eq de momento (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \upsilon \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

- Parcial
- 1º ordem
- 1º grau
- Homogênea
- **NÃO-Linear**

Solução de uma Eq. Dif.

- Para resolver uma equação diferencial é preciso de condições de contorno. As CC podem ser de vários tipos e depende de qual problema estamos resolvendo
- Exemplo:
  - Podemos resolver **$dN/dt=F(t)$** se soubermos **$N_0=N(t=0)$**
  - Este tipo de **CC** é uma condição inicial (**C.I.**) de um problema de valor inicial.

Solução de uma Eq. Dif.

- Quando precisamos da **CC** nas duas extremidades do domínio, temos um problema de valor de contorno.
- Exemplo:
  - Para resolver $$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
  - Precisamos de **u(x,t=0)** e também **u(0,t)** e **u(L,t)**
  - Problema de C.I. em **t** e problema de CC em **x**
- Exemplo: o nudging do BRAMS nas fronteiras do domínio

Dificuldades a frente...

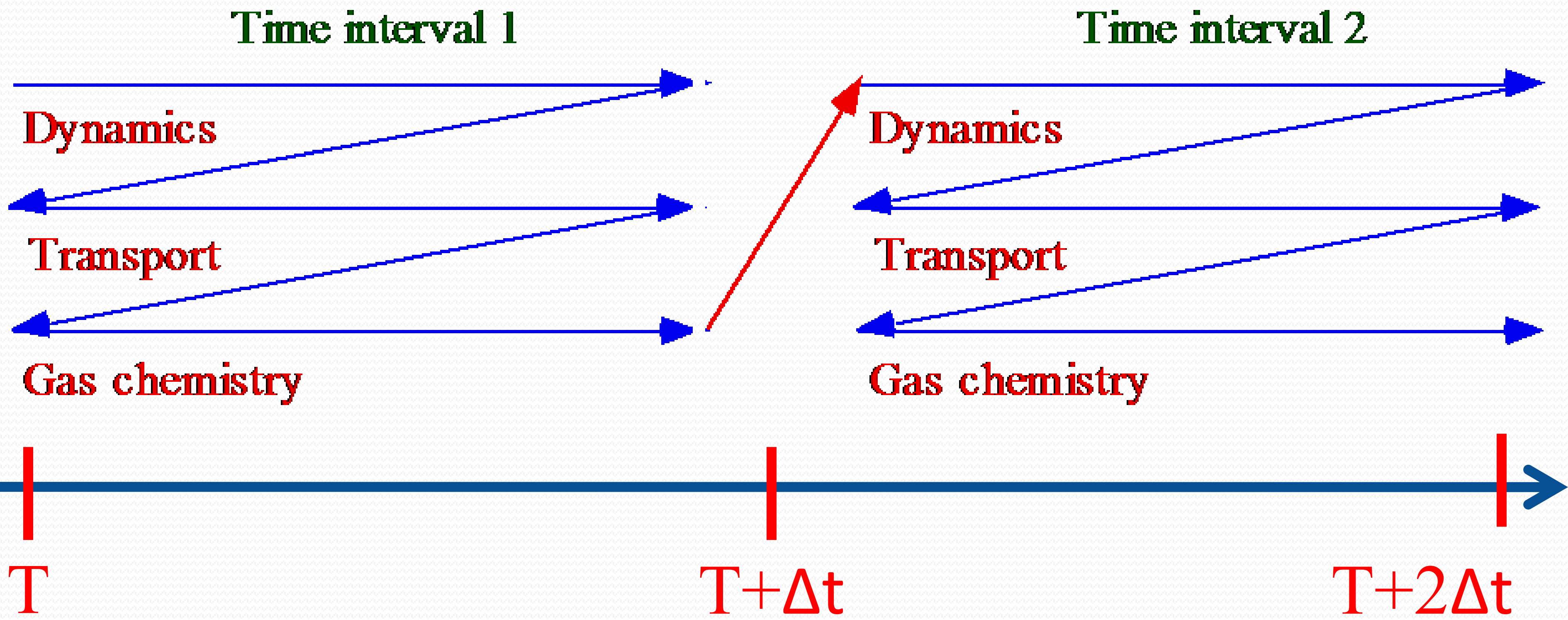
- Como resolver uma equação complicada?

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$

- De uma vez só, ou seja, encontrar N(x,y,z,t) ?
- Quando temos vários processos físicos acontecendo ao mesmo tempo?
- Dadas as limitações atuais dos computadores ?

Separação de Operadores

- O que se faz é resolver separadamente cada um dos processos. Por exemplo, um modelo numérico calcula separadamente: dinâmica, radiação, convecção, etc...



Separação de Operadores

- Exemplo, a equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N + F_N - S_N$$

- Operator-split nos termos de advecção-difusão

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot (N\mathbf{v}) + D_N \nabla^2 N$$

- Operator-split nos termos forçantes

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Separação de Operadores

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}}\overline{N}) + D\nabla^2 N \qquad \frac{\partial N}{\partial t} \approx \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Resolver estas equações seqüencialmente **é uma aproximação** da solução completa! Este método em particular é chamado de método dos intervalos fracionários.

Alguns modelos trocam a ordem em x,y,z entre dois time-steps para conseguir uma solução mais independente da separação dos operadores.

Separação de Operadores

- Em alguns modelos, como o CPTEC-AGCM, a equação é separada ainda mais:

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx -\nabla \cdot (\mathbf{v}N)$$

