

Física Experimental IV

Prof. Antonio Domingues dos Santos
adsantos@if.usp.br
Ramal: 6886
Mário Schemberg, sala 205

Prof. Leandro Barbosa
lbarbosa@if.usp.br
Ramal: 7157
Ala I, sala 225

Prof. Henrique Barbosa
(**coordenador**)
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
carlin@dfn.if.usp.br
Ramal: 6820
Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br
Ramal: 7016
Basílio, sala 101

Aula 4 - Experiência 1 Circuitos CA e Caos 2013

<http://lababerto.if.usp.br/>

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
 - Noções de CA, filtro RC
 - Circuito integrador e análise de Fourier
 - Ressonância de um circuito RLC simples
 - Funções caóticas: mapa logístico
 - Caos em circuito RLD

TAREFAS SEMANA PASSADA



Tarefas 1 – para Síntese

- Medir a curva de ressonância ($i \times \omega$) com $R=10 \Omega$, $C=0.47\mu\text{F}$, L = bobina de 1000 espiras
 - **Não altere a força eletromotriz do gerador durante as medidas (e verifique que ela se mantém constante!).**
- Faça o gráfico para a curva de corrente ($i \times \omega$)
 - Colocar também curvas teórica e ajustada
- A partir do ajuste, determine o valor experimental da frequência de ressonância e compare com o valor previsto
- A partir do ajuste, determine R , L e C e compare com os valores nominais.
 - Há discrepâncias? Explique porque.

Parâmetros do Circuito

	R1 (Ω) Nom	R1 (Ω) Multi
H1	10.0 (5)	?
H2	10.0 (5)	10.2 (6)
H3	10.0 (5)	10.0 (3)
H4	10.0 (5)	11.1 (2)
H5	10.0 (5)	?
H6	10.0 (5)	10.0 (6)
H7	10.0 (5)	10.4 (5832)
H8	10.0 (5)	10.0 (6)
H9	10.0 (5)	10.0 (1)
H10	10.0 (5)	11 (1)

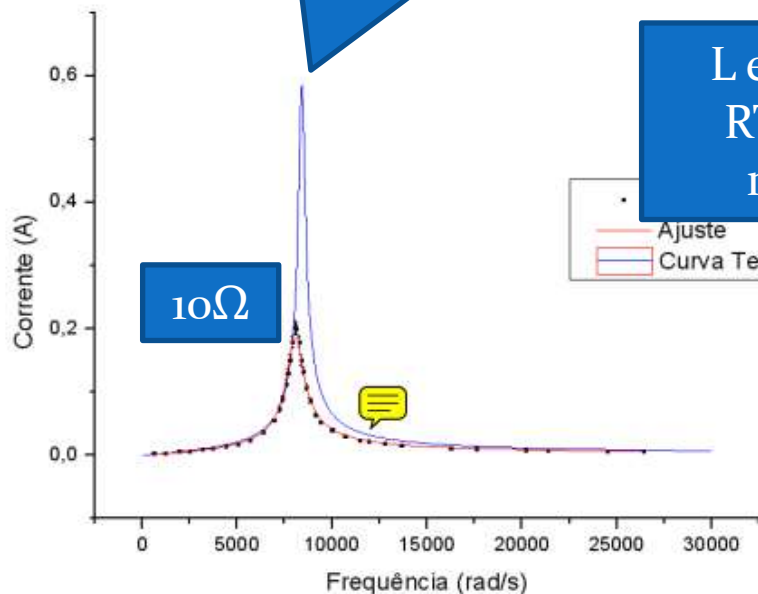
Era preciso **uma boa medida** da resistência **R1** pois desta é que se vai tirar a **corrente** no circuito!

Apesar da média da turma ser compatível com o valor nominal, cada resistor em si pode ser bem diferente!

Multi= 10.24 (41) $z=0.37$

Ressonância em Corrente

R_1 , L e C nominais

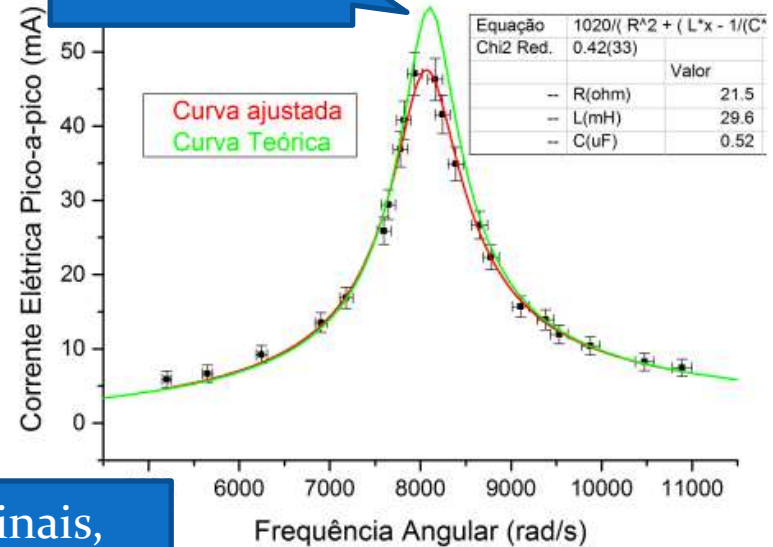


L e C nominais,
RT medido na
ressonância

22Ω

$R_1 + R_L$

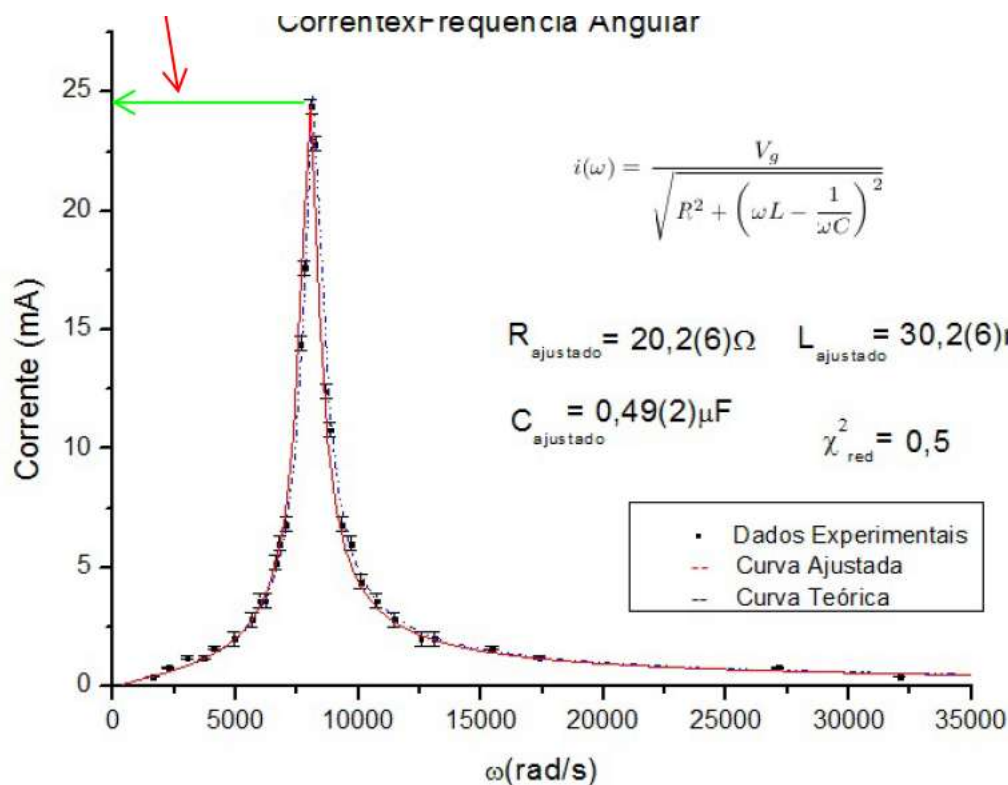
Ressonância - Circuito RLC



Problemas - 1

Utilizou-se uma resistência de $10,0(3)\Omega$, um capacitor de $0,50(3)\mu F$ e um indutor de $29(1)mH$ de resistência interna de $7,9(2)\Omega$ (todos medidos com o multímetro com suas devidas incertezas).

