

# Física Experimental IV

[www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

[www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

## Aula 4 – Computador Óptico Óptica de Fourier

Profa. Eloisa Szanto  
[eloisa@dfn.if.usp.br](mailto:eloisa@dfn.if.usp.br)

Ramal: 7111

Pelletron

Prof. Henrique Barbosa  
[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)

Ramal: 6647

Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin  
[nelson.carlin@dfn.if.usp.br](mailto:nelson.carlin@dfn.if.usp.br)

Ramal: 6820

Pelletron

Prof. Paulo Artaxo  
[artaxo@if.usp.br](mailto:artaxo@if.usp.br)

Ramal: 7016

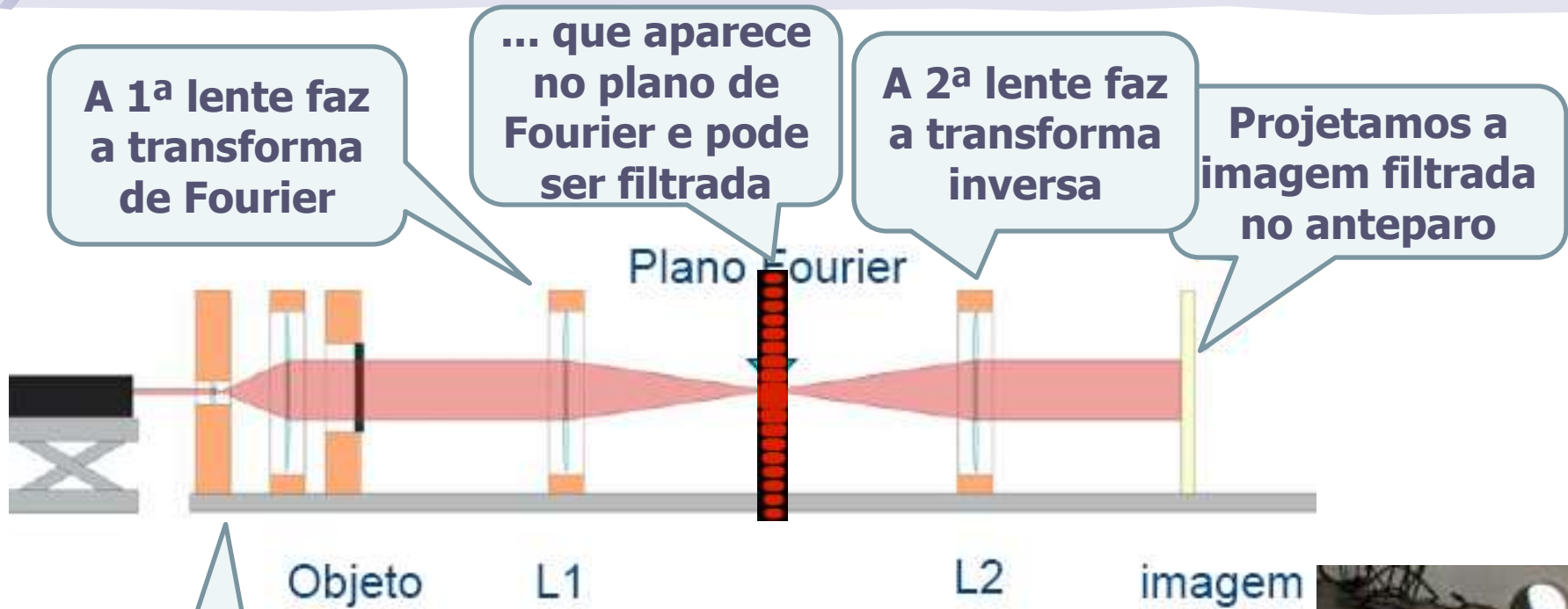
Basílio, sala 101

# Computador ótico

- **Computador ótico** é um dispositivo que permite a manipulação de imagem de maneira controlada sem a necessidade de efetuar cálculos complicados.
- Esse dispositivo pode e vai ser construído e estudado no laboratório e vamos, nas próximas aulas, discutir como fazê-lo em detalhe.



# Como funciona?



o laser ilumina o objeto

**COMPUTADOR ÓTICO**



# Programação da Exp. 2

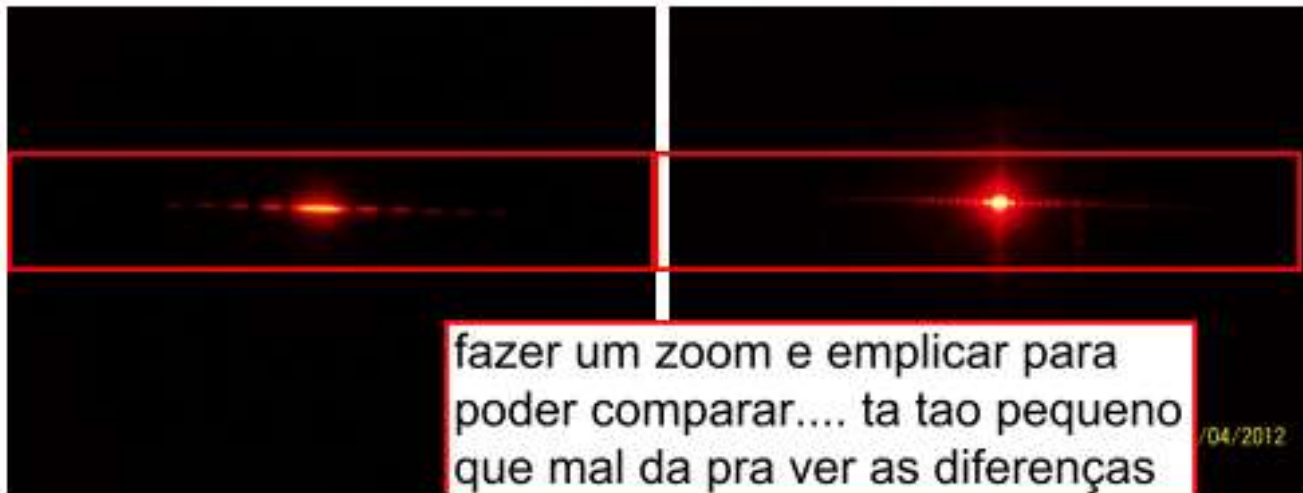
- Aula 1: óptica geométrica
  - Medidas com lentes convergente e divergente
- Aula 2: laser
  - Associação de lentes e aumento do diâmetro do laser
- Aula 3: difração
  - Figuras de difração e espectrofotômetro
- Aula 4: transformada de fourier
  - Estudo no plano de fourier
- Aula 5: computador ótico
  - Filtro na transformada de Fourier e recompor a imagem filtrada
- Aula 6: ImageJ
  - Tratamento de imagem no computador

# Parte 1 – Para a síntese

Usando o laser e o slide das figuras:

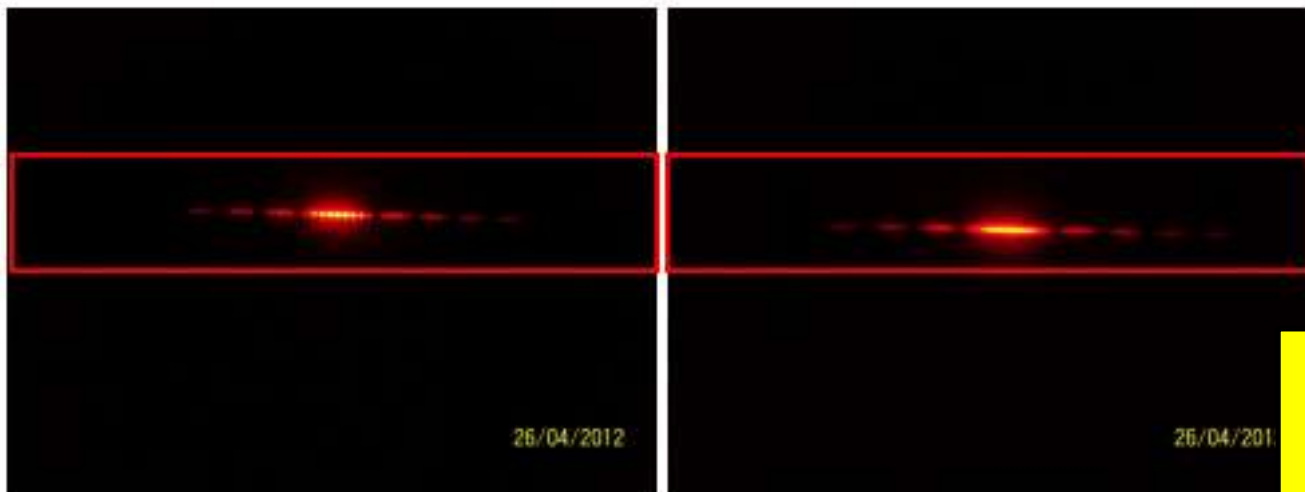
- Fotografe figuras de difração para os seguintes objetos:
  - fendas simples (pelo menos duas fendas)
  - fenda dupla (pelo menos duas fendas)
  - para os objetos diferentes da linha superior, escolha apenas um dos tamanhos
- Discuta os resultados obtidos.
  - Para as fendas simples e duplas tente relacionar as figuras observadas com as dimensões dos objetos.
  - Tente identificar a forma geométrica dos objetos na linha superior do slide de fendas a partir das figuras de difração observadas. Discuta.