Transporte

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx D\nabla^2 N$$

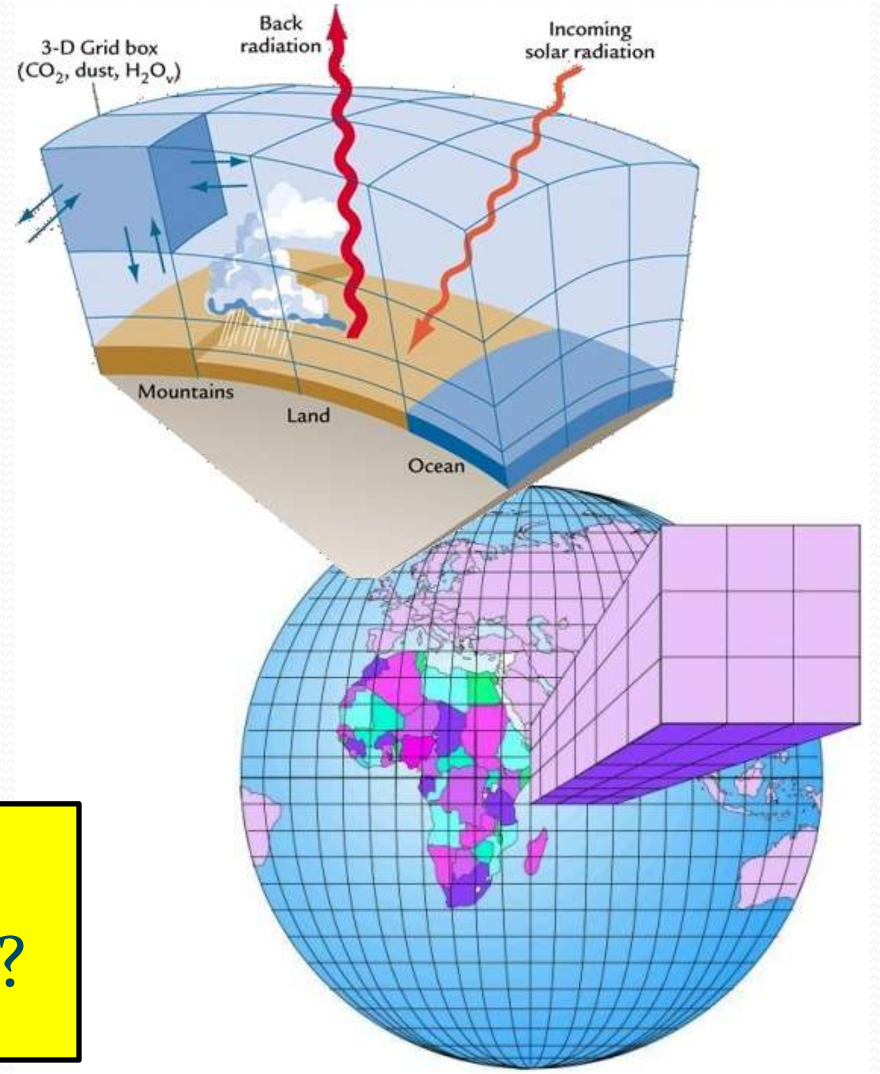
Difusão Molecular

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N_{e,t}} R_n = F - S$$

Física sub-grade

Como resolver as eq. da atmos.?

- São leis de conservação da física.
- São equações diferenciais e representam uma conservação local!
- São contínuas e válidas em todos os pontos do espaço físico (x,y,z,t)



O que acontece quando discretizamos as equações?

Limitações

- Quando discretizamos no tempo e no espaço **temos que usar intervalos finitos** e por isso a solução numérica não representa todos os movimentos da atmosfera.

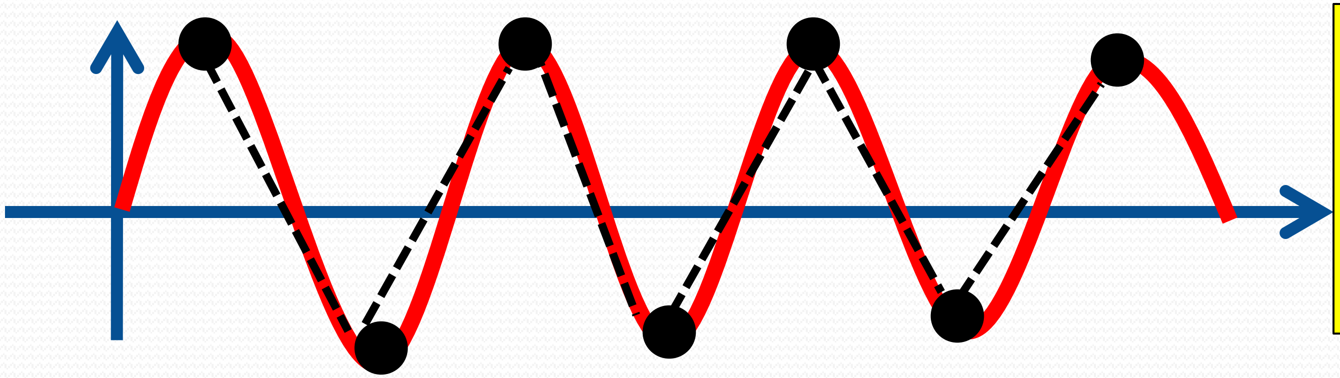
Escala	Δx	Δt
Meso escala	5 x 5 km	5 s
Regional	50 x 50 km	1 min
Global	250 x 250 km	30 min

Sampling Theorem

- Seja h(t) uma função contínua no tempo. Se medimos h(t) a cada Δ segundos, existe uma freqüência crítica

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}, \text{freq de Nyquist}$$

Máxima que pode ser observada com essa amostragem.



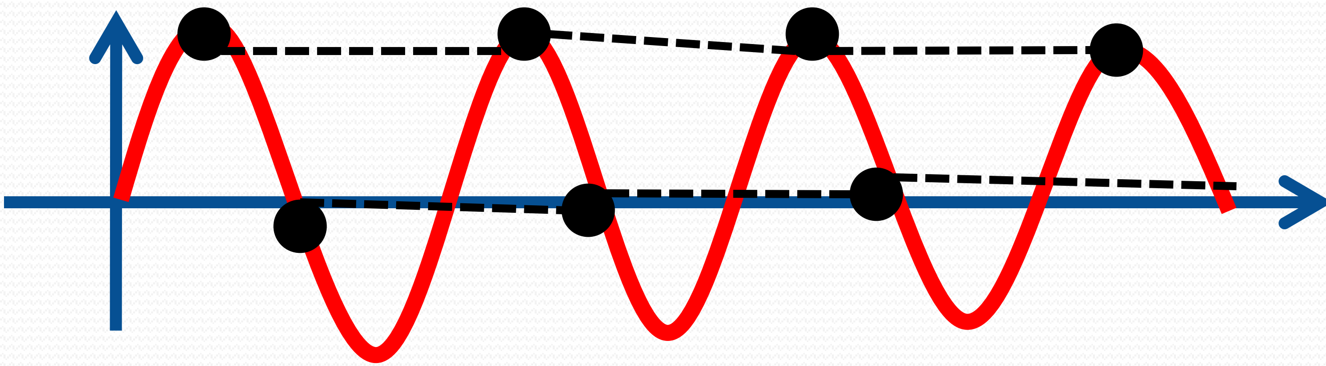
Minimamente amostrado com o dobro da freqüência do fenômeno

... Ou teorema de Nyquist

- Seja h(t) uma função contínua no tempo. Se medimos h(t) a cada Δ segundos, existe uma freqüência crítica

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}, \text{freq de Nyquist}$$

Máxima que pode ser observada com essa amostragem.



