AULA 5

As equações que escrevemos até agora são leis de conservação da física:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}N)$$

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

} conserv. massa

$$\frac{d\theta_v}{dt} \simeq \frac{\theta_v}{c_p T_v}\frac{dQ}{dt}$$

} energia

Elas são equações diferenciais e representam uma conservação local. São válidas em todos os pontos do espaço físico contínuo (x, y, z, t).

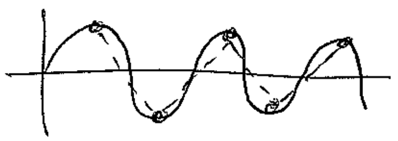
O problema é que quando resolvemos o problema numericamente precisamos discretizar o espaço e o tempo em intervalos finitos, por isso a solução numérica destas equações não é capaz de representar todos os movimentos na atmosfera:

modelo	meso escala	5 x 5 km	~ 5 s
	regional	50 x 50 km	~ 1 min.
	global	250 x 250 km	~ 30 min

Isso é fácil de entender. Seja $h(t)$ uma função contínua do tempo. Se medimos $h(t)$ apenas em intervalos Δ, existe uma frequência crítica:

$$f_c = \frac{1}{2\Delta}$$ freq de Nyquist

máxima que pode ser observada com essa amostragem. Ex: se medimos a cada 1Δ, não conseguimos observar fenômenos que ~~vai~~ de frequência $>$ ~~2Δ~~ 0.5Hz



O teorema de Nyquist ou "sampling" Theorem diz que: se $h(t)$ é composta apenas por freq. menores que f_c, i.e., $H(f)=0 \;\forall\; |f|> f_c$, então $h(t)$ é completamente determinada se for amostrada em intervalos Δ, onde $f_c = 1/2\Delta$.

De fato, se $h(t)$ é "band width" limitted, então:

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin(2\pi f_c (t-n\Delta))}{\pi (t-n\Delta)}$$

$\Rightarrow$ No caso da atmosfera, <u>todas</u> as frequências estão presentes e, devido às interações não lineares, <u>todas</u> podem ser importantes!

No caso de um modelo global, teríamos:

$$\begin{cases} f_N^{t} \sim \dfrac{1}{2\ 0{,}5h} = \dfrac{1}{hora} \sim 0.02\,Hz & T^{t} \geq 1\ hora \\ f_N^{espacial} \sim \dfrac{1}{2 \cdot 100km} = 0.005\,km^{-1} & \lambda \geq 200km \end{cases}$$

As flutuações na atmosfera devido aos vórtices turbulentos, por exemplo, são muito menores do que isso. Convecção é outro exemplo.

⇒ Nota: limitar as frequências máximas que são resolvidas por um modelo às vezes pode ser bom. Por exemplo, p/ um modelo climático, interessado no comportamento geral (grande escala) da atmosfera, pode fazer sentido não querer introduzir ruídos de alta frequência!

⇒ Por outro lado, resultados do pedro dias mostram que a transferência de energia entre escalas é importante! Ex: ciclo diurno bem feito p/ simular Madden-Julian.

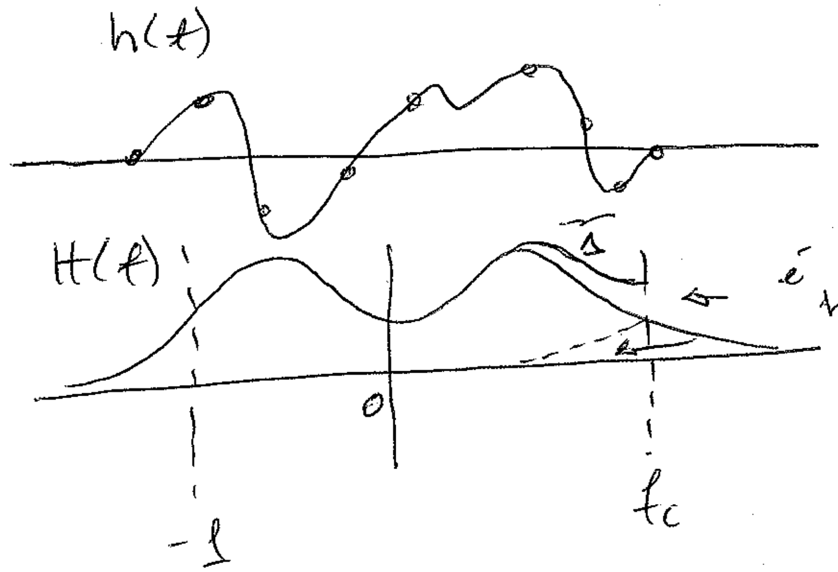
⇒ Microfísica 2D em modelo climático ajudam a representar oscilações globais. Madden-Julian, El Nino, Asia monsoon, ...