# Difração Qualitativa



(a) fenda simples 3

(b) fenda simples 5

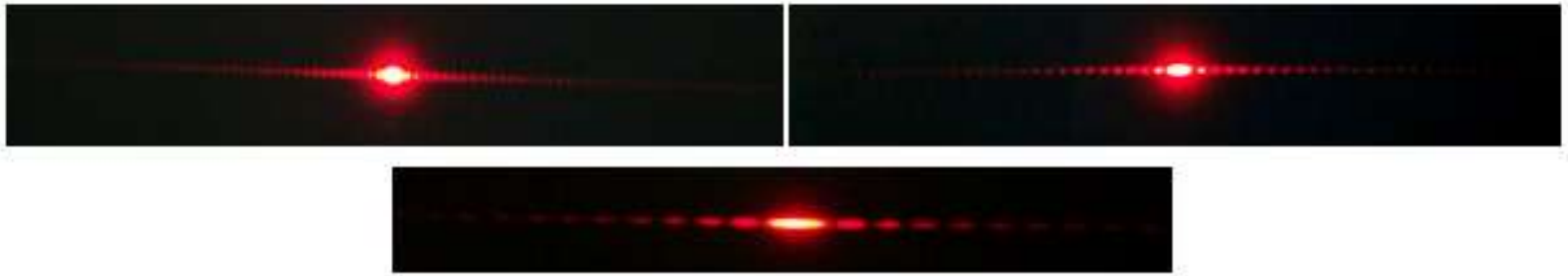


(c) fenda dupla menor 1

(d) fenda dupla menor 2

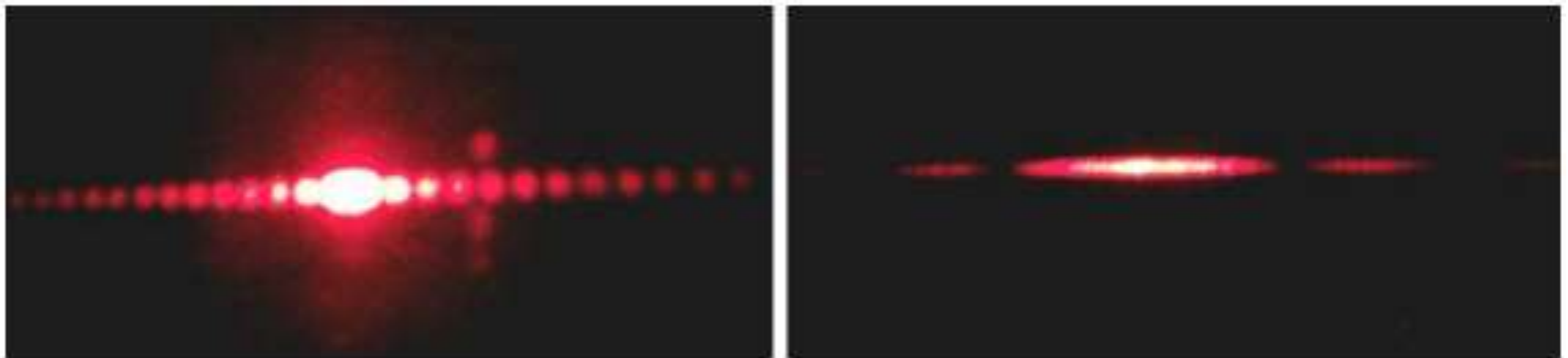
Quanto menor a fenda,  
mais espalhada a difração.

# Interpretação invertida...



**Figura 4:** Fotos das imagens de difração para fenda simples pequena, média e grande, respectivamente.

Quanto maior a fenda, mais espalhada a difração !?!



**Figura 5:** figura de difração para duas fendas simples distintas, a primeira com abertura menor que a segunda.

# Fenda Simples: **Intensidade**

- A intensidade para o caso da fenda simples também apresenta mínimos:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

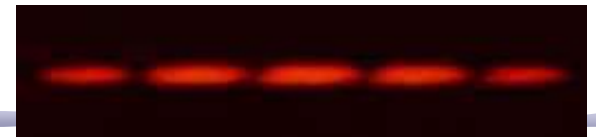
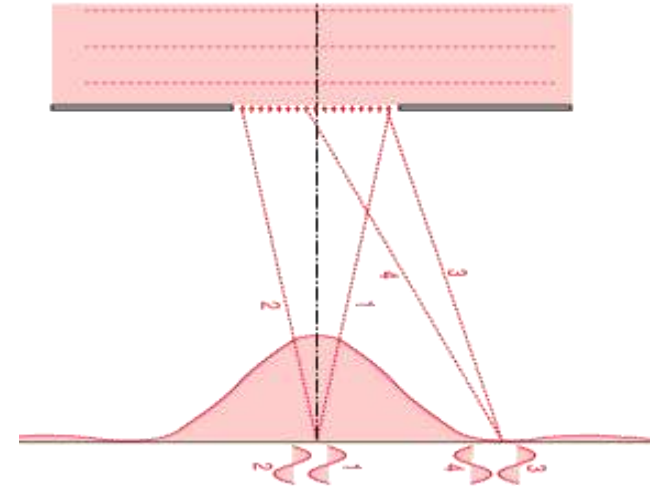
- Que ocorrem quando:  
 $\sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = \pm m\pi, m = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Ou seja:

$$d \sin \theta = \pm m\lambda, m = 1, 2, 3, \dots$$

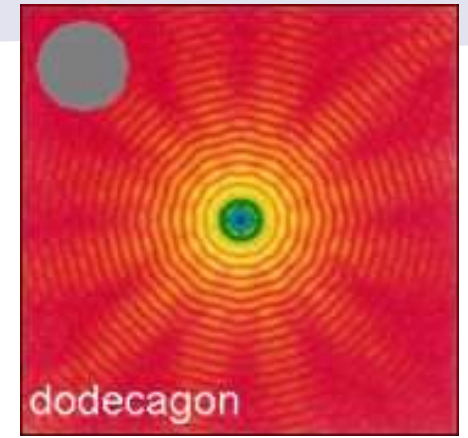
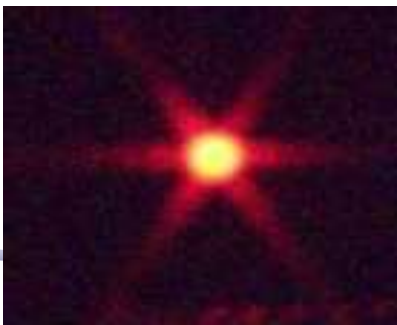
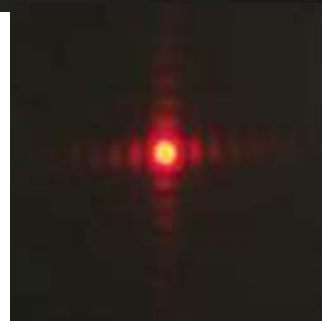
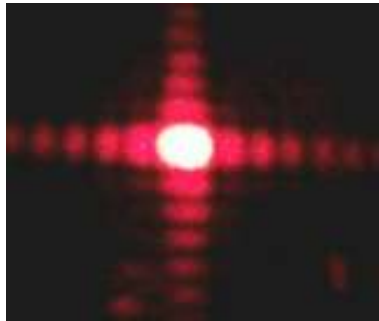
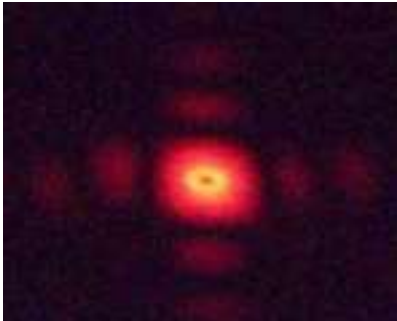
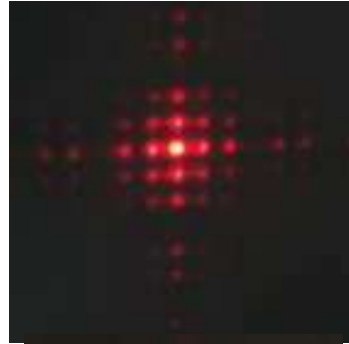
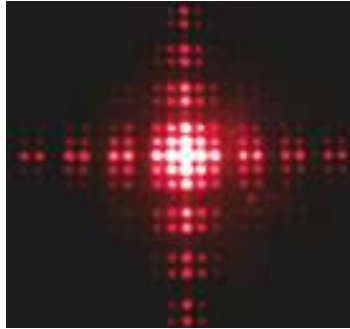
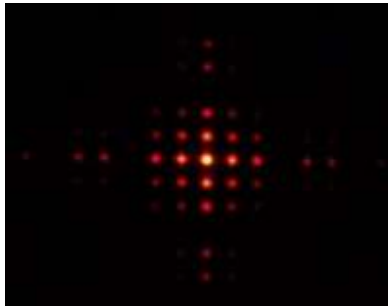
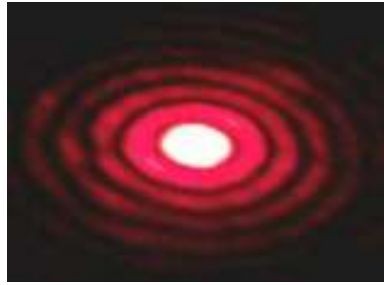
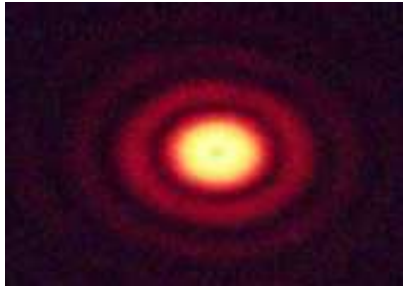
- Para  $m=0$  temos um máximo pois:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

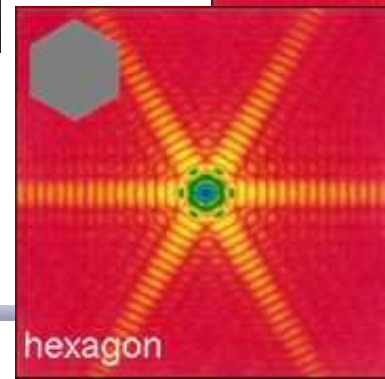
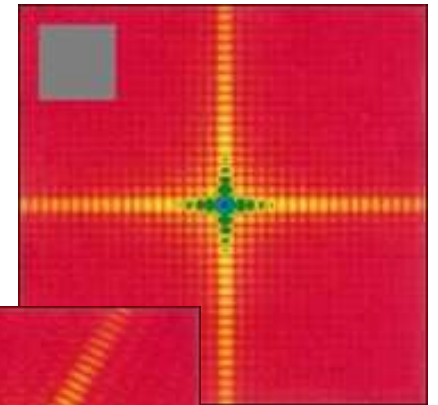