Caso de sub-amostragem (freq menor)

Teorema

- Seja **h(t)** e sua transformada de Fourier **H(f)**, se **H(f)=0** qualquer que seja **|f|>fc**, então **h(t)** é completamente determinada se for amostrada em intervalos **Δ<=1/2fc**.
- Exemplo:

$$f_c^{\,t} = \frac{1}{2\times 30\min} = 0.02Hz \Rightarrow T > 1hora$$

$$f_c^{\,x} = \frac{1}{2\times 100km} = 0.005km^{-1} \Rightarrow \lambda > 200km$$

Atmosfera

- Existem todas as freqüências e todas podem ser importantes devido as interações não lineares
  - Ex.: vórtices turbulentos e convecção acontecem em escalas muito menores e mais rápidas que 200km ou 1hora
- Em modelos climáticos é bom filtrar as altas freqüência para eliminar o ruído (queremos o comportamento médio)
- Resultados de Raupp & Silva Dias mostram que é importante a interação entre escalas (diurna->Madden Julian).
  - Ex.: Super-parametrização => MJ, El Nino, ...

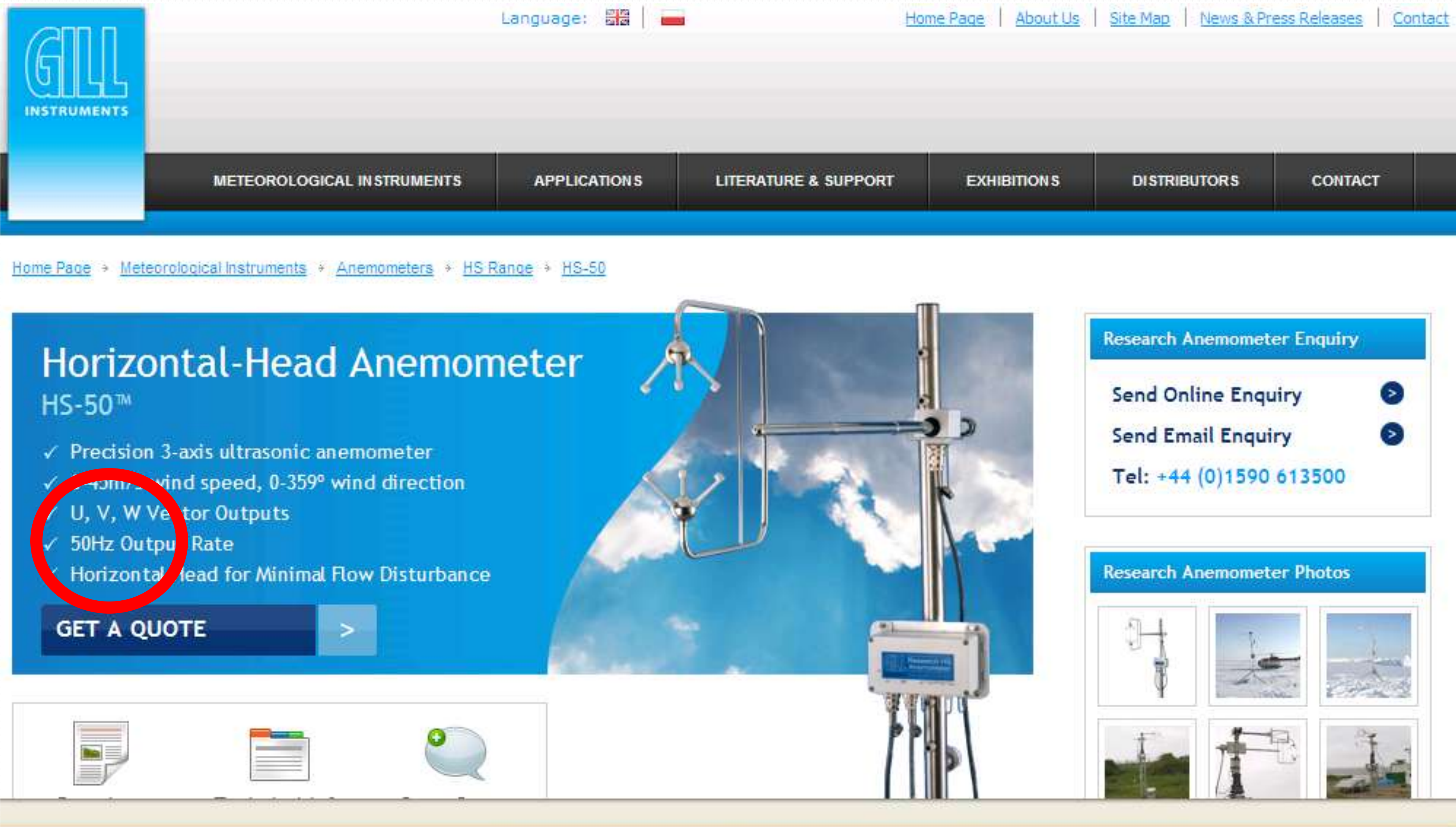
Turbulência

- A equação de Navier-Stokes é não linear

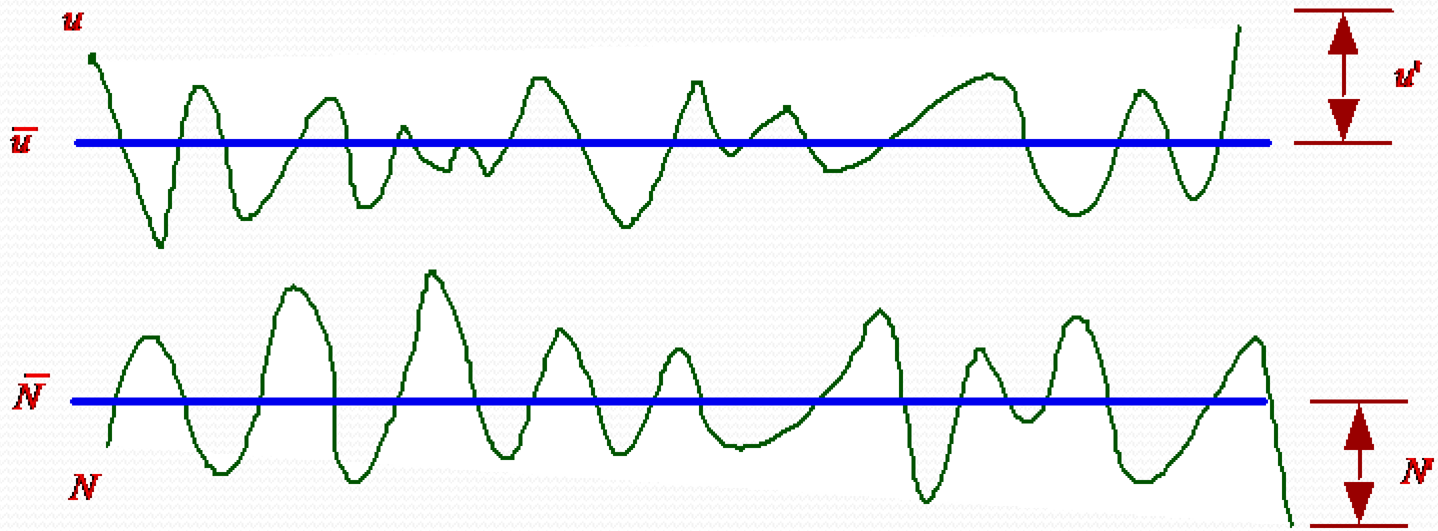
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \upsilon \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