Como o gerador de áudio utilizado não era ideal, sua tensão é dada por $V_g = \epsilon_0 - Ri$, obteve-se o ϵ utilizando um circuito de uma resistência e o osciloscópio, dando um valor de aproximadamente $0,51(5)V$.



$$I_{\text{max}} = V_g / R_{\text{total}}$$

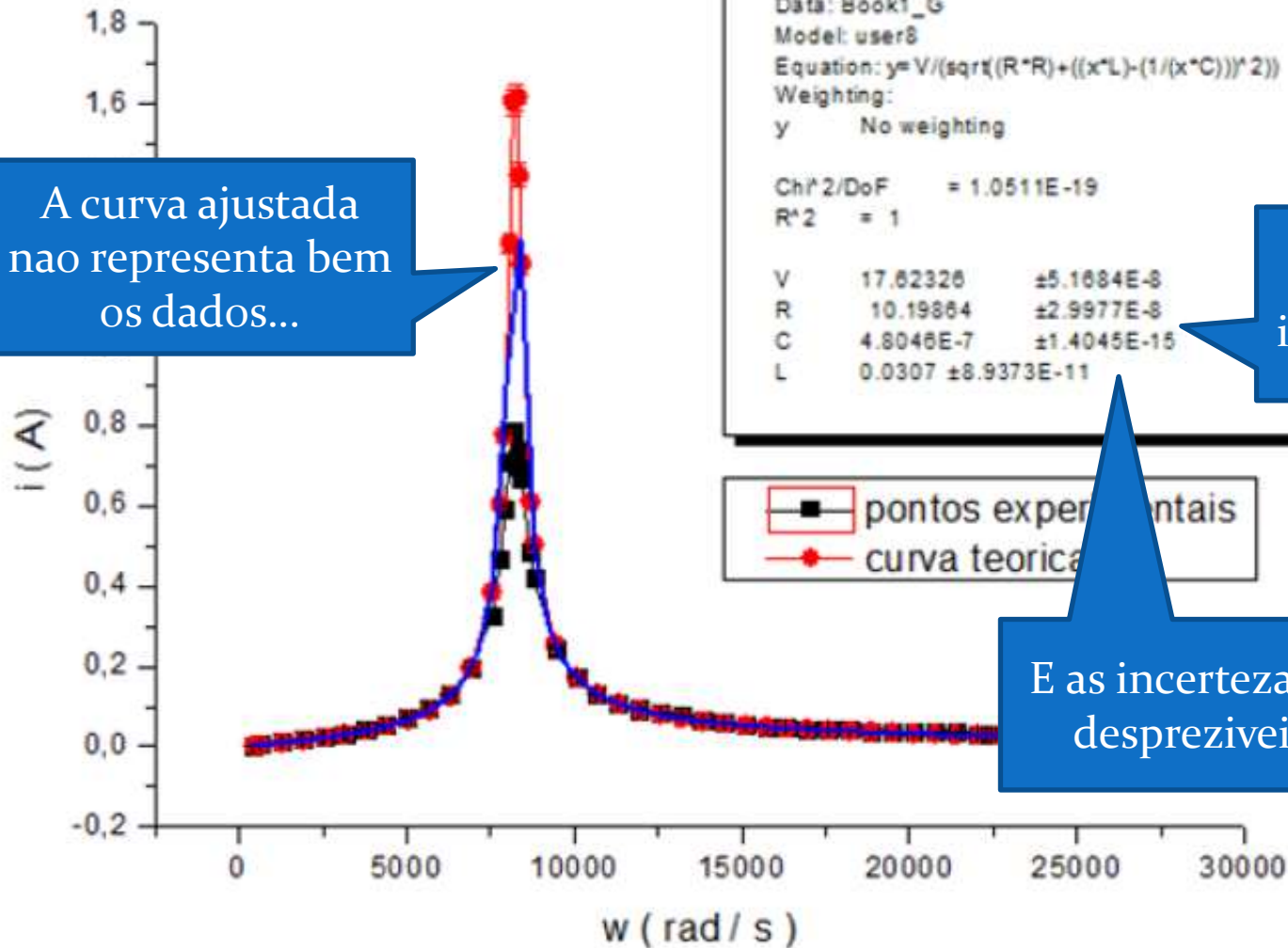
Para o teórico:

$$0,51 / (10,0 + 7,9) = 28\text{mA}$$

Para o ajuste:

$$0,51 / 20,2 = 25\text{mA}$$

Problemas - 2



A curva ajustada
nao representa bem
os dados...

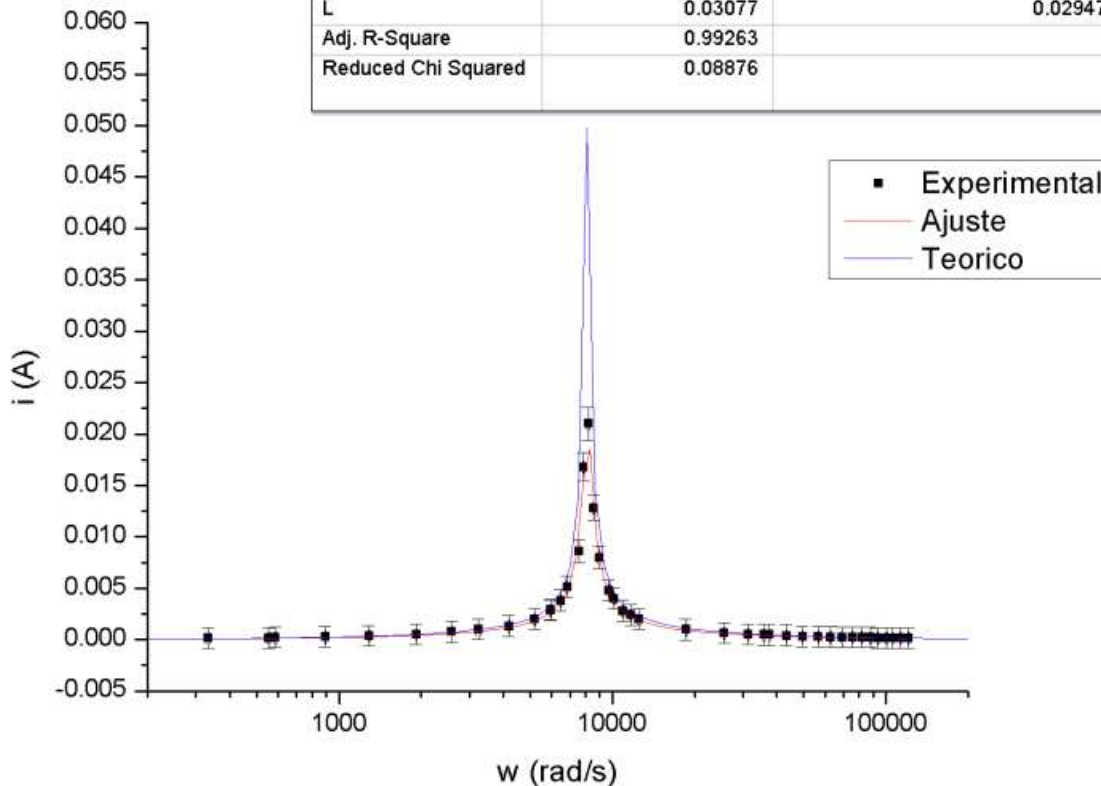
Pelo ajuste,
 $i_{max} = 17/10 = 1.7$ amps

E as incertezas sao
despreziveis...