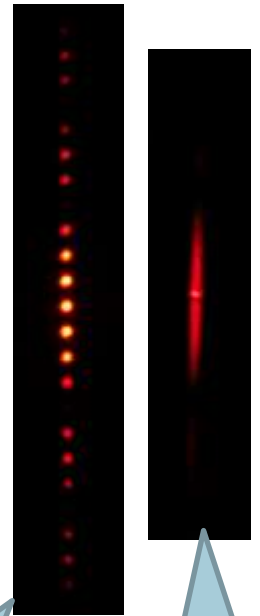
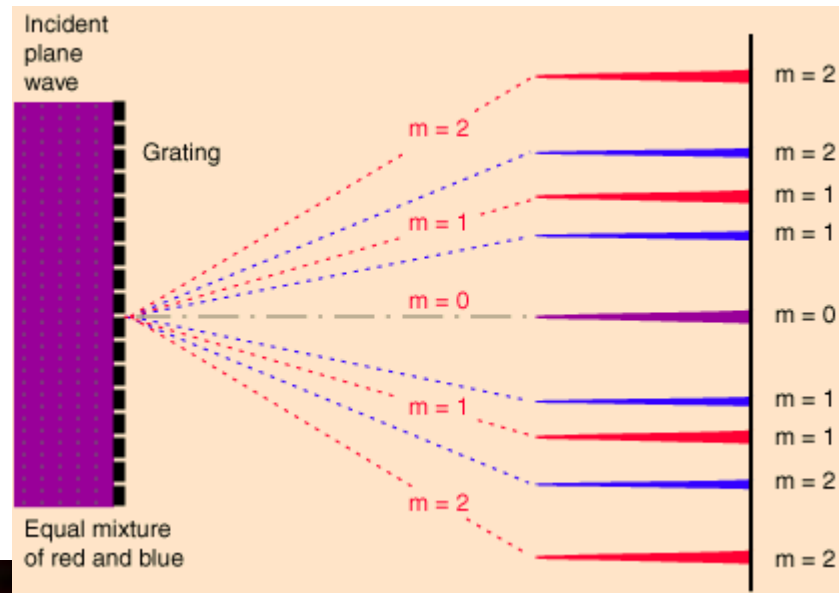
# Outras figuras



Rede de difração

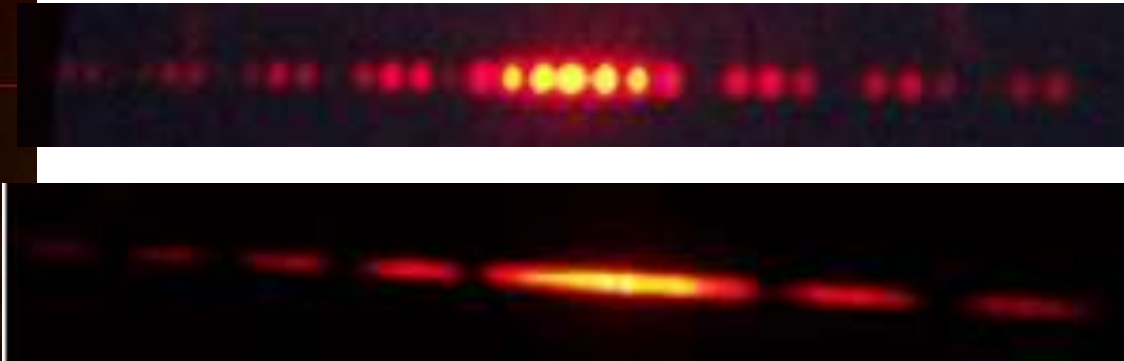
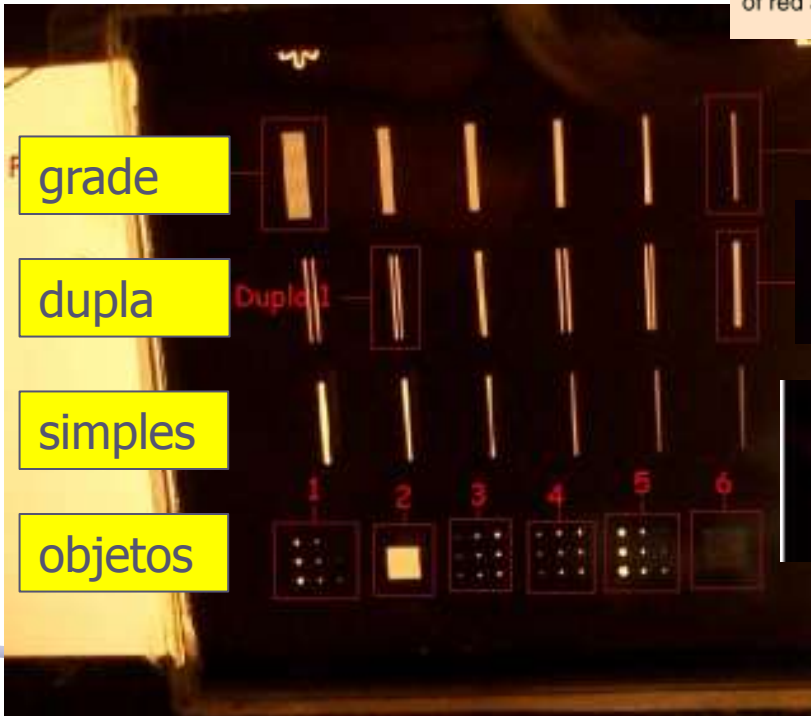


# Confusão entre Fenda e Grade



grade

fenda



# Parte 2 – Para a síntese

- Estudar a difração e interferência da Fenda simples:
  - Medir as intensidades da figura de difração da fenda simples com o espectrofotômetro.
    - Com  $\text{ganho}=1$  dá pra medir todos os picos, mas os secundários ficam muito pequenos. Com  $\text{ganho}=10$  satura o máximo central mas os outros ficam mais visíveis.
    - Qual é melhor usar? Dá para juntar as duas medidas ??
  - Da distância entre os mínimos nesse espectro obtenha a largura da fenda e compare com o valor nominal.
  - Usando esta largura de fenda e normalizando pelo máximo, sobreponha a curva esperada à experimental

# Largura da fenda a partir dos mínimos

A partir de um gráfico de  $\sin(\theta) \times m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) e utilizando a EQ. 1, pôde-se determinar a largura da fenda.

$$m\lambda = \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = m \frac{\lambda}{d} = m\alpha \quad (1)$$

Assim, pela FIG. 6, e utilizando um valor de

$\lambda = 623.8nm$  foi obtido um valor de fenda  $d = 0.03968(33)mm$ , um valor compatível com o nominal por  $0.157\sigma$ .

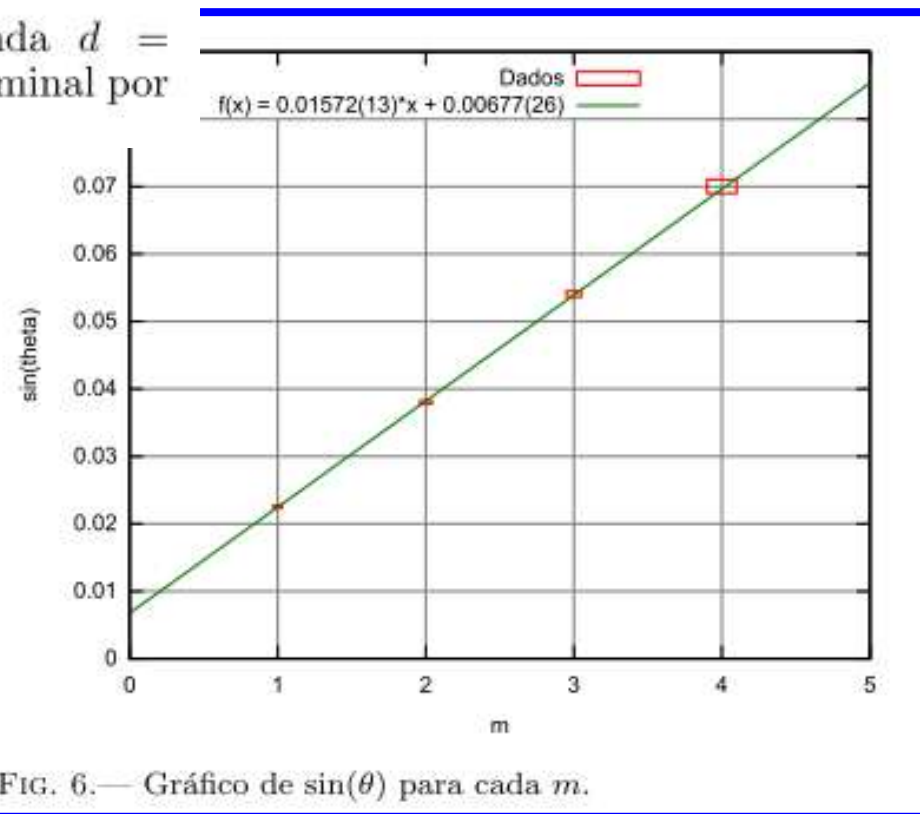
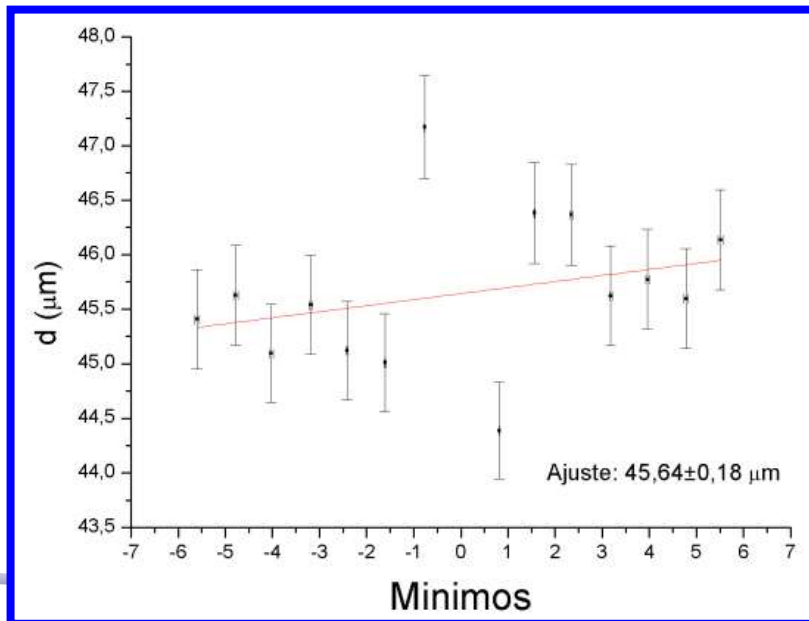
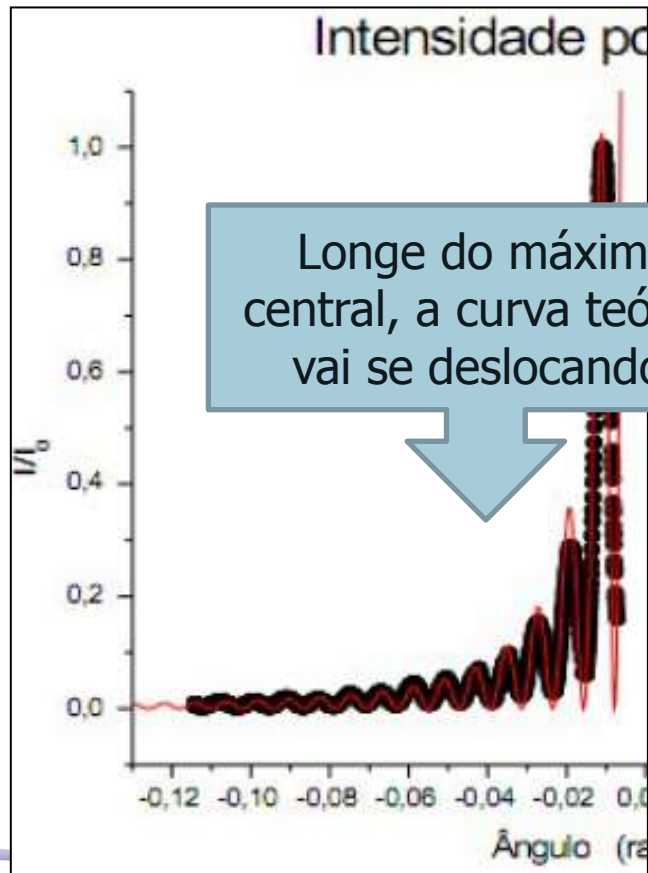