- Isso produz caos na solução **U(x,t)** e implica em escoamento turbulento. Apenas em condições especiais o fluxo é laminar.
- **U(x,t)** flutua aleatoriamente em escalas menores que **1mm** e mais rápidas que **10Hz**! Impossível de resolver nos modelos (até mesmo em um **L.E.S.**)

Anemômetro sônico



A média de Reynolds



A concentração exata em (x, y, z, t)

$$N = \overline{N} + N'$$

Onde a média no volume do grid-box e no time-step é

$$\overline{N} = \frac{1}{\Delta t \Delta Vol} \int_{t}^{t+\Delta t} \int_{V}^{V+\Delta V} N(\vec{r}, t) \cdot dt \cdot dVol$$

A média de Reynolds

- $\overline{\mathbf{N}}$ depende do grid-box e do passo de tempo e é o valor previsto/calculado pelo modelo!
- Por definição **N’** flutua em torno de 0 e $\overline{\mathbf{N'}}$**=0**

Podemos fazer a mesma decomposição para a velocidade:

$$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{V}'$$

E então substituímos ambas nas equações originais

$$\frac{\partial \overline{N} + N'}{\partial t} = -\nabla \cdot \left((\overline{N} + N')(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \right) + D_N \nabla^2 (\overline{N} + N')$$

Expandindo a equação

- Expandindo e tomando a média (x e t), para o 1º termo:

$$\frac{\overline{\partial \overline{N} + N'}}{\partial t} = \frac{\overline{\partial \overline{N}}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial N'}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\overline{N}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{N'}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}$$

- Fazendo o mesmo para os demais termos, temos:

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}}\overline{N}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' N'}) + D\nabla^2 \overline{N} = F - S$$

Advecção pelo vento médio

Fluxo turbulento cinemático. É o efeito sub-grade !!

Expansão turbulenta

A difusão turbulenta é muito maior que a molecular, então sobra apenas:

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}}\overline{N}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}'N'}) = F - S$$

Para a equação da continuidade concentração específica

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{q} + \frac{1}{\overline{\rho}} \nabla \cdot \left(\overline{\rho}\, \overline{\mathbf{v}'q'} \right) = F - S$$

Para a equação da continuidade em densidade

$$\frac{\partial \overline{\rho_a}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}}\overline{\rho_a}) + \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{v}'\rho_a'} \right) = 0$$

Precisamos parametrizar!!

Parametrização

- O modelo resolve e conhece apenas os valores médios em cada grid-box, **v** e **q**, como então podemos estimar o fluxo turbulento <v'**q**'> ??
- Fazendo uma analogia com a lei de Fick

$$\mathbf{F}\psi = -D\nabla\psi$$

- Assume-se que o fluxo turbulento é proporcional ao gradiente (**teoria K** ou teoria do transporte dos gradientes)

$$\overline{u'q'} \propto \nabla q$$

Teoria K

O fluxo turbulento de um parâmetro é relacionado ao gradiente do valor médio do parâmetro. Assim, os termos do fluxo cinemático turbulento ficam:

$$\overline{u'N'} = -K_{h,xx}\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \text{ , em x}$$

Onde $\boldsymbol{K_h}$ é um coeficiente de difusão turbulenta (Para energia e momento: cm^2 s^{-1}). Assim,

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{v}}\overline{N}\right) = \nabla \cdot \left(\mathbf{K_h}\nabla \overline{N}\right) + F - S$$

$$\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla\right)\overline{\mathrm{q}} = \frac{1}{\rho_a}\left(\nabla \cdot \rho_a \mathbf{K_h} \nabla\right)\overline{\mathrm{q}} + F - S$$

Matriz de difusão

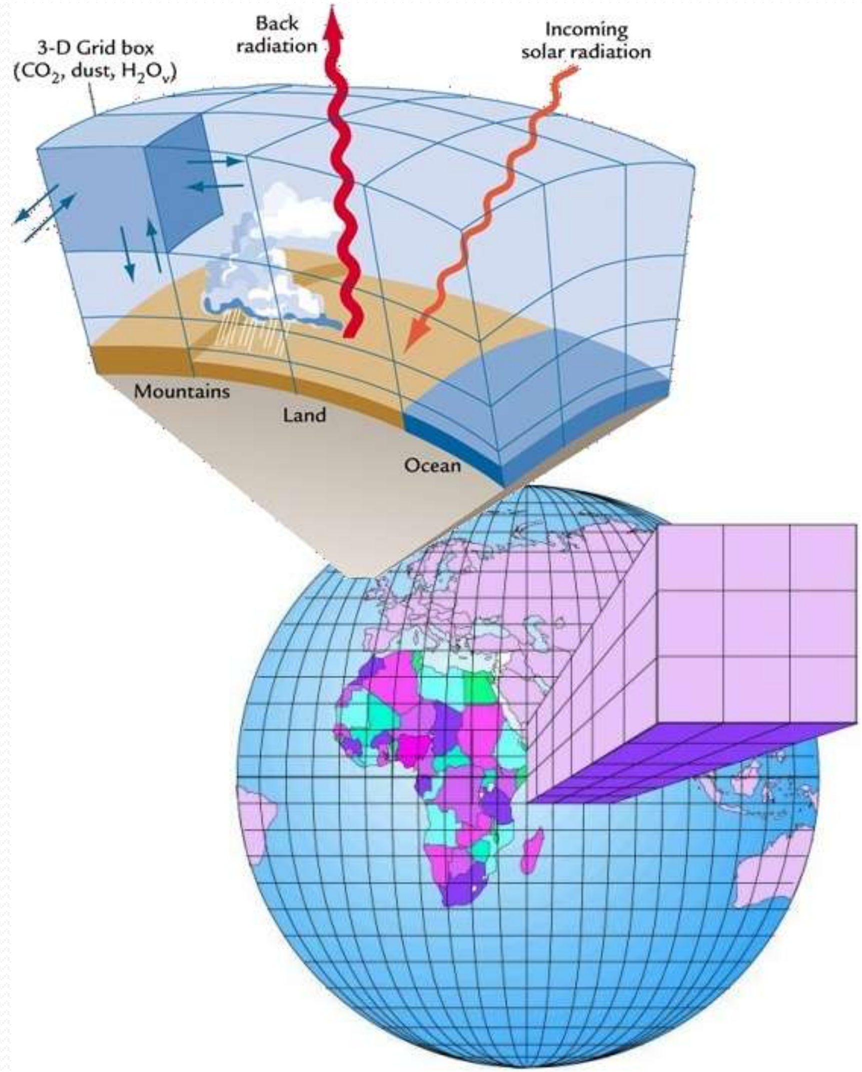
- **Kh** é a matriz de difusão e **Kx**, **Ky** e **Kz** são os coeficientes de difusão turbulenta.