Problemas - 3

- Também tentaram um ajuste com 4 parâmetros...

Equation	$i = E/(\sqrt{R^2+(w^*L-1/(w*C))^2})$			
	Ajuste Value	Standard Error	Teorico Valor	Incerteza
E	0.42049	0.39963	0.44	0.02
R	19.76944	18.67662	10	0.6
C	4.92195E-7	4.71893E-7	5.1E-7	3E-8
L	0.03077	0.02947	0.03	1E-3
Adj. R-Square	0.99263			
Reduced Chi Squared	0.08876			



Incertezas quase iguais aos parâmetros!

Um dos grupos percebeu

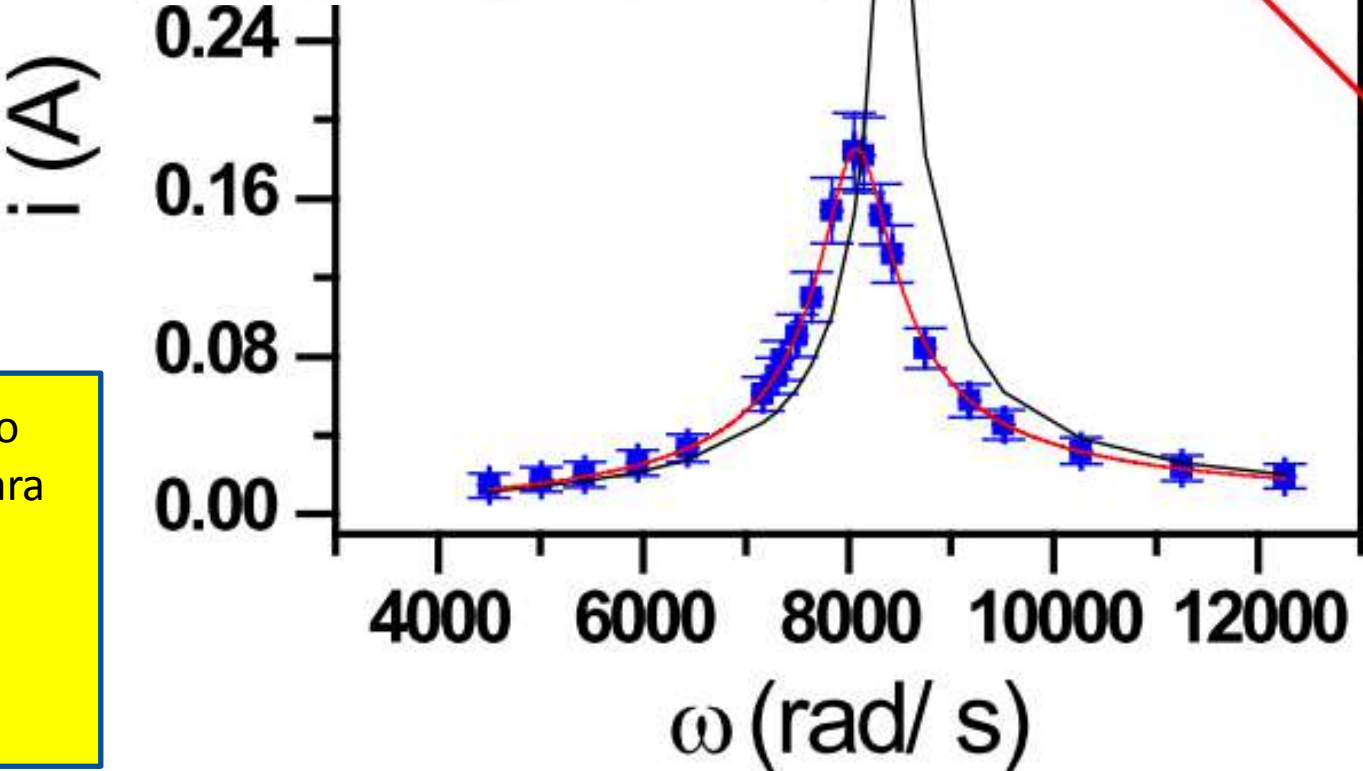
Foram tomados dados de V_R e ω , e, com eles, construído um gráfico de I versus ω , figura 1. Na equação anterior, note que, se a é uma constante qualquer, $I_0 = \frac{aV_0}{\sqrt{(aR')^2 + (\omega(aL) - \frac{1}{\omega(aC)})^2}}$, de modo que, ao ajustar uma curva I versus ω para todos os parâmetros V_0, R', L, C , **existam infinitos** parâmetros possíveis que satisfaçam o problema. Com efeito, com parâmetros iniciais $V_0 = 8,72$ V, $R' = 10,0$ Ω , $L = 30,4$ mH e $C = 0,501(33)$ μ F, obteve-se os parâmetros ajustados $V_0 = 8,3(44)$ V, $R' = 19(10)$ Ω , $L = 29(15)$ mH e $C = 0,52(28)$ μ F, cujas altas incertezas demonstram o fato de que há inúmeros parâmetros que satisfaçam os dados (considerando todos os parâmetros como ajustáveis).

Para resolver esse problema, **foi fixado o parâmetro** $V_0 = 8,72(9)$ V, a força eletromotriz do gerador, o qual foi medido ao longo de todo o experimento (para garantir que V_0 era a força eletromotriz, suas medidas foram feitas com o circuito aberto). Nesse caso, a função ajustada está apresentada na figura 1, junto a curva teórica (ou seja, obtida com os parâmetros teóricos, calculados acima). Os valores obtidos para os parâmetros foram $R' = 20,3(4)$ Ω , $L = 30,6(2)$ mH, $C = 0,496(4)$ μ F. A frequência de ressonância é, então, $\omega_{0,exp} = 8,09(8) \times 10^3$ rad/s (ou $1,29(1) \times 10^3$ Hz).

Tutorial no site: usem!!!

$C_e L < 0$

Equation		$y = V/\text{sqrt}((R)^2 + (x*L-1/x*C)^2)$	
Adj. R-squar	0.99869	Value	Standard Error
i	V	3.85	0
i	C	-1.9913E	12621.95263
i	L	-0.03051	1.99696E-4
i	R	20.79479	0.20145



Ainda era preciso limitar o ajuste para valores:
 $L > 0$
 $C > 0$
 $R > 0$

Parâmetros do Circuito

	C (μF) Nom	C (μF) Multi	C (μF) Ajuste
H1	0.47 (5)	?	0.49 (7)
H2	0.47 (5)	0.51 (2)	0.52 (1)
H3	0.47 (5)	0.50 (5)	0.49 (2)
H4	0.47 (5)	0.49 (3)	0.48 (zero)*
H5	0.47 (5)	0.53 (3)	0.802 (8)
H6	0.47 (5)	0.51 (3)	0.5 (5)*
H7	0.47 (5)	0.504000 (9032)	0.49 (1)
H8	0.47 (5)	0.501 (33)	0.496 (4)
H9	0.47 (5)	0.51 (2)	???
H10	0.47 (5)	0.47 (2)	0.49 (2)

Multi= 0.507 (11) z=0.33
 Exp= 0.53 (11) z=0.33
 Exp_sem_outliers=0.495 (12) z=0.10

Para uma boa estimativa do ω_0 teórico era preciso medir a capacitância, mas os resultados da turma mostram que o valor nominal não é ruim.