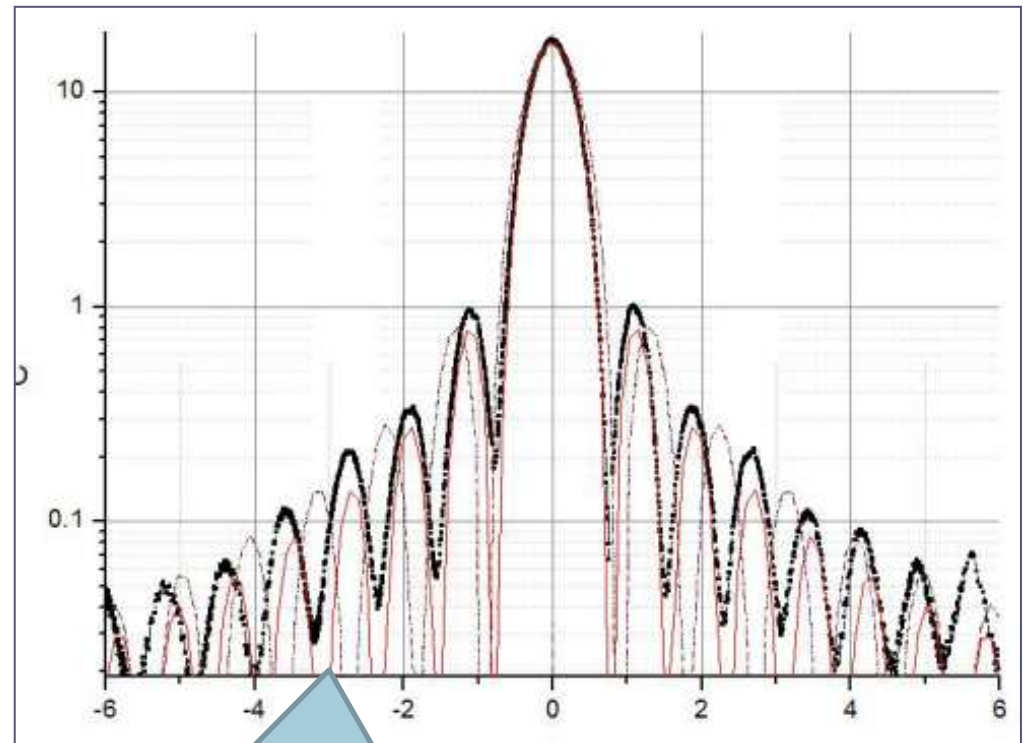
FIG. 6.— Gráfico de  $\sin(\theta)$  para cada  $m$ .

# Este Ajuste Está Bom ?

Pelo gráfico 1, observa-se que o ajuste não representa muito bem a função logo após o primeiro mínimo a partir do centro. Já a função teórica ficou igualmente ruim, pois mesmo no pico central, o lado direito da função não concorda com os pontos experimentais.



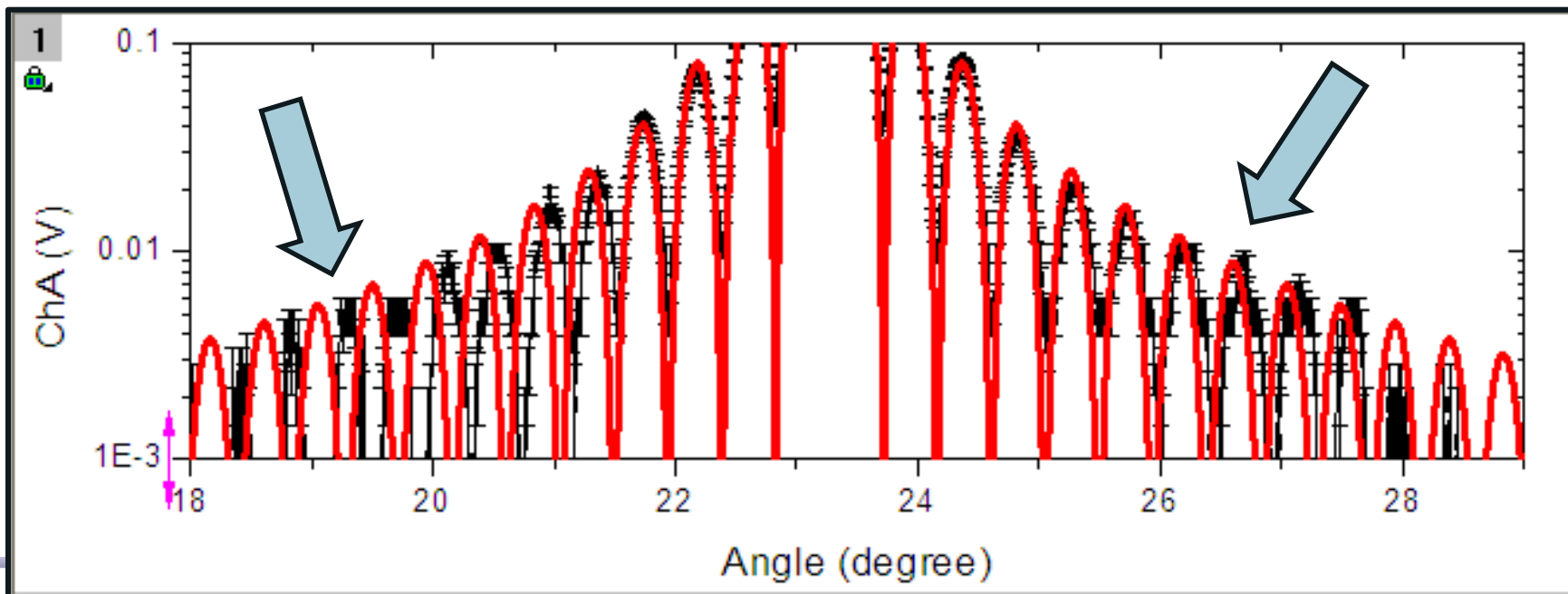
Longe do máximo central, a curva teórica vai se deslocando.



Os máximos parecem ser bem ajustados, mas a curva teórica se anula nos mínimos, o que não acontece com os dados!

# Alinhamento

- Há o problema de alinhar o slide com o laser. Se o ângulo não for  $90^\circ$ , a figura de difração vai ficar mais apertada de uma lado e mais solta do outro lado.



# Um grupo fez a correção

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{d\pi}{\lambda} \sin \theta \quad \boxed{\text{ok}} \quad (1)$$

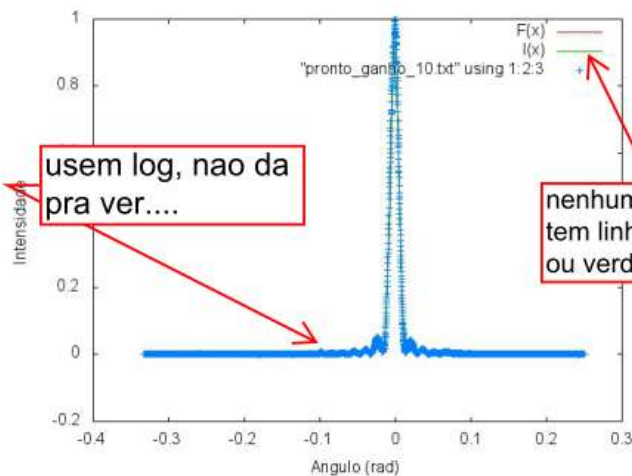
em que  $\lambda$  é o comprimento de onda do feixe de luz incidente,  $d$  a largura da fenda, e  $\theta$  o ângulo de leitura, em radianos. O ajuste de (1) à série de dados foi feito, na Figura 3.a, e mostrou  $\chi_{red}^2 = 6,00(3) \cdot 10^{-3}$ , portanto é incompatível. Ora, visualmente, ampliando os gráficos obtidos, é possível ver que eles não são simétricos em relação ao máximo central; de fato, os picos à direita do centro são mais baixos do que à esquerda. **nao da pra ver isso dos graficos...**

Isso se deve ao fato de que a fenda não estava totalmente alinhada com direção de incidência da luz em **razão de um defeito do equipamento**; levando em consideração que a luz incide com um ângulo  $\varphi$  sobre o plano da fenda, obtemos a seguinte relação:

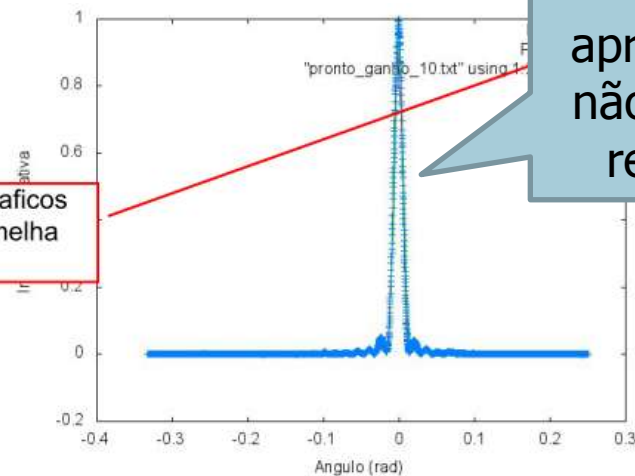
**defeito do alinhamento de vocês... o suporte devia ser alinhado e fixado pelo parafuso em baixo do prato.**

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{d\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \varphi) \quad (2)$$

Prosseguimos então com o ajuste de (2), na Figura 3.b, e obtivemos  $\chi_{red}^2 = 0,96(3)$ , portanto o ajuste é compatível. Também obtivemos o ângulo  $\varphi$ , que em graus vale **3,400(12)°**.