$$\mathbf{K}_h = \begin{bmatrix} K_{h,xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{h,yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{h,zz} \end{bmatrix}$$

- Os termos cruzados dão uma covariância entre o transporte turbulento em direções diferentes e em geral são assumidos nulos.
- A diagonal dá o transporte do gradiente devido a mistura turbulenta

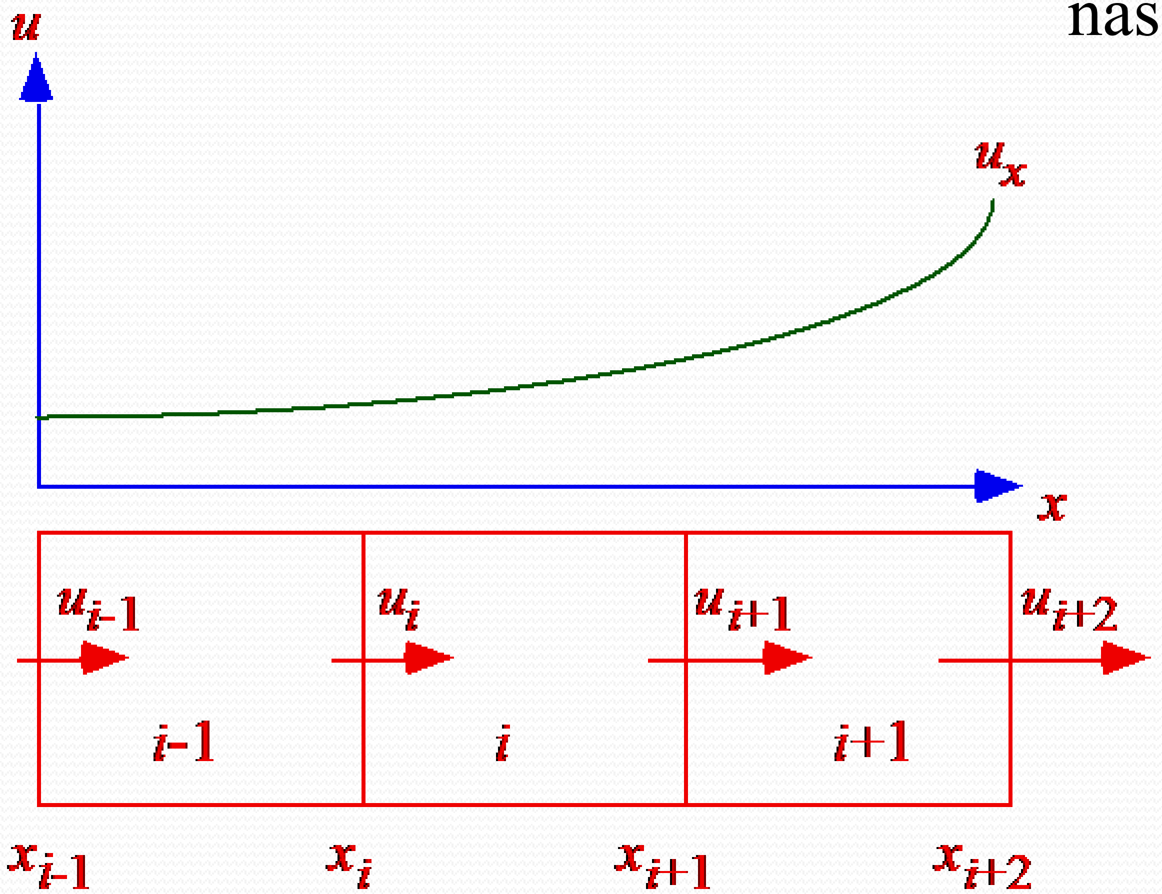
O que falta?

- OK
  - separamos as variáveis independentes,
  - fizemos a média sobre os grid-boxes,
- …mas ainda temos uma EDP "contínua". Para resolvê-la numericamente, temos que discretizar!



Diferenças Finitas

Trocamos os valores contínuos por discretos nas equações…



$$\frac{\partial u}{\partial x} = ??$$

Diferenças Finitas

Definimos as diferenças **Δu** no ponto x_i

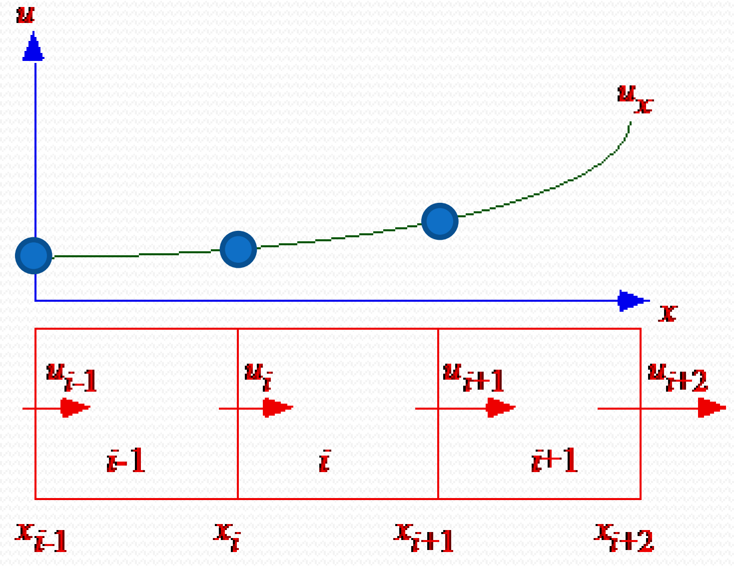
$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_{i-1}$$ diferença centrada