Parâmetros do Circuito

	L (mH) Nom	L (mH) Multi	L (mH) Ajuste	RL (Ω) Nom	RL (Ω) Multi
H1	30 (1)	?	35 (4)	?	?
H2	29.9 (15)	?	29.6 (6)	?	8.0 (4)
H3	?	29.9 (8)	30.2 (6)	?	7.8 (4)
H4	30.1 (15)	30.3 (12)	30.7 (zero)*	7.7 (4)	8.1 (2)
H5	?	30.4 (15)	19.4 (2)	?	?
H6	?	30 (1)	30 (29)*	?	7.9 (6)
H7	?	30.300 (1515)	31.1 (5)	?	8.1000 (5648)
H8	30.4 (15)	?	30.6 (2)	7.8 (4)	?
H9	29.9 (15)	?	-30.51	7.7 (4)	?
H10	30.1 (15)	?	31.8 (2)	?	?

Poucos grupos anotaram o valor nominal e mediram a resistência com o multímetro! Já discutimos isso em aula, não?

Tarefas 2 – para Relatório

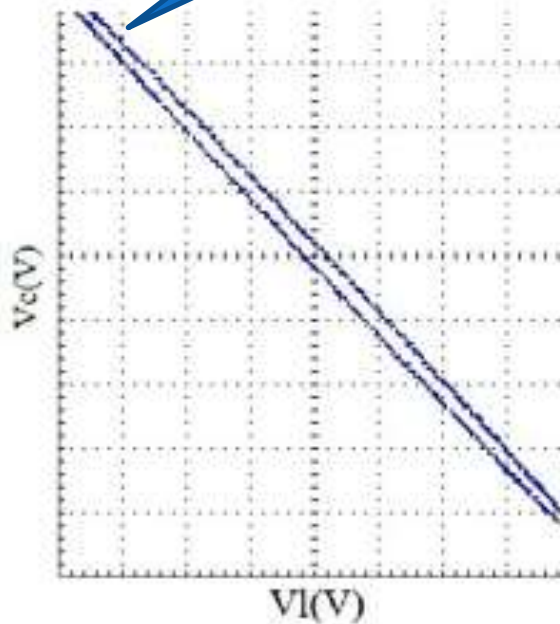
- Meça V_C x t e V_L x t para a frequência de ressonância
 - Faça um gráfico de V_C x V_L na frequência de ressonância (modo XY do osciloscópio)
 - O que você esperaria obter caso os seus componentes fossem ideais?
 - O indutor é ideal? Você pode fazer um modelo simples para o indutor caso ele não seja ideal?
 - Da análise desse gráfico, obtenha os parâmetros físicos (valores e incertezas) das grandezas usadas no seu modelo.
- Ainda na ressonância, verifique a diferença de fase entre V_C e V_L .
 - O que era esperado? A diferença pode ser explicado pelo seu modelo não-ideal?

Problemas...

No modelo ideal, o gráfico de V_c vs V_l era para resultar em uma reta $y=-x$ (soma de vetores das tensões), mas como pode ser observado na figura (2), experimentalmente foram duas curvas, isso pode ser explicado pela resistência interna do indutor, que não é ideal.

A diferença de fase obtida entre V_c e V_l foi de $0(1)_o$, a incerteza alta foi devido ao ruído muito alto, que não conseguiu ser amenizado, porém o resultado ficou próximo do esperado (cujo valor era 0).

Cortaram a elipse?



Alias, porque seria uma elipse??

Tarefas 3 – EXTRAS

- Na análise de $V_L \times V_C$ na ressonância você se questionou apenas se o indutor não seria ideal.
 - E o capacitor é ideal? Você se questionou a respeito?
 - Você tem evidências experimentais de que o capacitor é próximo ao ideal? Quais (quantitativo)?
- Estime o valor da resistência interna do gerador a partir das medidas, ajustes e modelos não-ideias
 - Discuta a incerteza nesta medida, já que ela será obtida como um resíduo. Como você poderia diminuir esta incerteza?

Parâmetros do Circuito

	R1 (Ω)	RL (Ω)	RT (Ω) Resson.	RT (Ω) Ajuste	Rg (Ω)
H1	10.0 (5)	?	?	27 (3)	?
H2	10.2 (6)	8.0 (4)	?	21.5 (5)	3.3 (9)
H3	10.0 (3)	7.9 (2)	?	20.2 (6)	4.5 (6) 2.3
H4	11.1 (2)	8.1 (2)	24.4 (8)	10.2 (zero)*	5.6 (2) 5.2
H5	?	?	?	33.3(6)	?
H6	10.0 (6)	7.9 (6)	?	20 (19)*	2.1
H7	10.4 (6)	8.1 (6)	?	21.8 (2)	3.3
H8	10.0 (6)	7.8 (4)	?	20.3 (4)	2.5
H9	10.0 (1)	7.7 (4)	?	20.8 (2)	3 (1)
H10	11 (1)	?	?	23.2 (3)	?

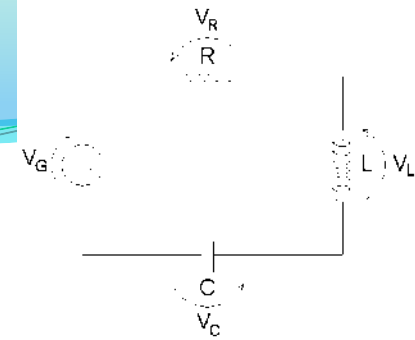
Era fácil e poucos fizeram!



Revisão para o relatório

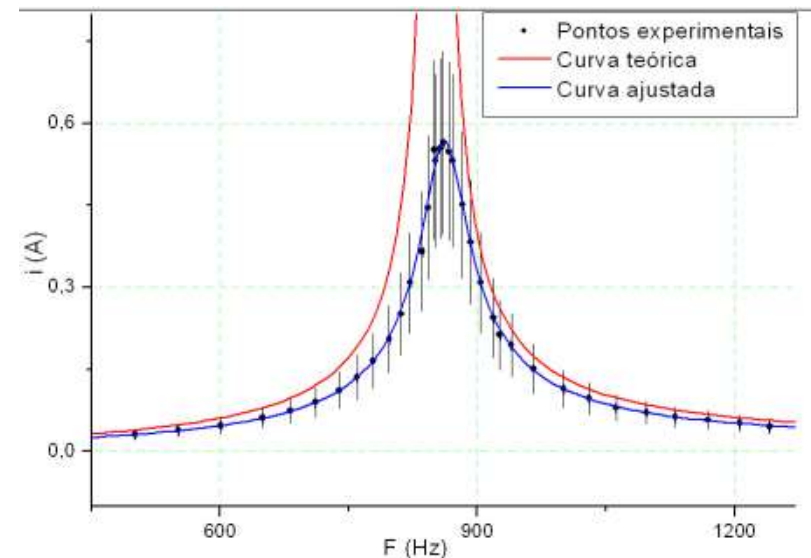
1. Resistência Total

Revendo tudo



- Os dados não batem com a teoria, mas é possível ajustar uma curva, como a teórica, aos dados!
- Voltando a teoria. Qual a expressão para a corrente?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