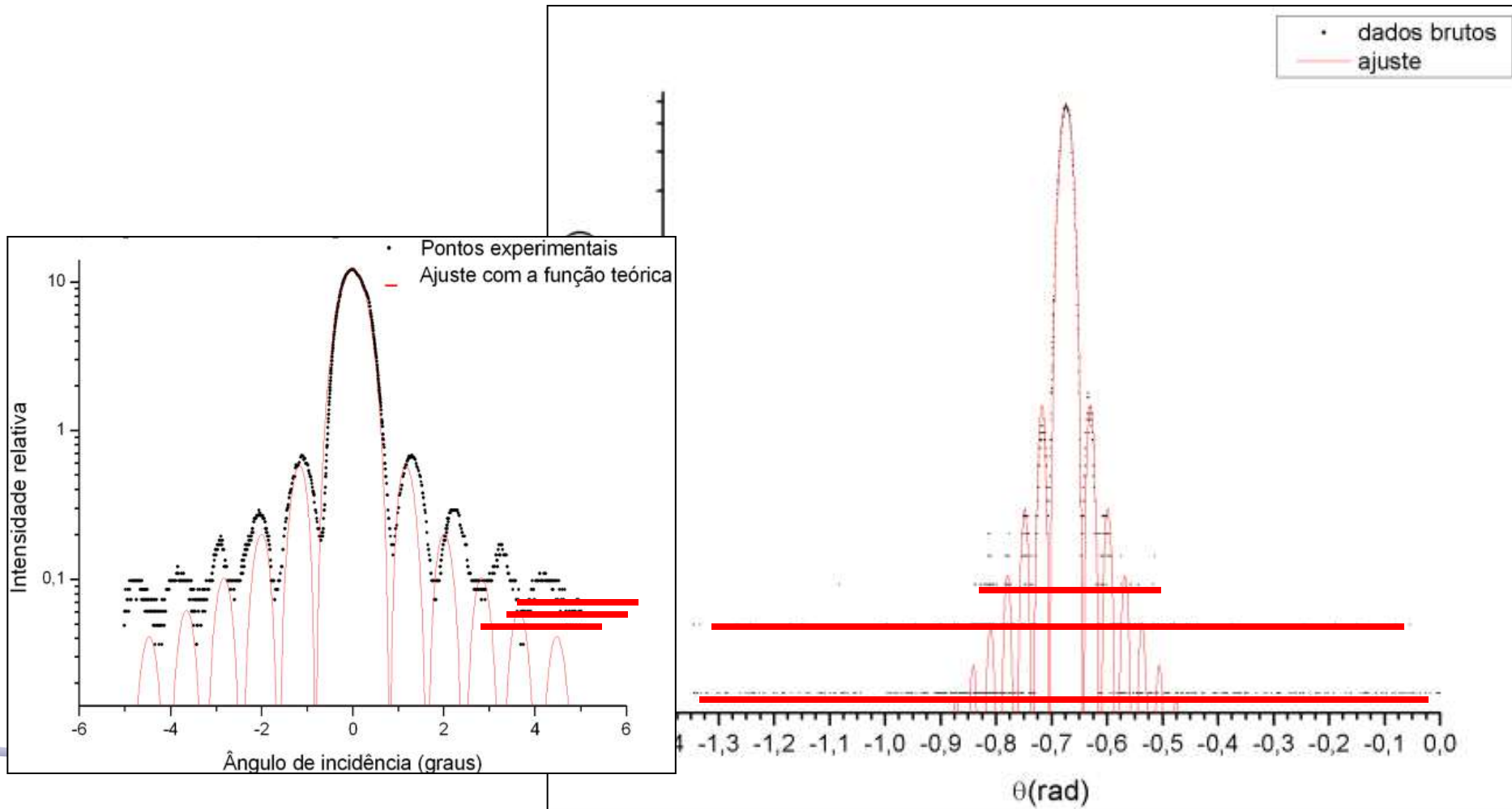
(a) sem correção



(b) com correção

# Outro problema

- Resolução do DataStudio: era preciso combinar 1x, 10x e 100x





# Largura da Fenda

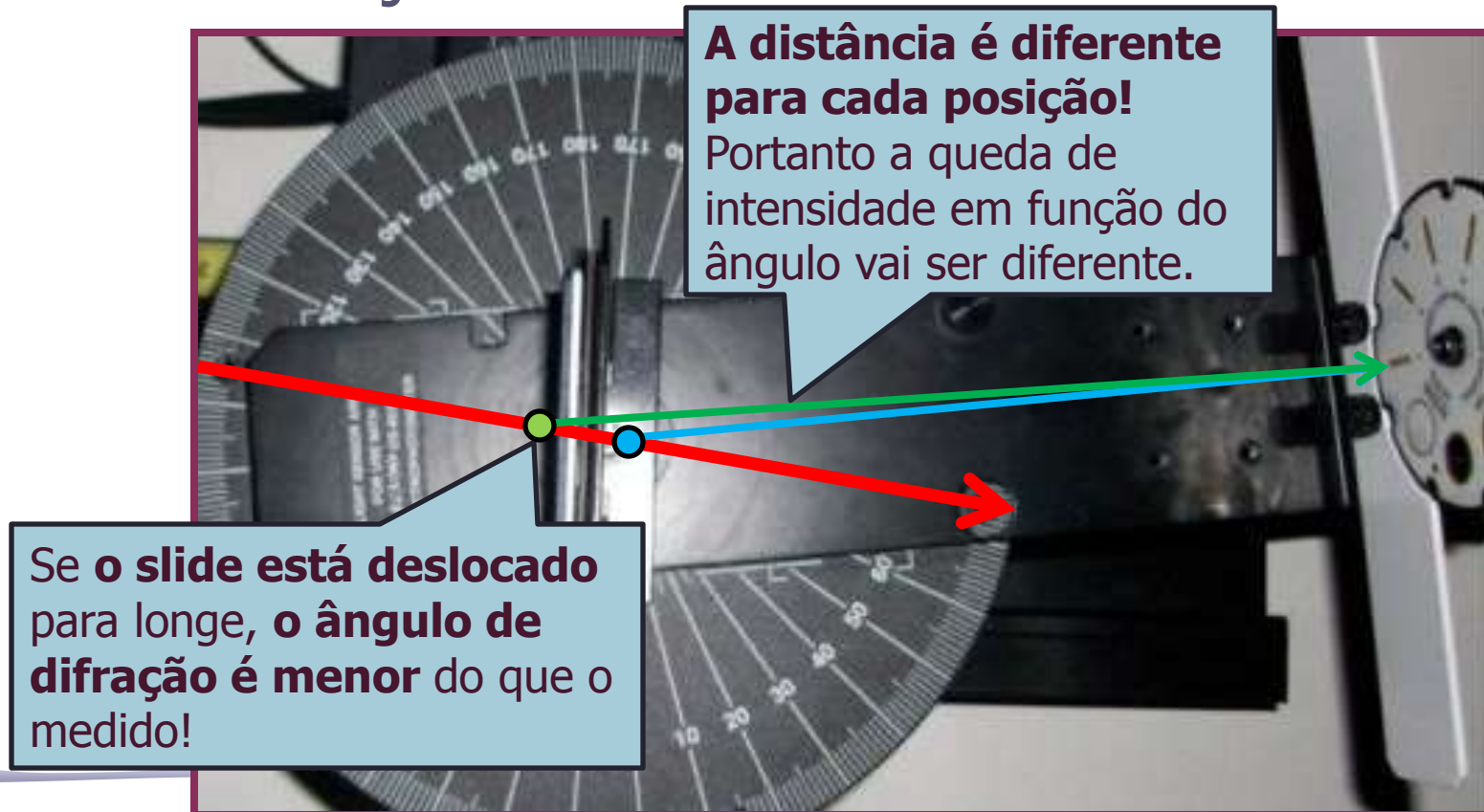
	$\lambda$ (nm)	Largura fenda ( $\mu\text{m}$ )	Correção
<b>H02</b>	<b>623.8</b>	<b>39.68 (33)</b>	<b>Largura da fenda</b>
<b>H03</b>	<b>633</b>	<b>43.00 (4)</b>	<b>Inclinação do slide</b>
H04	632.8	47.160 (28)	apenas ajuste
H05	?	42 (3)	apenas ajuste
H06	632.8	47.7 (12)	apenas ajuste
H07	?	45.64 (18)	apenas ajuste
H08	?	?	?
H09	628	43.98 (5)	apenas ajuste

# Parte 3 – Extra (semana que vem)

- Faça o ajuste não linear da função teórica aos dados experimentais do espectro da fenda simples
- Como se compara o ajuste e a função teórica?
  - Descreva as discrepâncias se houver
    - Os máximos são bem representados? E os mínimos?? Porque???
  - Como você pode explicar essas diferenças?
- Que parâmetros não foram levados em conta e que podem explicar as diferenças?
  - Encontre uma função teórica mais apropriada, justifique, refaça o cálculo e compare novamente.