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$$ diferença avançada

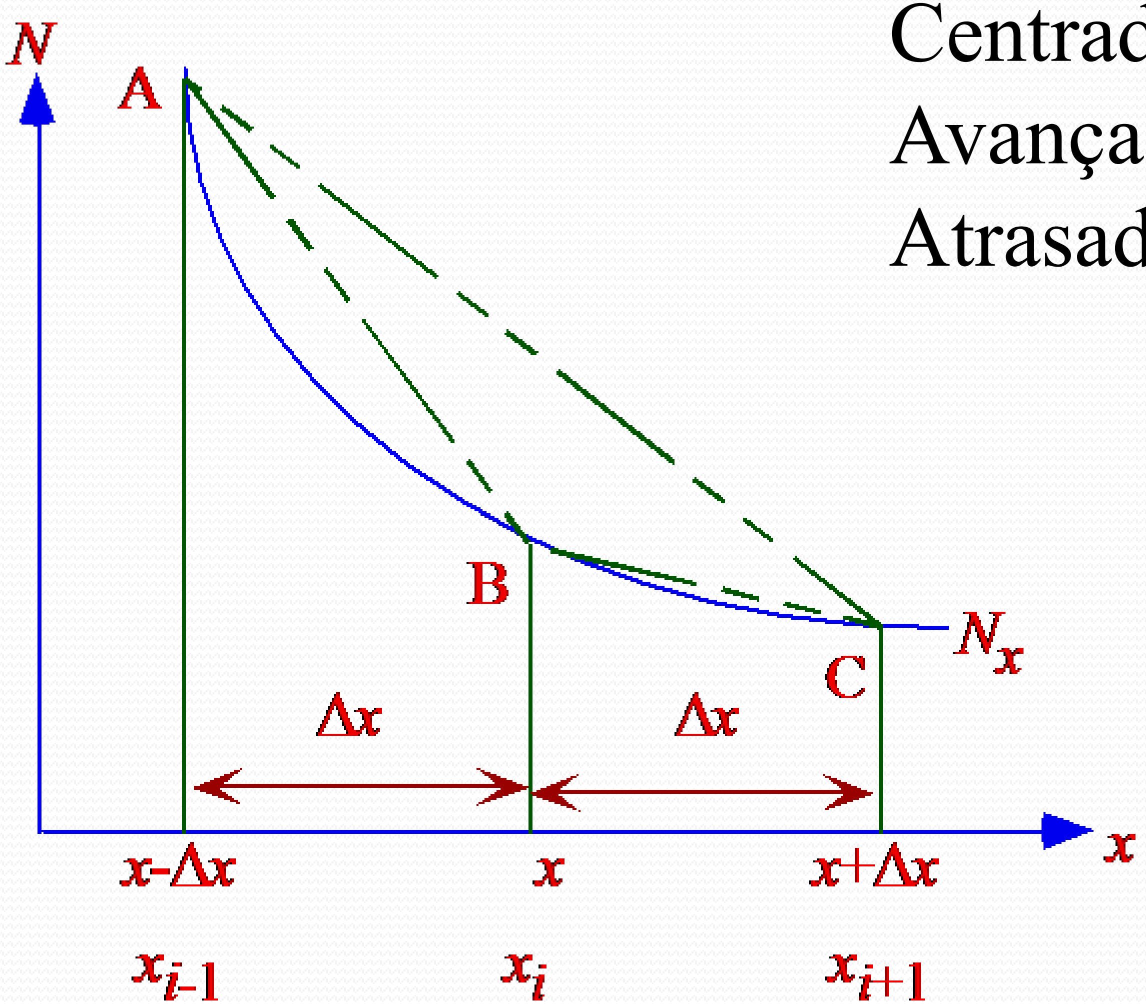
$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$$ diferença atrasada

Estamos aproximando a derivada pela tangente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



Diferenças Finitas



Centrada (AC)
Avançada (BC)
Atrasada (AB)

Expansão em série de Taylor

Expandindo em Taylor em torno do ponto x, calculamos o valor em $x+\Delta x$

$$N_{x+\Delta x} = N_x + \Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{6}\Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} \ldots$$

Iguais de sinais opostos

Ou em torno de $x-\Delta x$

$$N_{x-\Delta x} = N_x - \Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} \ldots$$

Expansão em série de Taylor

Assim, temos que

$$N_{x+\Delta x} + N_{x-\Delta x} = 2N_x + \Delta x^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\Delta x^4 \frac{\partial^4 N_x}{\partial x^4} + \ldots$$

Que pode ser rearranjado para

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{N_{x+\Delta x} - 2N_x + N_{x-\Delta x}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

Desprezando termos de 2a ordem e superiores

$$O\left(\Delta x^2\right) = -\frac{1}{12}\Delta x^2 \frac{\partial^4 N_x}{\partial x^4} - \ldots$$

É aproximação de 2a ordem para a segunda derivada

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - 2N_x + N_{x-\Delta x}}{\Delta x^2}$$

Expansão em série de Taylor

Agora vamos subtrair as duas equações. Os termos pares cancelam...

$$N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x} = 2\Delta x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{3}\Delta x^3 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} + \ldots$$

Rearranjando, temos

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \frac{N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right)$$

Onde truncamos da mesma maneira

$$O\left(\Delta x^2\right) = -\frac{1}{6}\Delta x^2 \frac{\partial^3 N_x}{\partial x^3} - \ldots$$

É uma aproximação de segunda ordem para a primeira derivada

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - N_{x-\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{N_{i+1} - N_{i-1}}{2\Delta x}$$

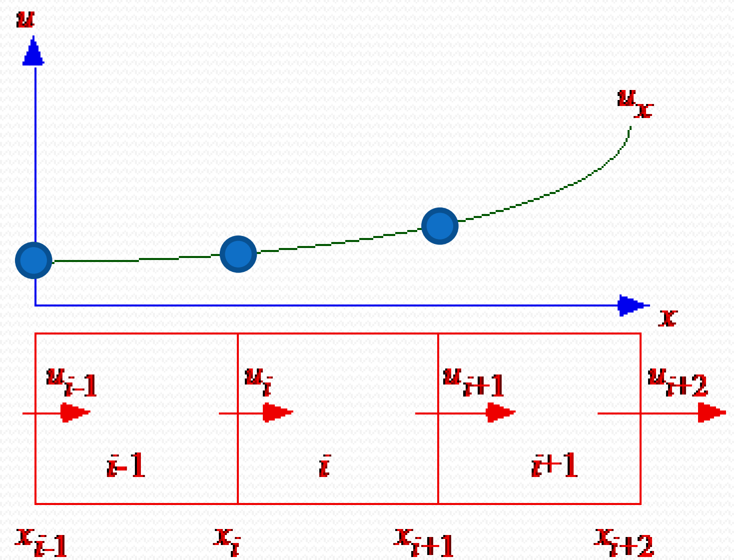
Diferenças finitas – 1ª derivada em x

Aproximação de 1ª ordem avançada em x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_{x+\Delta x} - N_x}{\Delta x} = \frac{N_{i+1} - N_i}{\Delta x}$$