PROB

Mas quando amostramos uma função que não é limitada em frequência $|f| < f_c$, a densidade de energia nas freq $f > f_c$ são jogadas no intervalo $-f_c < f < f_c$ devido ao processo de amostragem.

→ filtrar a função antes de amostrar

→ usar uma freq de amostragem > que a maior freq presente no sinal



é preciso verificar se o espectro de potência vai a zero prox de f_c.

Atmosfera

O problema na atmosfera é que a eq. de Navier-Stokes não é linear:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \underbrace{-U \cdot \vec{\nabla} U}_{\text{não linear}} + \nu \nabla^2 U - \frac{\nabla p}{\rho} + g$$

ordem = 2 (deriv)
grau = 2 (poly)

Isso produz caos na solução $\vec{U}(\vec{x}, t)$, o que significa que $\vec{U}$ é um escoamento turbulento. Só em condições especiais observamos um escoamento laminar na atmosfera.

$\vec{U}$ flutua aleatoriamente em escalas de 1mm e 10Hz! Não é possível resolver c/ modelos...

Se o modelo não tem resolução suficiente para resolver todos os vórtices turbulentos na ~~at~~ atmosfera é preciso considerá-los de outra maneira. O que se faz é uma média de Reynolds:

decompomos o campo contínuo $f(x,y,z,t)$ em duas componentes: $\bar{f}$, a média no seu grid-box ($\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$) e uma flutuação $f' = f - \bar{f}$.

$$N = \bar{N} + N'$$

onde $$\bar{N} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} N(x,y,z,t)\, dx\,dy\,dz\,dt$$

↳ média no grid-box.

$\bar{N}$ ~~...~~ depende do grid-box e do passo de tempo, e é o valor que será previsto pelo modelo!

Por definição N' flutua (+ e −) em torno de $\bar{N}$ e $\overline{N'} = 0$ pois:

$$\overline{N = \bar{N} + N'} \Rightarrow \bar{N} = \bar{\bar{N}} + \overline{N'}$$

$$\cancel{\bar{N}} = \cancel{\bar{N}} + \overline{N'}$$

hipótese de Reynolds $\boxed{\overline{N'} = 0}$ a média das flutuações é nula!

Da mesma maneira, decompomos as velocidades:

$$u = \bar{u} + u' \quad , \quad v = \bar{v} + v' \quad e \quad w = \bar{w} + w'$$

$$\vec{v} = \overline{\vec{v}} + \vec{v}'$$

Podemos estimar os efeitos dos movimentos sub-grade substituindo as decomposições nas eq. originais.

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} N) = D \nabla^2 N + \sum R_n$$

$$\frac{\partial (\bar{N} + N')}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ (\bar{v} + v')(\bar{N} + N') \right\} = D \nabla^2 (\bar{N} + N') + \sum R_n$$

Tomando a média no tempo e no espaço, temos: (as médias e as derivadas são operadores lineares e podem ser trocados):

$$\overline{\frac{\partial (\bar{N} + N')}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\bar{N} + N')} = \frac{\partial \bar{\bar{N}}}{\partial t} + \cancelto{0}{\frac{\partial \overline{N'}}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla^2 (\bar{N} + N')} = \nabla^2 \overline{(\bar{N} + N')} = \nabla^2 \bar{\bar{N}} + \cancelto{0}{\nabla^2 \overline{N'}} = \nabla^2 \bar{N}$$

Sempre temos que os termos com apenas uma flutuação zeram. Apenas os cruzados irão sobreviver:

$$\overline{\nabla\cdot(\vec{v}N)} = \nabla\cdot\left\{\overline{\bar{v}\bar{N} + \bar{v}N' + v'\bar{N} + v'N'}\right\} =$$

$$= \nabla\cdot\left\{\overline{\bar{v}\bar{N}} + \overline{\bar{v}N'} + \overline{v'\bar{N}} + \overline{v'N'}\right\}$$

$$= \nabla\cdot\left\{\bar{\bar{v}}\bar{\bar{N}} + \bar{v}\underbrace{\cancel{\overline{N'}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\overline{v'}}}_{0}\bar{\bar{N}} + \overline{v'N'}\right\}$$

$$= \nabla\cdot\left\{\bar{v}\bar{N} + \overline{v'N'}\right\}$$

O termo $\overline{\vec{v}'N'}$ representa um transporte devido aos movimentos turbulentos subgrade. É o fluxo turbulento cinemático. Assim a equação fica:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{v}\bar{N}) + \nabla\cdot(\overline{v'N'}) = D\nabla^2\bar{N} + \sum R_m$$