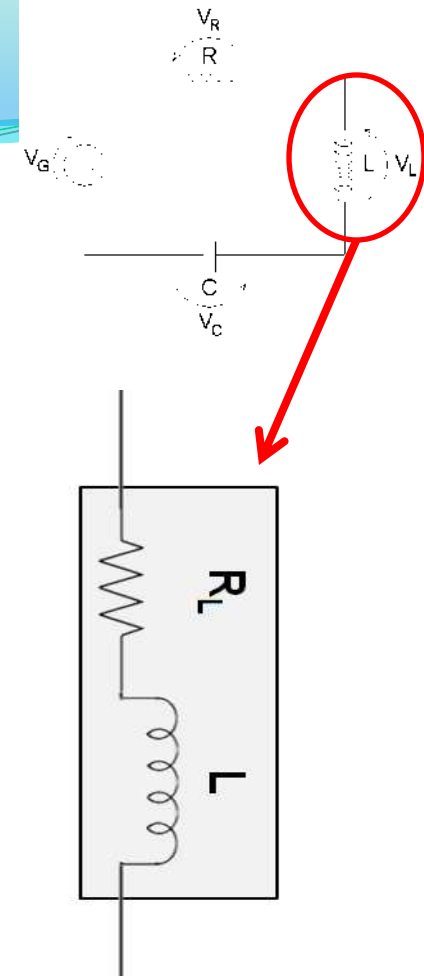
Revendo tudo

- O indutor é ideal?
 - Não! A bobina é, na verdade um fio enrolado e tem resistêcia não nula
- Na equação R é a resistêcia total

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$R_T = R + R_L + \dots$$

- Existem outras resistêcias no sistema?
- E a indutância? Será que o valor nominal é confiável?



Mudaria a amplitude do máximo

Mudaria a posição do máximo

Como determinar R_{total} ?

- Na condição de ressonância de corrente, $\omega = \omega_0$ e:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow R$$

$$\text{tg } \phi_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \frac{1}{R} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Se $\phi_0 = 0$, corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo

- Portanto:

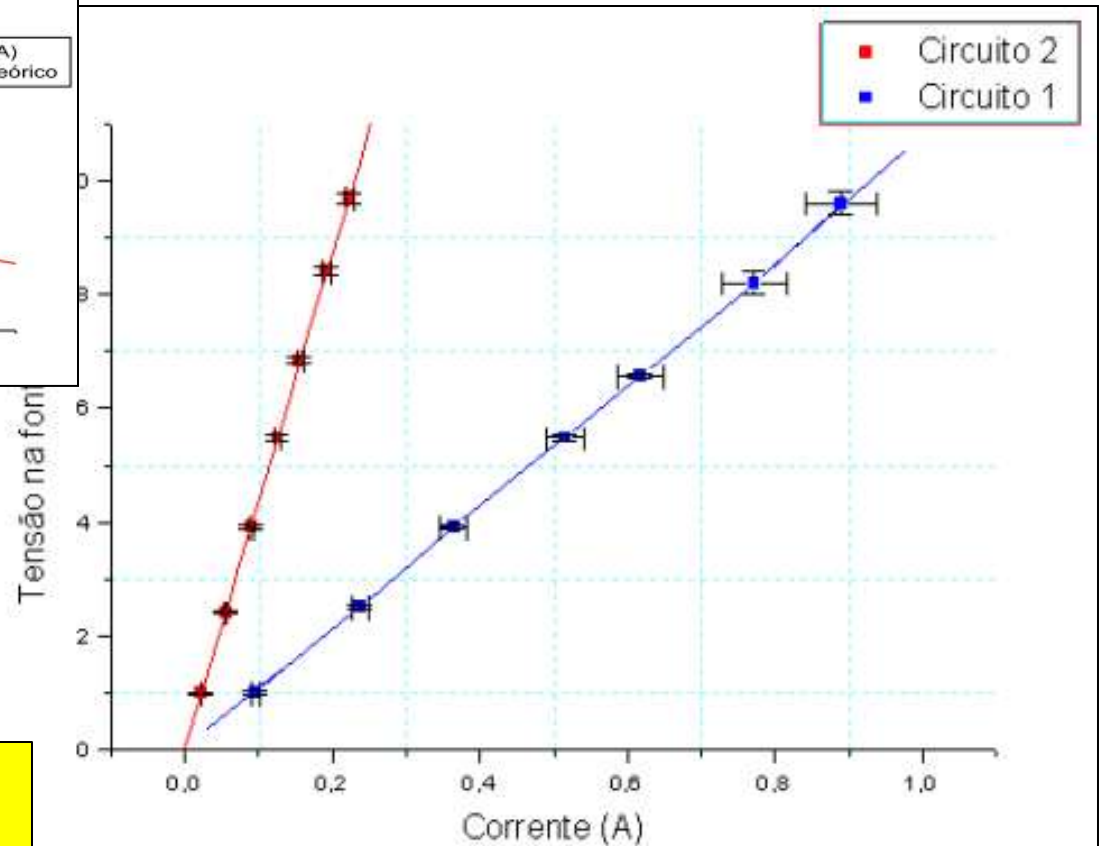
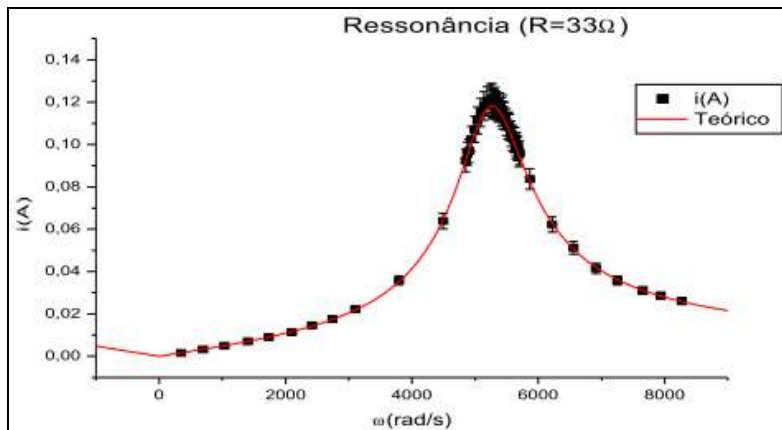
$$V_{G0} = R i_0$$

V_{G0} é a tensão de pico aplicada pelo gerador e i_0 é a corrente de pico no circuito

- Ou seja, se medir V_{G0} e i_0 na ressonância você descobre qual é a resistência total, R , do circuito

Como determinar R_{total} ?

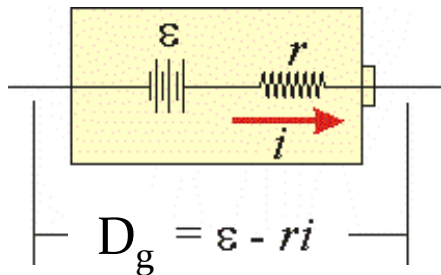
- O problema é que confiaríamos apenas em uma medida... Melhor ajustar uma reta:



Resultado de outro ano, desta vez ninguém fez assim.