Aproximação de 1ª ordem atrasada em x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \approx \frac{N_x - N_{x-\Delta x}}{\Delta x} = \frac{N_i - N_{i-1}}{\Delta x}$$



Diferenças finitas – Derivada no tempo

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_{t+h} - N_{t-h}}{2h} + O(2)$$

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_{t+h} - N_t}{h} + O(1)$$

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} \approx \frac{N_t - N_{t-h}}{h} + O(1)$$

Critérios

- Uma solução numérica para uma equação diferencial reproduz a solução analítica apenas se vários critérios forem satisfeitos
  - Convergência
  - Consistência
  - Ordem da aproximação
  - Convergência geral
  - Estabilidade numérica

(1) Convergência

- A expressão em diferenças finitas deve convergir para a forma diferencial no sentido do teorema central do limite:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\| \frac{\Delta N}{\Delta x} \right\|$$

(2) Consistência

- Ao fazer a expansão em série de Taylor, jogamos fora termos de alta ordem....
- Para a aproximação em diferenças finitas ser válida, o erro no truncamento deve ir para zero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\| \mathrm{T.E.}\left(\frac{\Delta N}{\Delta x} \right) \right\| = 0$$

- Matematicamente, se (1) então (2) e vice-versa

(3) Convergência geral

- Além de que as expressões em diferenças finitas convergem para as diferenciais, precisamos que a solução numérica convirja para a solução analítica

$$\lim_{\Delta x,\Delta t\to 0}\left\| N_{e,x,t} - N_{f,x,t} \right\| = 0$$

(4) Ordem da aproximação

- A ordem da aproximação é a menor potência em **Δx** ou **Δt** deixada de for a na expansão de Taylor.

- É preciso que a aproximação seja da mesma ordem em todas as variáveis para haver estabilidade e convergência.

Estabilidade

- As diferenças entre a solução numérica e analítica não deve crescer com o tempo

$$\lim_{t\to\infty}\left\| N_{e,x,t} - N_{f,x,t} \right\| \leq C$$

- Condicionalmente estável
  - Estável para **Δt < Δ Tmax**
- Incondicionalmente estável:
  - É sempre estável qualquer que seja o **Δt**
- Incondicionalmente instável:
  - Instável qualquer que seja o **Δt**

Convergência e estabilidade de parte da solução (spliting) não garante convergência geral!

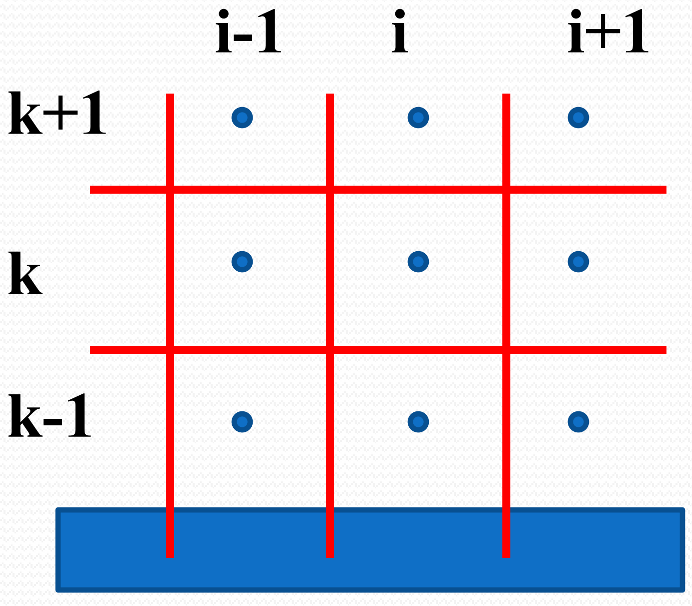
Exemplo

- Equação de advecção difusão apenas em **x**

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu)$$

- Uma possível representação em diferenças finitas, fazendo explícito no tempo, seria

$$\frac{N_{t+1}^{i} - N_{t}^{i}}{\Delta t} = -\frac{Nu_{t}^{i+1} - Nu_{t}^{i-1}}{2\Delta x}$$

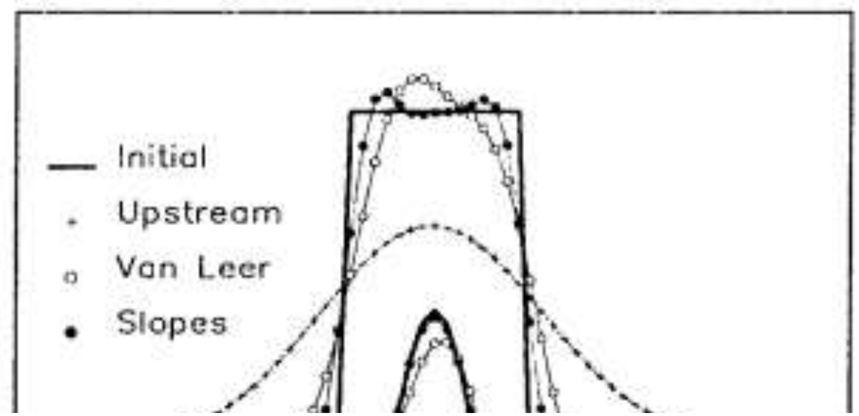


A maneira como discretizamos determina a estabilidade.