Se não estivermos tratando da escala de movimento molecular, então $\nabla\cdot\overline{v'N'} \gg D\nabla^2\bar{N}$ e podemos desprezar a difusão:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \underbrace{\nabla\cdot(\bar{v}\bar{N})}_{\text{advecção devido ao vento médio}} + \underbrace{\nabla\cdot(\overline{v'N'})}_{\text{Transporte turbulento.}} = \sum R$$

Poderíamos fazer a mesma dedução p/ a eq com a densidade do ar.

$$\frac{\partial \overline{\rho_a}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{v}\,\overline{\rho_a}) + \nabla \cdot (\overline{v'\rho_a'}) = 0$$ pois não há fontes de ar ...

Poderíamos fazer o mesmo também p/ a concentração específica:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v \cdot \nabla q = \sum Q_n \quad , \quad Q_n \equiv \frac{\text{Kg vapor}}{\text{Kg ar}}\, s^{-1}$$

Mas teríamos um termo em $\overline{v' \cdot \nabla q'}$ que não teria a forma genérica de um fluxo turbulento $\overline{u'q'}$ ... Vamos deduzir a partir da equação p/ o N:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (vN) = \sum R_n \quad , \quad R_n \equiv \#\frac{mol}{cm^3}/s$$

Pois sabemos que:

$$N = \frac{A}{m}\rho_a q$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_a q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a v q) = \rho_a \sum Q_n = \frac{m}{A}\rho_a \sum R_n$$

Vamos desprezar as flutuações na densidade do ar pois $\rho_a' << \overline{\rho_a}$ na atmosfera, ou seja:

$$\rho_a \simeq \overline{\rho_a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\rho}_a\,(\bar{q}+q')\right] + \nabla\cdot\left[\bar{\rho}_a\,(\bar{v}+v')(\bar{q}+q')\right] = \bar{\rho}\,\sum Q_n$$

Tomando a média, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\bar{\rho}\bar{q})} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\bar{\rho}q')}}}_{0} + \nabla\cdot\left\{\bar{\rho}\,\overline{\left[\bar{v}\bar{q} + \underbrace{\cancel{\bar{v}q'}}_{0} + \underbrace{\cancel{v'\bar{q}}}_{0} + v'q'\right]}\right\} = \bar{\rho}\,\sum\overline{Q_n}$$

$$\overbrace{\bar{\rho}\,\frac{\partial\bar{q}}{\partial t} + \bar{q}\,\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}} + \nabla\cdot\left\{\bar{\rho}\,\bar{v}\bar{q} + \bar{\rho}\,\overline{v'q'}\right\} = \bar{\rho}\,\sum\overline{Q_n}$$

Usando a eq p/ a densidade do ar:

$$\boxed{\frac{\partial\bar{\rho}_a}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{v}\,\bar{\rho}_a) + \nabla\cdot\underbrace{\cancel{(\overline{v'\rho_a'})}}_{\simeq 0} = 0}$$

Temos:

$$\bar{\rho}\,\frac{\partial\bar{q}}{\partial t} - \cancel{\bar{q}\,\nabla\cdot(\bar{v}\bar{\rho})} + \nabla\cdot(\bar{\rho}\,\overline{v'q'}) + \overbrace{\bar{\rho}\,\bar{v}\cdot\nabla\bar{q} + \cancel{\bar{q}\,\nabla(\bar{\rho}\,\bar{v})}} = \bar{\rho}\,\sum\overline{Q}$$

$$\cancel{\bar{\rho}}\,\frac{\partial\bar{q}}{\partial t} + \cancel{\bar{\rho}}\,\bar{v}\cdot\nabla\bar{q} + \frac{\nabla\cdot(\bar{\rho}\,\overline{v'q'})}{\bar{\rho}} = \cancel{\bar{\rho}}\,\sum\overline{Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\bar{q}}{\partial t} + \bar{v}\cdot\nabla\bar{q} + \frac{1}{\bar{\rho}}\,\nabla\cdot(\bar{\rho}\,\overline{v'q'}) = \sum\overline{Q_n}}$$

advecção

fluxo turbulento de concentração específica!

Mas como o modelo pode calcular a contribuição $\overline{v'q'}$ do fluxo turbulento se ele não conhece v' e q' ??