Reverendo a tensão do Gerador

- Como medir V_G ?
 - **Não confundir a tensão produzida pelo gerador com a ddp entre seus terminais (D_g)!**



O gerador não é ideal e tem uma resistência interna (lab3)

- Na nossa teoria, o que chamamos de V_G é na verdade ϵ !
 - **ϵ devia ficar fixo, mas D_g não, pois a corrente varia.**
 - Para determinar ϵ era preciso medir com o circuito “em aberto”, ou seja com a corrente nula.
 - Isso podia ser feito com um multímetro (valor RMS) ou com o osciloscópio, **mas não podia estar passando corrente pelo RLC.**

Reverendo as medidas de R_T

- A resistência podia ser calculada dividindo D_G pela corrente na ressonância:

$$R_T = \frac{D_G^{ress}}{i^{ress}}$$

- Mas notem que, em um **circuito não ideal**, o que temos é:

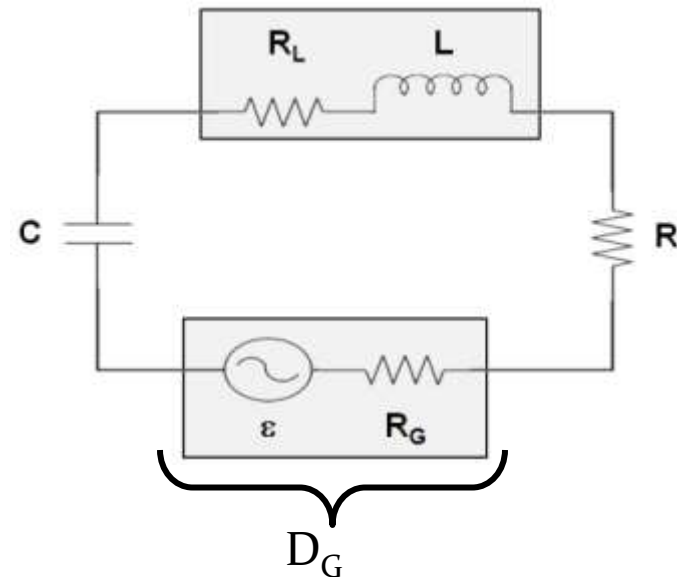
$$R + R_L = \frac{D_G^{ress}}{i^{ress}}$$

Quem usou valores de D_G , mediu $R+R_L$

$$D_G^{ress} = \varepsilon - iR_G^{ress}$$

$$R + R_L + R_G = \frac{\varepsilon}{i^{ress}}$$

Era preciso ter medido ε para ter R_T .

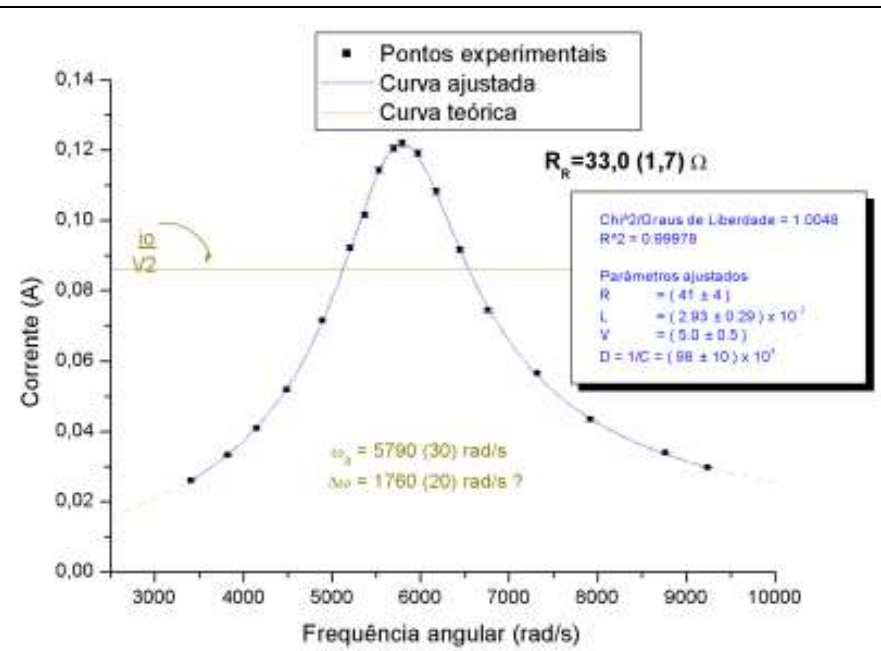
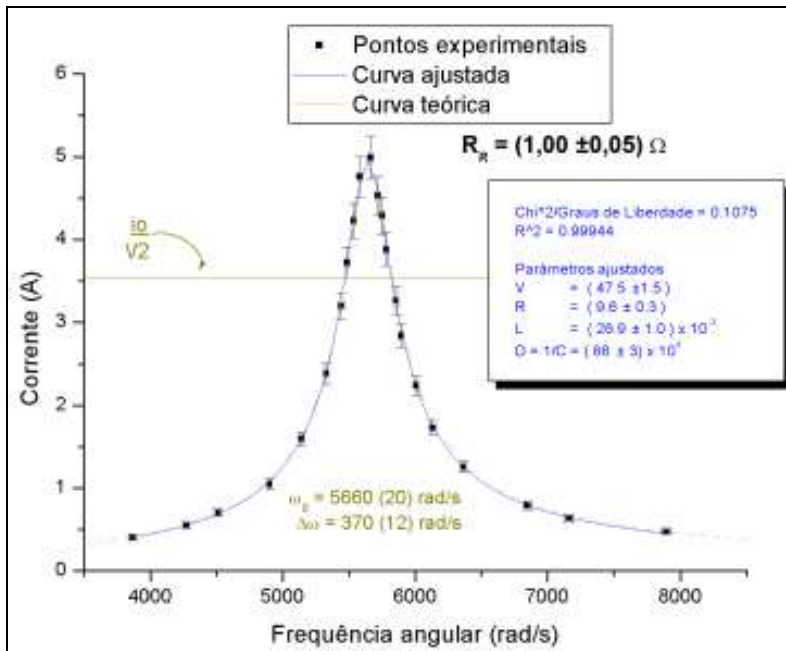


Como determinar R_{total} ?

- Outra maneira, ajustando a curva teórica aos dados experimentais (mínimos quadrados):

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

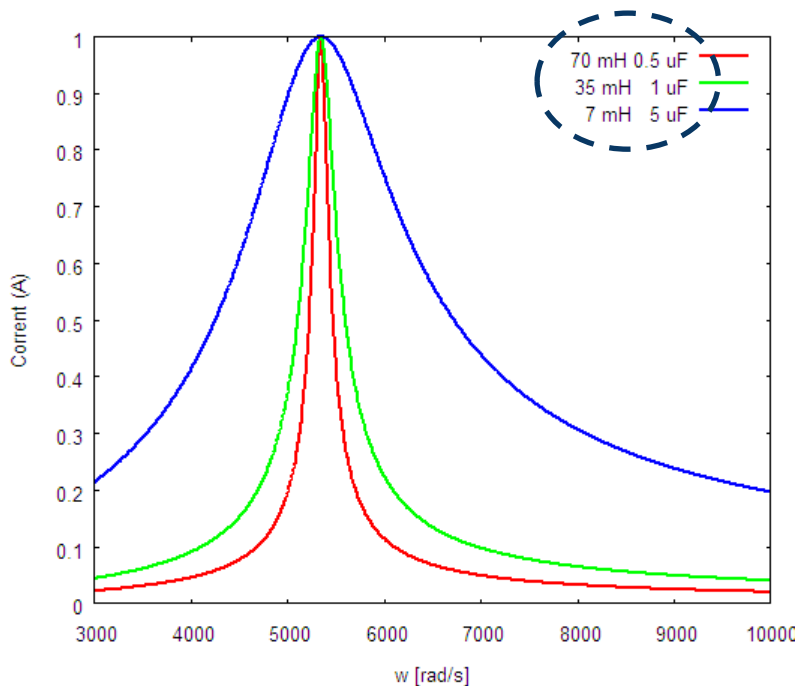
Podemos ajustar todos os parâmetros ao mesmo tempo?