Problemas numéricos

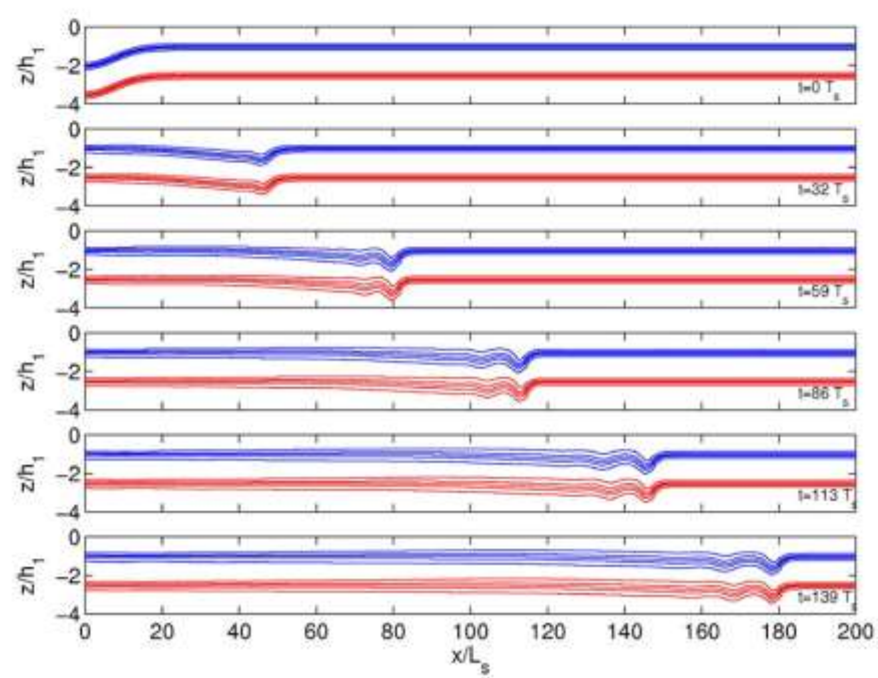
Difusão numérica

Um pico se espalha artificialmente pelos grid-boxes



Oscilação numérica

Podem surgir ondas dispersas atrás ou na frente de um pico



Não-monotônico

Os gradientes não são preservados durante o transporte

Discretização

- Queremos integrar a equação numericamente, i.e., encontrar N(t+Δt) em função de N(t)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu)$$

- Há três maneiras diferentes de fazer a discretização no tempo que levam a soluções conceitualmente diferentes:
  - **Explícita** – calcula-se t+1 em função apenas dos valores pré calculados: t, t-1, ...
  - **Implícita** – calcula-se t+1 em função apenas dos valores desconhecidos em t+1
  - **Semi-implícito** – calcula-se t+1 com base tanto em t+1, quanto t, t-1, ...

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema explícito

- No lado direito da equação aparecem apenas termos no tempo **(t)**

$$\frac{N_{t+1}^{i} - N_{t}^{i}}{\Delta t} = -\frac{Nu_{t}^{i+1} - Nu_{t}^{i-1}}{2\Delta x} + K\frac{N_{t}^{i+1} - 2N_{t}^{i} + N_{t}^{i-1}}{\Delta x^{2}}$$

- E a solução para N_{t+1}^{i} é trivial:

$$N_{t+1}^{i} = N_{t}^{i} - \Delta t\frac{Nu_{t}^{i+1} - Nu_{t}^{i-1}}{2\Delta x} + \Delta t K\frac{N_{t}^{i+1} - 2N_{t}^{i} + N_{t}^{i-1}}{\Delta x^{2}}$$

- Com apenas um laço **i=1,imax** resolvemos o problema!

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema explícito

$$\frac{N_{t+1}^{i} - N_{t}^{i}}{\Delta t} = -\frac{Nu_{t}^{i+1} - Nu_{t}^{i-1}}{2\Delta x} + K\frac{N_{t}^{i+1} - 2N_{t}^{i} + N_{t}^{i-1}}{\Delta x^{2}}$$

- Essa solução é de 1ª ordem avançada no tempo e de 2ª ordem centrada no espaço. O problema é que esta solução é
  - Condicionalmente estável – apenas para **K** pequeno
  - Incondicionalmente instável para **K=0** ou **K** grande

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Nu) + \nabla \cdot K \nabla N$$

Esquema implícito

- No lado direito da equação aparecem apenas termos no tempo **(t+1)**

$$\frac{N_{t+1}^{i} - N_{t}^{i}}{\Delta t} = -\frac{Nu_{t+1}^{i+1} - Nu_{t+1}^{i-1}}{2\Delta x} + K\frac{N_{t+1}^{i+1} - 2N_{t+1}^{i} + N_{t+1}^{i-1}}{\Delta x^2}$$

- E a solução para N_{t+1}^{i} é **não-trivial** e acopla **i**, **i-1** e **i+1**.
- Agrupando os termos, temos

$$N_{t+1}^{i+1}\left(-\frac{u_{t+1}^{i+1}}{2\Delta x} + \frac{K}{\Delta x^2}\right)\Delta t$$

Esquema implícito

- Fazendo o mesmo para os outros termos, temos

$$\underbrace{\Delta t\left(\frac{K}{\Delta x^2}-\frac{u_{t+1}^{i+1}}{2\Delta x}\right)}_{\mathrm{A_i}}N_{t+1}^{i+1}-\underbrace{\left(1+\frac{2K}{\Delta x^2}\Delta t\right)}_{\mathrm{B_i}}N_{t+1}^{i}+\underbrace{\Delta t\left(\frac{K}{\Delta x^2}+\frac{u_{t+1}^{i-1}}{2\Delta x}\right)}_{\mathrm{C_i}}N_{t+1}^{i-1}=N_t^i$$

- Que é um sistema de equações diferenciais acopladas.

$$A_i N_{t+1}^{i+1}+B_i N_{t+1}^{i}+C_i N_{t+1}^{i-1}=N_t^i$$

- Que podem ser resolvidas na forma matricial....

Solução Matricial

$$
\begin{pmatrix}
B_1 & C_1 & 0 & & & & & \\
A_2 & B_2 & C_2 & & & & & \\
0 & A_3 & B_3 & C_3 & & & & \\
 & & & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & & & \\
 & & & & A_{M-2} & B_{M-2} & C_{M-2} & 0 \\
 & & & & & A_{M-1} & B_{M-1} & C_{M-1} \\
0 & & & \cdots & & 0 & A_M & B_M
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
N^1 \\ N^2 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \\ N^M
\end{pmatrix}_{t+1}
=
\begin{pmatrix}
N^1 - 2\dfrac{\Delta t}{\Delta x} F_{sfc} \\ N^2 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \\ N^M
\end{pmatrix}_t
$$

Sistema tridiagonal. Resolvido com eliminação de Gauss

- Onde já incluímos a condição de contorno devido ao fluxo de superfície (é preciso discretizar de uma maneira um pouco diferente na interface)

Discretização

- As soluções da equação de difusão são, em geral:

  - Condicionalmente estáveis, se o esquema é explicito ou semi-implícito

  - Condicionalmente ou incondicionalmente estáveis, se o esquema é implícito

Critério de Estabilidade

- O critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy determina qual é o espaçamento de grade máximo para haver estabilidade na equação de difusão:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{|V_{\max}|}, \text{ ou número de Courant } \varepsilon = \frac{|V_{\max}|}{\Delta x / \Delta t} < 1$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{|K_{\max}|}$$

Fácil de entender:
Em 1 Δt a parcela não pode atravessar mais do que 1 grid-box

Critério de Estabilidade

- Dependendo do espaçamento espacial, há um limite para o espaçamento no tempo!
- Exemplo:

$$\begin{cases} \Delta x = 5km \\ |V_{\max}| = 20m/s \\ \Delta z = 100m \\ |w_{\max}| = 1m/s \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \Delta t < 250s \\ \\ \Rightarrow \Delta t < 100s \end{matrix}$$