# A posição do slide

- Um dos problemas é que o slide não está colocado bem no centro do prato. Neste caso, o ângulo medido não corresponde ao ângulo da difração!



# A posição do slide

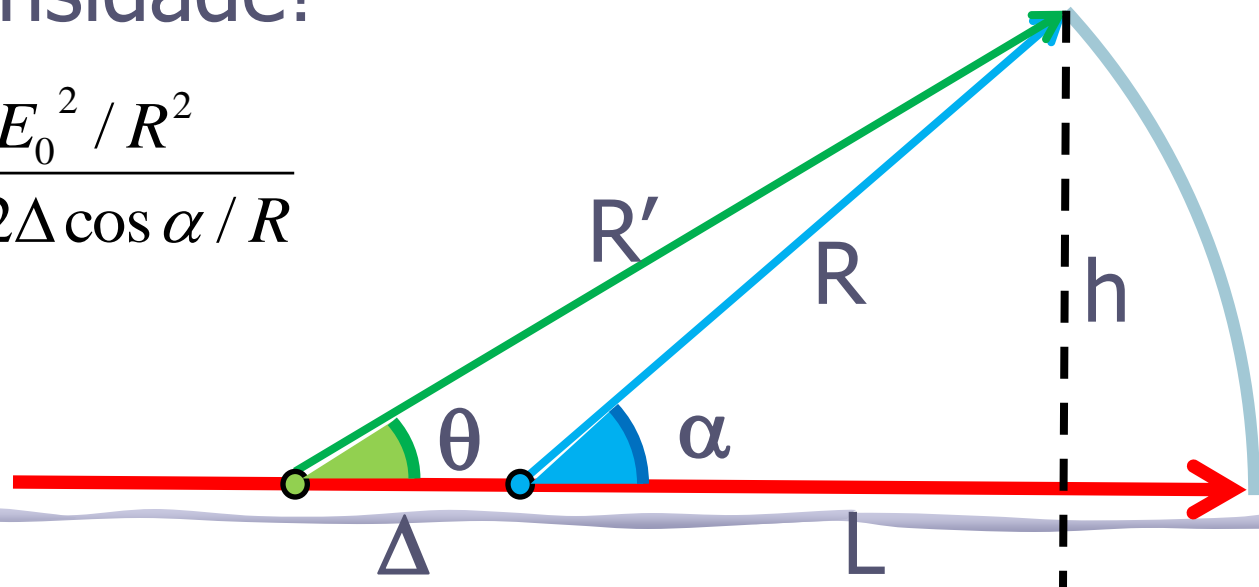
- A difração é dada por:  $I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$ ,  $\beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$

- Mas o ângulo medido não é o da difração!

$$\begin{cases} R \sin \alpha = h \\ R \cos \alpha = L + \Delta \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha + \Delta}$$

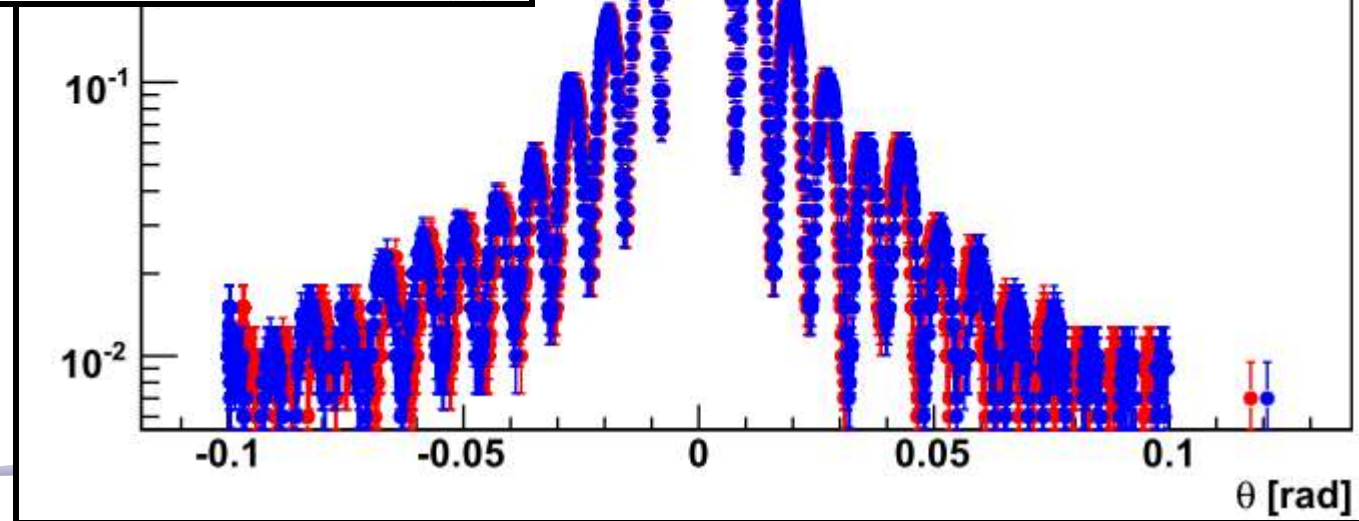
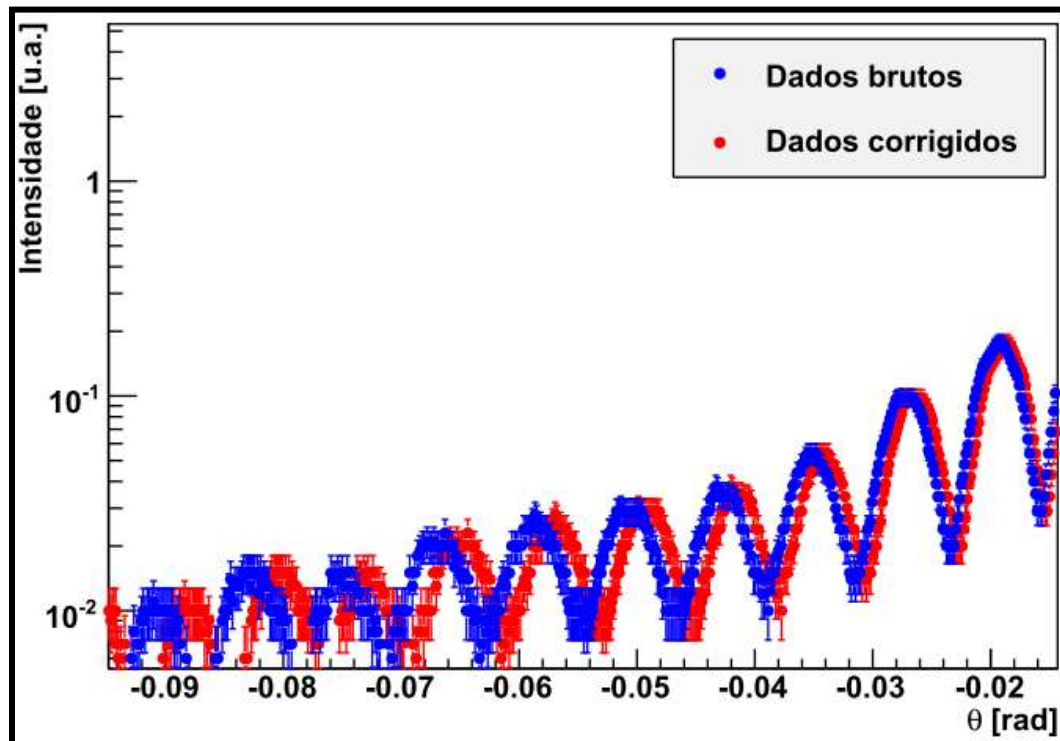
- E nem a intensidade!

$$I_{med} = \frac{E_0^2}{R'^2} \approx \frac{E_0^2 / R^2}{1 + 2\Delta \cos \alpha / R}$$




# Corrigindo a Posição do Slide

A correção é pequena e mais importante para grandes ângulos.




# Abertura do Sensor de Luz

- Um outro problema é que o sensor de luz tem uma abertura angular finita. Usamos a fenda mais estreita mas ainda assim estamos integrando sobre uma pequena abertura.



O sensor aceita vários ângulos para uma mesma posição!

A close-up photograph of a light sensor assembly. A blue dot is marked on a vertical white strip on the left. Two red arrows originate from this dot and point towards a circular sensor component on the right. A blue arrow also points from the dot towards the sensor. The background shows a metal plate with a ruler scale.