Ajuste dos parâmetros

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Posição e largura do máximo



Posição

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Largura

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \stackrel{\text{definicao}}{\equiv} \frac{V_G}{\sqrt{2}R}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\mp RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$

Diferença entre as 2 raízes positivas

Ajuste dos parâmetros

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

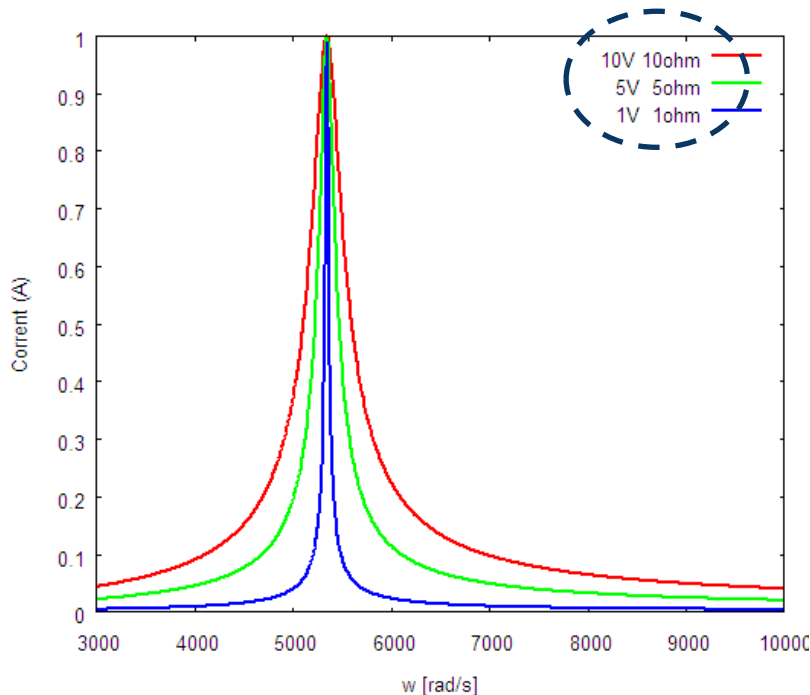
Amplitude e largura do máximo

Amplitude

$$i_0(\omega_0) = \frac{V_G}{R}$$

Largura

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} LC \Rightarrow \text{posição} \\ V_G / R \Rightarrow \text{amplitude} \\ R / L \Rightarrow \text{largura} \end{array} \right.$$

Apenas 3 “variáveis” independentes!

Ajustando R_T e ω_0

- Apenas R, L fixo em 35(3)mH:

- $R=12.10(50)$ Ohm [grupo]

- $R=11.86$ Ohm $\pm 2.25\%$ com $X^2_{red}=337.0$

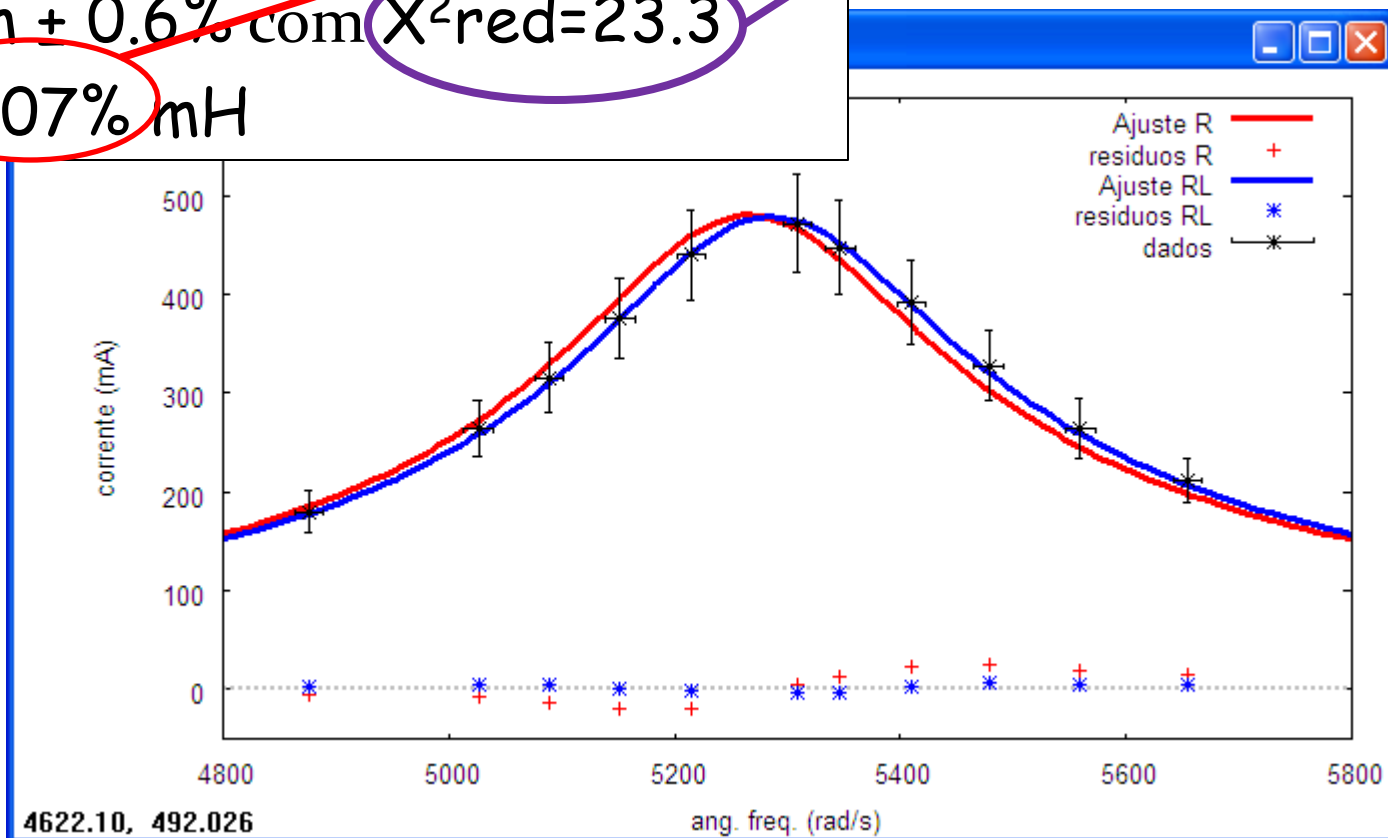
- R e L ao mesmo tempo

- $R=11.90$ Ohm $+ 0.6\%$ com $X^2_{red}=23.3$

- $L=34.74 \pm 0.07\%$ mH

Melhor precisão medindo pela ressonância!