Precisamos parametrizar! Isso é feito usando a teoria-K, ou teoria do transporte dos gradientes. Fazendo uma analogia com a lei de Fick:

$$\text{Flux Difusivo} = -D \nabla N \quad \left(\begin{array}{c}\text{levou ao} \\ \text{termo } +D\nabla^2 N\end{array}\right)$$

Assumimos que o fluxo turbulento $\overline{v'q'}$ é proporcional ao ∇q:

$$\begin{cases} \overline{u'q'} = -K_x \nabla q \\ \overline{v'q'} = -K_y \nabla q \\ \overline{w'q'} = -K_z \nabla q \end{cases} \qquad [K] = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$

unidades: m^2/s

K é a matriz de difusão e K_x, K_y, K_z são os <u>coeficientes</u> de <u>difusão</u> <u>turbulenta</u>.

- Os termos cruzados dão uma covariância entre o transporte turbulento em direções diferentes e em geral é assumido <u>zero</u>
- A diagonal dá o transporte do gradiente devido a mistura turbulenta.

Independente de qual eq estamos tratando, a turbulência é sempre feita em $\underline{q}$:

$$\vec{F}_{\underline{turb}} = -\rho_a \overleftrightarrow{K} \vec{\nabla} q$$

pois como o $\underline{ar}$ é $\underline{\text{compressível}}$ um gradiente em $\underline{N}$ pode não significar uma concentração específica $\underline{\text{diferente}}$!

Assim, a eq de conservação fica:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{q} = \frac{1}{\rho_a} \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_a \overleftrightarrow{K} \vec{\nabla} q \right) + \sum \overline{Q_n}}$$

Para N a equação seria:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \bar{N}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_a \overleftrightarrow{K} \vec{\nabla} \left(\frac{N}{\rho_a} \right) \right) + \sum \overline{R_n}$$

esses são os termos de difusão!

⇒ o exercício da aula passada estava errado, pois não incluímos difusão...

EXERCÍCIO

Resolva o mesmo problema da aula anterior:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla\cdot(N\vec{v})$$

$$\begin{cases} w = 1\ m/s \\ u = 0\ m/s \\ F_{TOP} = 0\ \frac{\#}{m^3}\ m/s \\ F_{sfc} = 10\ \frac{\#}{m^3}\ m/s \end{cases} \qquad \begin{cases} t=0 \Rightarrow N(z)=0 \\ \Delta t = 10\ s \\ \Delta z = 50\ m \end{cases}$$

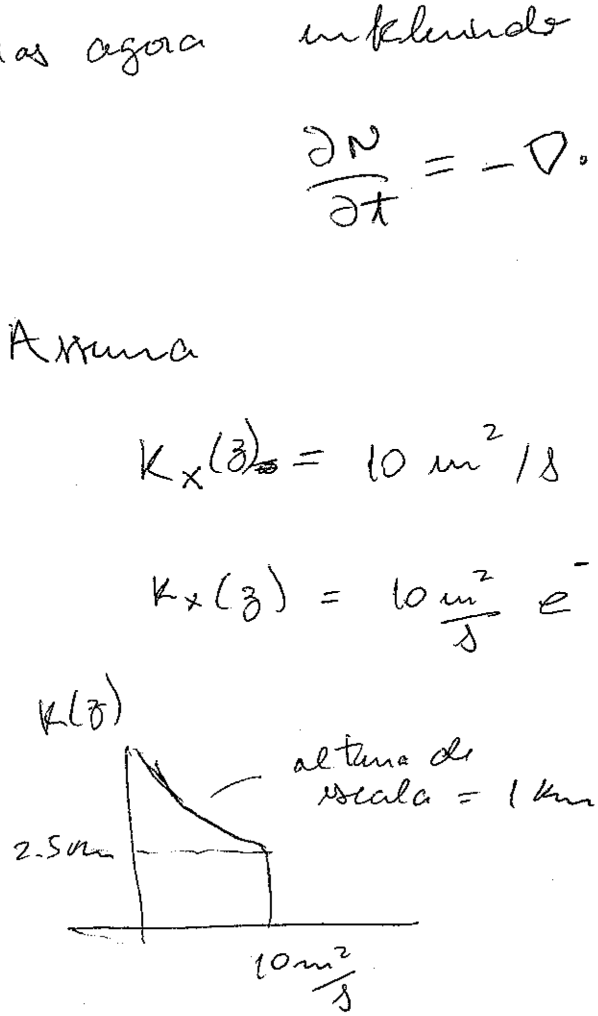
Mas agora incluindo o Termo de Turbulência:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla\cdot(N\vec{v}) + \nabla\cdot\left(\rho_a \overleftrightarrow{K}\, \nabla\left(\frac{N}{\rho_a}\right)\right)$$

Assuma

$$K_x(z) = 10\ m^2/s \qquad 0 < z < 2.5\ km$$

$$K_x(z) = 10\ \frac{m^2}{s}\ e^{-\frac{z-2.5km}{1km}} \qquad z > 2.5\ km$$



Compare o Transporte vertical c/ e sem o Termo de Turbulência