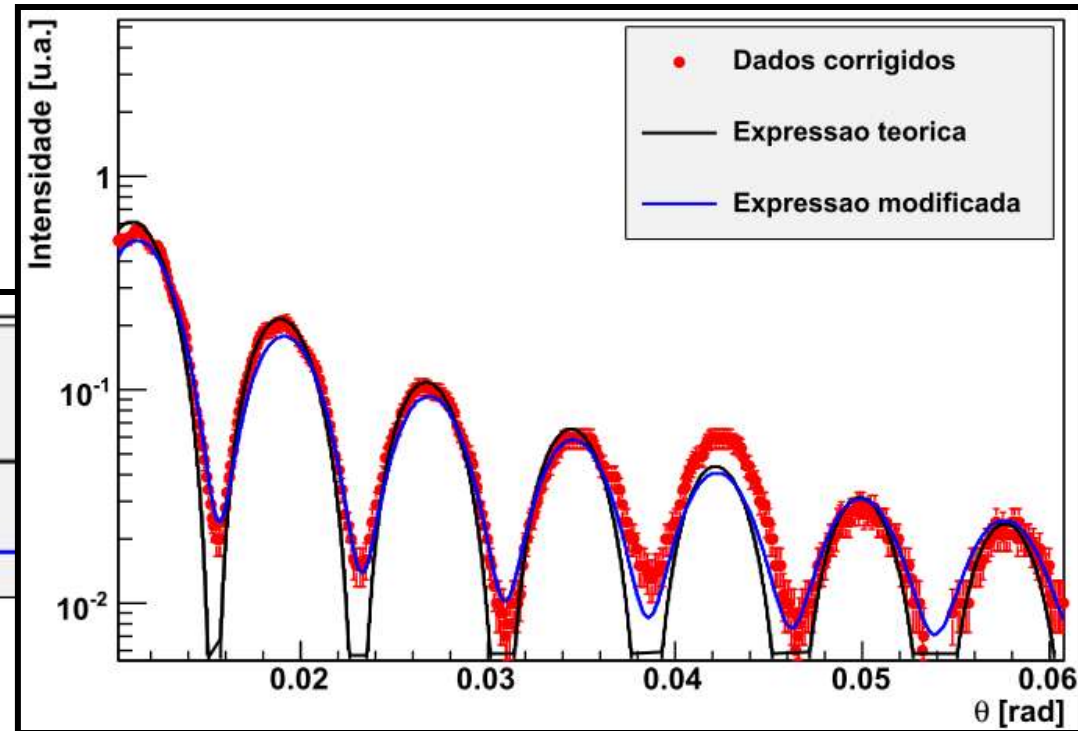
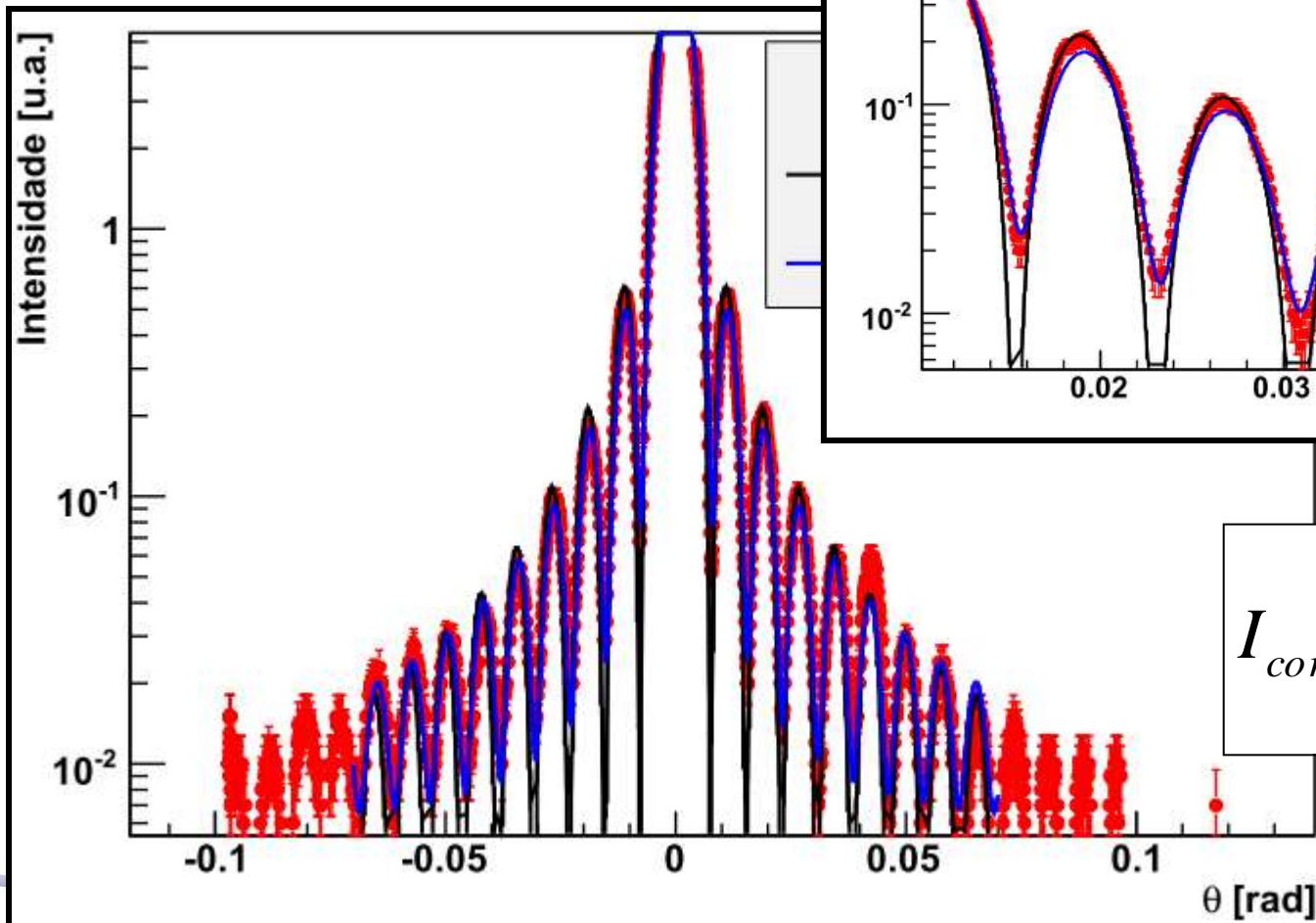


Mesmo a fenda estreita tem uma abertura diferente de zero!

A close-up photograph of a circular sensor component. The component is white with several gold-colored pins and black screws. A blue callout box with a white border is overlaid on the image, containing the text. The component is mounted on a black frame.

# Corrigindo a Abertura do Sensor

Como o sensor tem uma abertura não pontual, a intensidade nunca é zero.



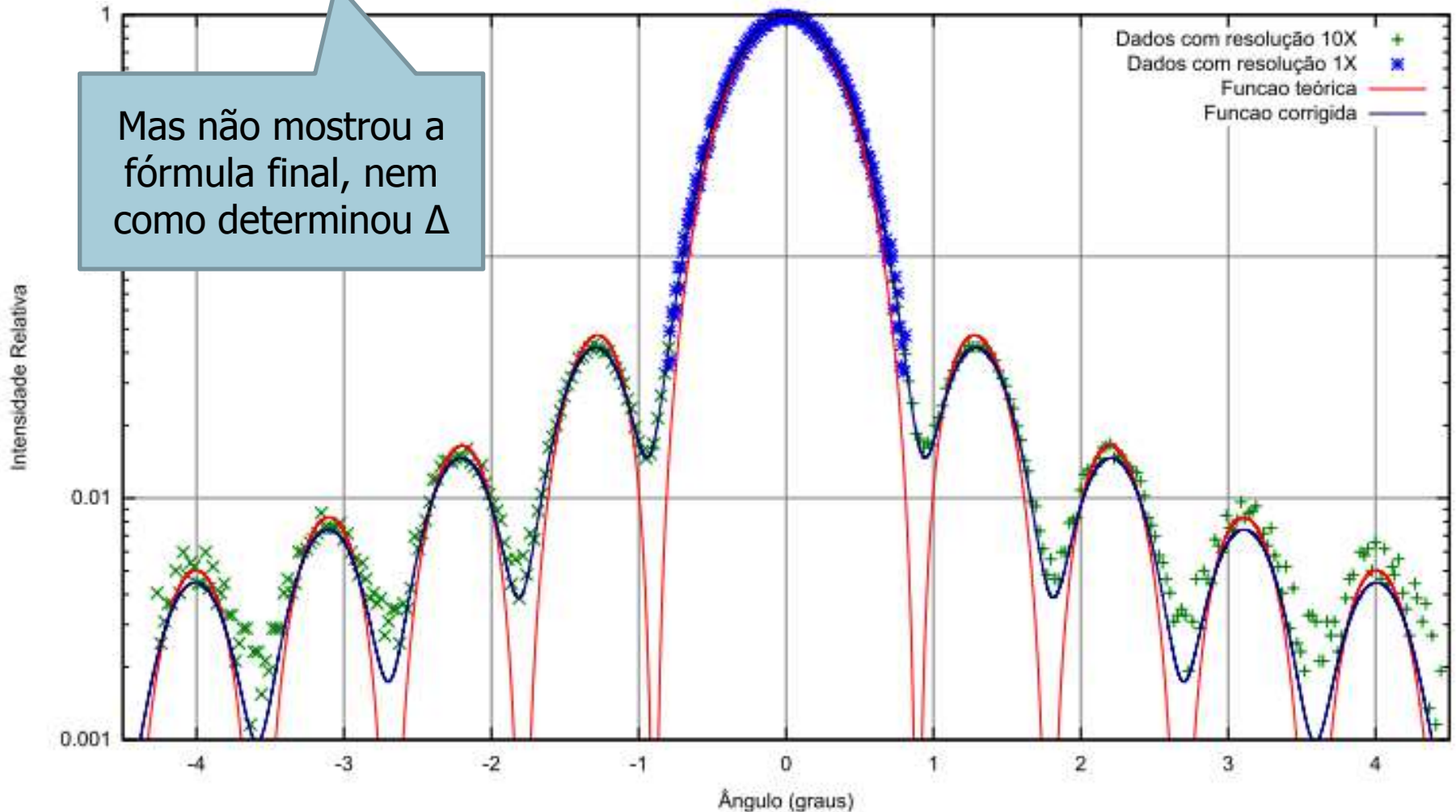
$$I_{corr}(\theta) = \int_{\theta-\Delta}^{\theta+\Delta} I(\theta') d\theta'$$

# Um dos grupos fez....

Síntese 03 – Experiência 02

$$I_{\text{corrigida}}(\theta) = \int_{\theta-\Delta}^{\theta+\Delta} I(\theta) d\theta$$

Intensidade de Incidência X ângulo





# Programação da Exp. 2

- Aula 1: óptica geométrica
  - Medidas com lentes convergente e divergente
- Aula 2: laser
  - Associação de lentes e aumento do diâmetro do laser
- Aula 3: difração
  - Figuras de difração e espectrofotômetro
- Aula 4: transformada de fourier
  - Estudo no plano de fourier
- Aula 5: computador ótico
  - Filtro na transformada de Fourier e recompor a imagem filtrada
- Aula 6: ImageJ
  - Tratamento de imagem no computador