Melhor ajuste





Revisão para o relatório

2. Diagrama de fase

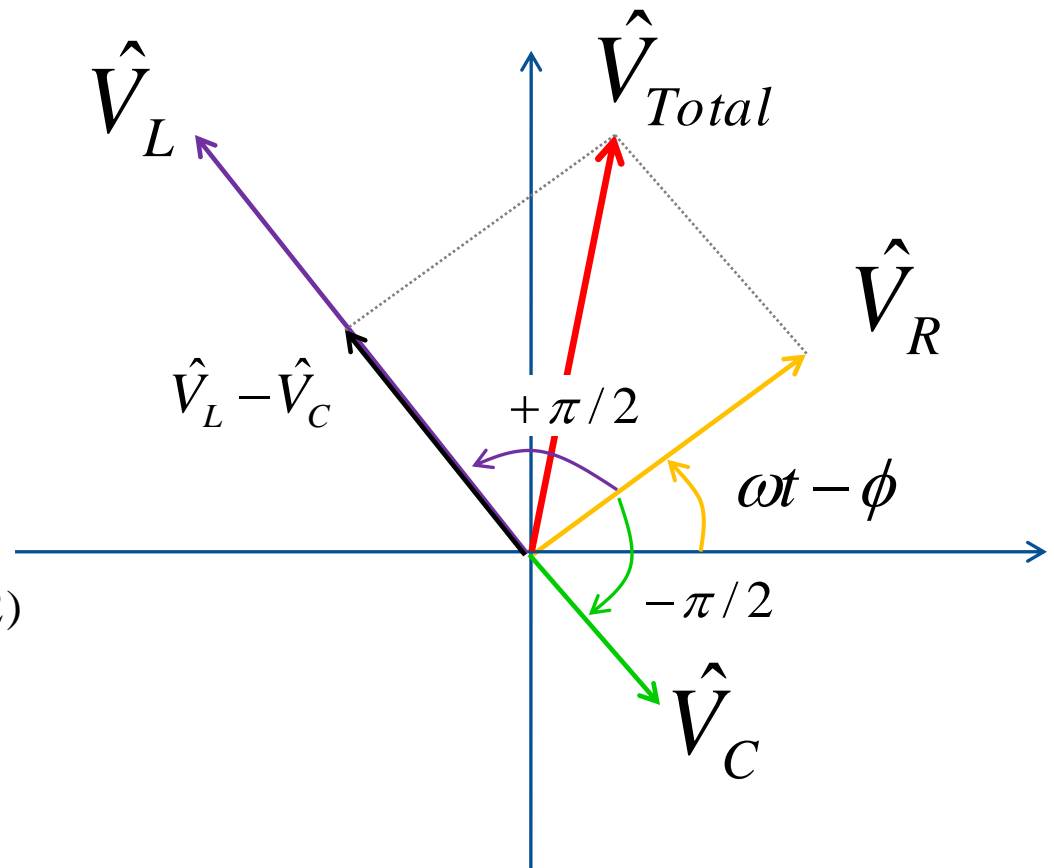
Diferença entre V_L e V_C

- Na ressonância, $V_L = V_C$ e $V_{\text{tot}} = V_R$
- Mas e se o indutor não for ideal ??

$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

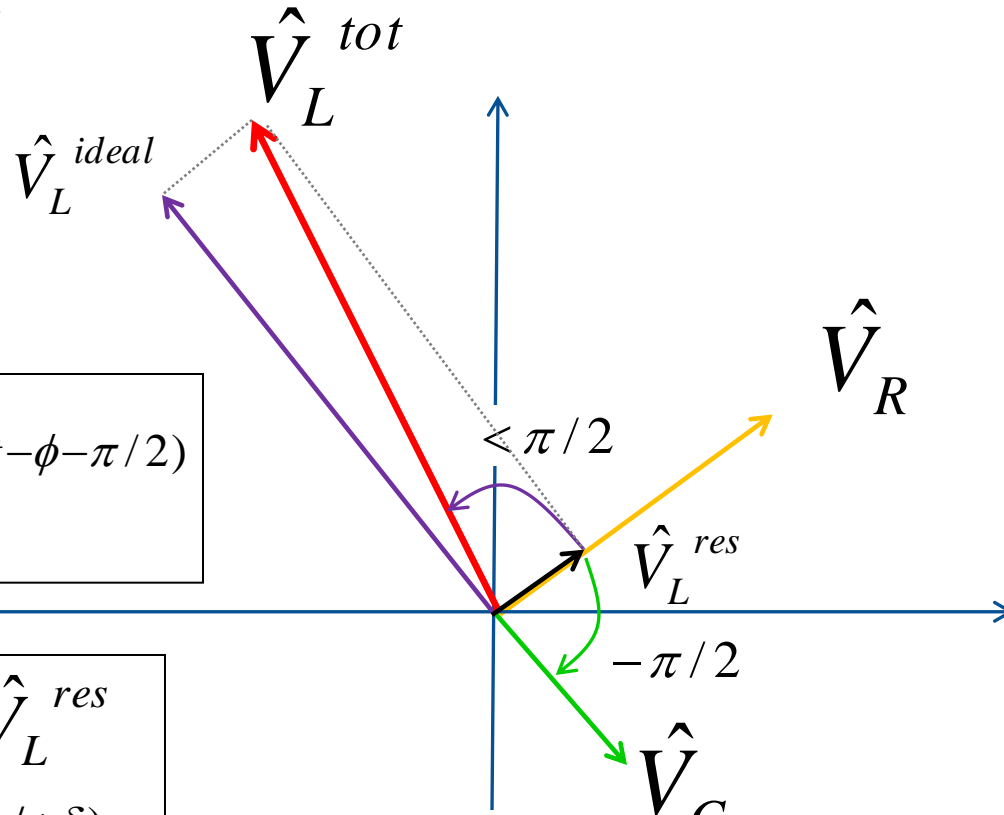
$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$



Diferença entre V_L e V_C

- Nesse caso, a tensão no indutor tem duas componentes!



$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_L(t) &= \hat{V}_L^{ideal} + \hat{V}_L^{res} \\ &= V_L^{tot} e^{j(\omega t - \phi + \delta)}, \end{aligned}$$

onde $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R_L}\right)$

$$\phi_{C-L} = \delta + \frac{\pi^{lab}}{2} \approx \pi - 4^\circ$$

$$V_L^{real} = i_0 \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} > V_L^{ideal}$$

Diagrama de fase do RLC

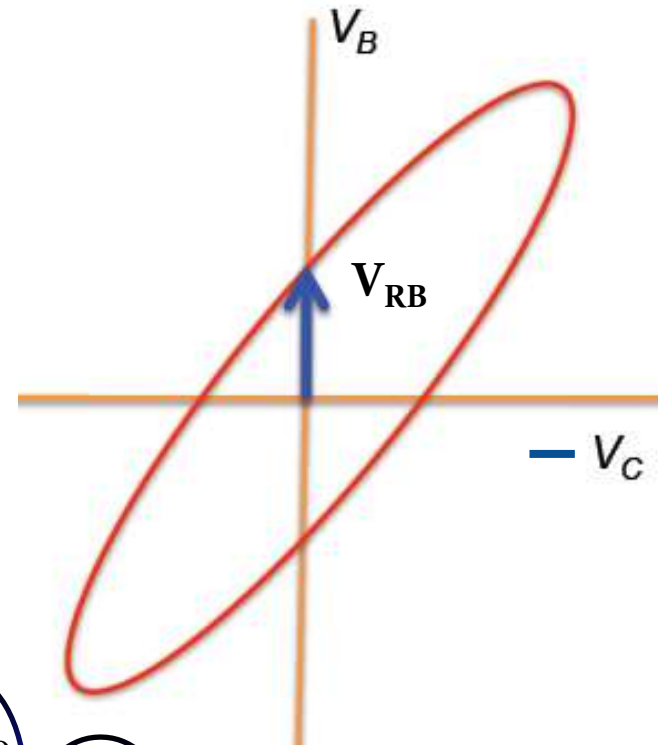
- Na condição de ressonância:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad V_L = -V_C$$

- Observando V_B contra V_C :
 - quando $V_C=0$, obrigatoriamente $V_L=0$ (estamos falando de valores instantâneos e não de valores médios),
 - portanto a tensão no eixo V_B é a tensão sobre a resistência da bobina, V_{RB} .

$$V_{RB} = R_B i_0 = R_B \left(\frac{V_{R0}}{R_0} \right) i_0$$

Figura de Lissajous
(RLC): $V_B \times V_C$



Resumo dos pontos críticos

- A resistência total é $R + R_L + R_G$
- $\varepsilon_{\text{gerador}}$ tem que ser medido com o circuito aberto.
Caso contrário mede-se DDP_G .
- $\varepsilon_{\text{gerador}}$ devia ser fixo e não DDP_G .
- R_L nominal é confiável? Alguém mediu com o multímetro?
- Será que o indutor tem capacitância parasita entre as voltas do enrolamento?
- A diferença de fase devia ser ligeiramente menor do π , e V_L ligeiramente maior que V_C