# Computador Óptico

Essência: Transformada de Fourier 2D

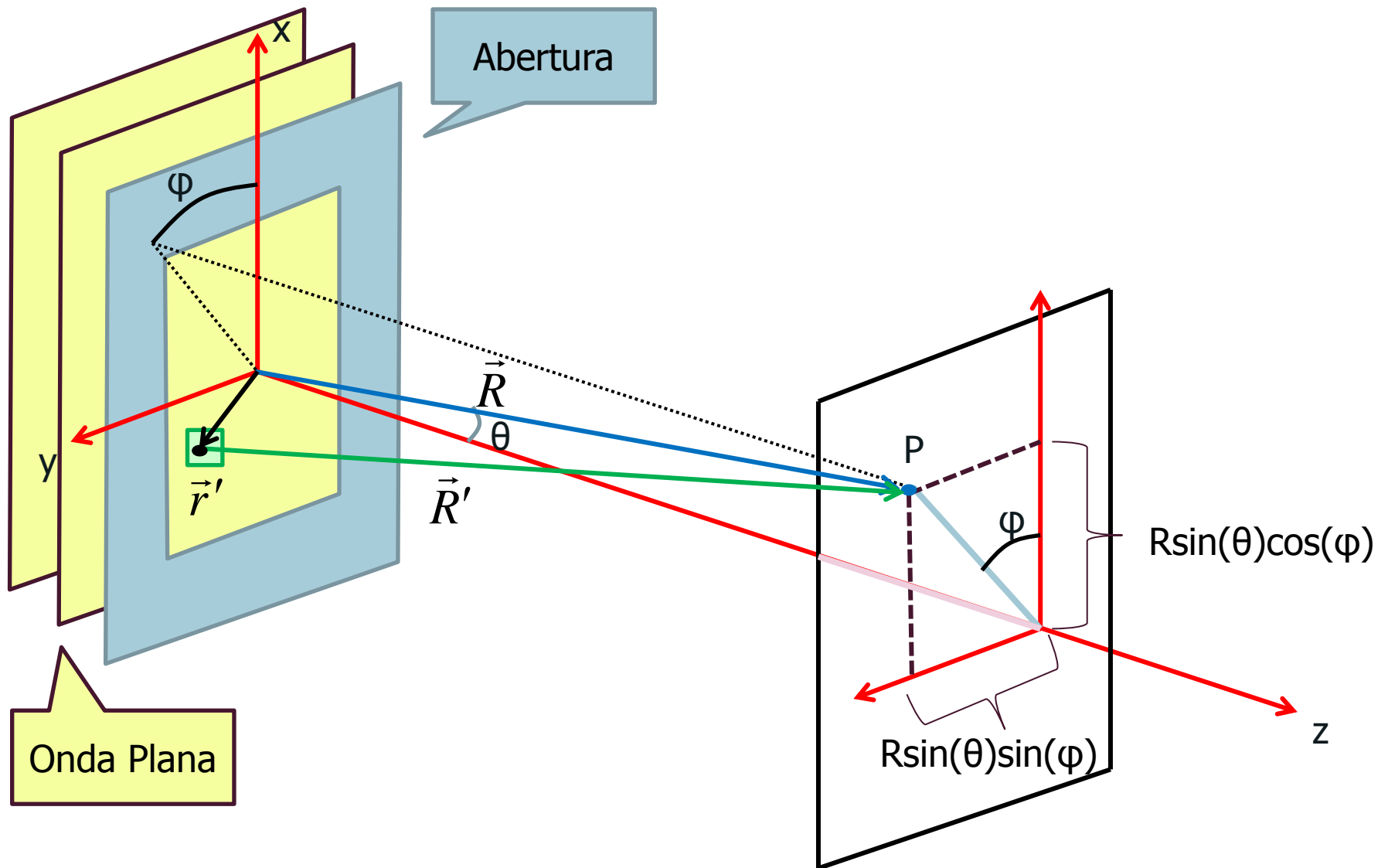
# Computador Ótico



# Construção ...

- Primeiramente precisamos iluminar o objeto de forma uniforme
  - Qualquer luz esta ok?
- Precisamos ser capazes de, experimentalmente, obter a transformada de Fourier deste objeto
- Precisamos criar filtros que atuem de forma diferente em cada componente da T.F.
- Precisamos reconstruir a imagem a partir das componentes já filtradas

# Generalizando a difração



# Generalizando a difração

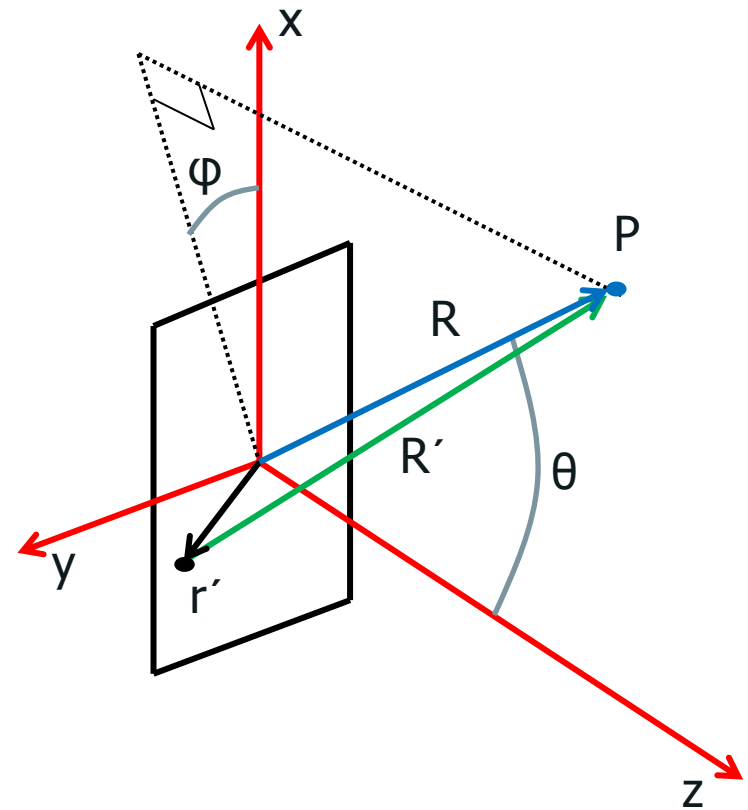
- Campo elétrico incidente no objeto

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}$$

- Por simplicidade:

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

- Qual o campo elétrico no ponto R?



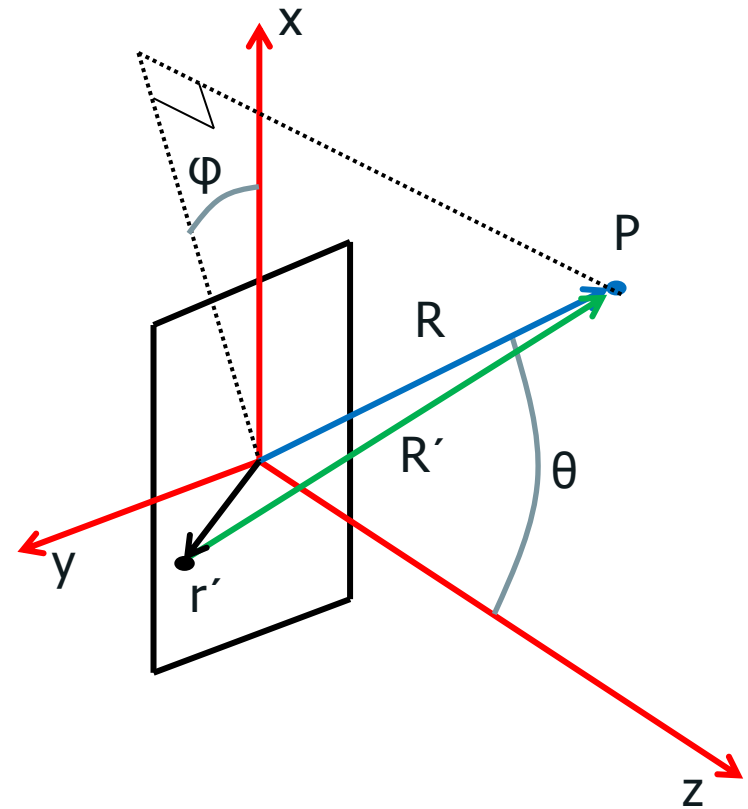
# Generalizando a difração

- Na posição  $R$ , o campo devido ao ponto em  $r'$  vale:

$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'}$$

- E o campo total fica:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int_{abertura} \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'} dx dy$$



# Generalizando a difração

- Para grandes distâncias, i.e. limite de Fraunhofer, temos:

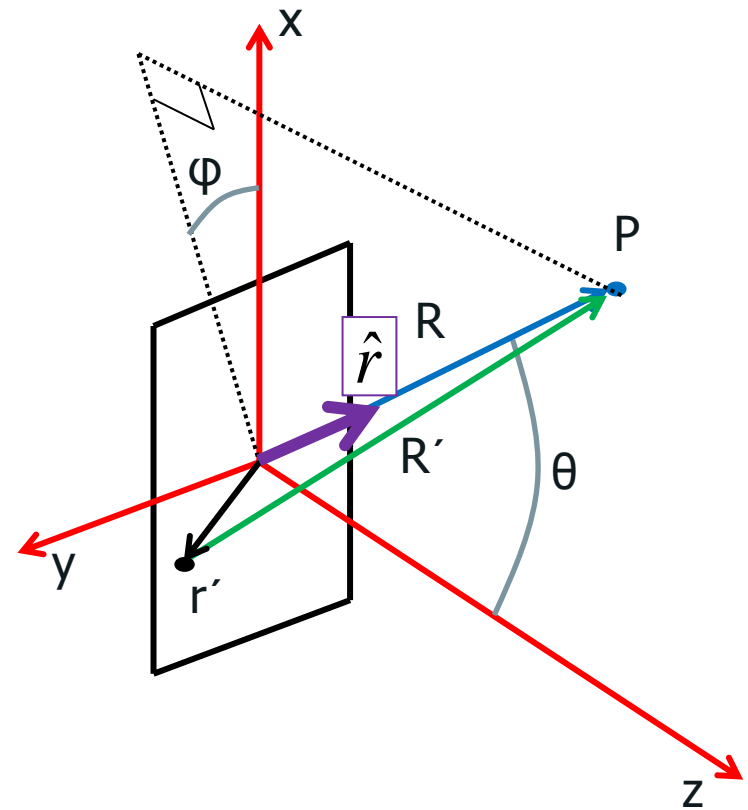
$$\vec{k} \approx k\hat{r}$$

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}' = R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{jkR - \vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

$$\hat{E}(\vec{R}) = e^{jkR} \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$





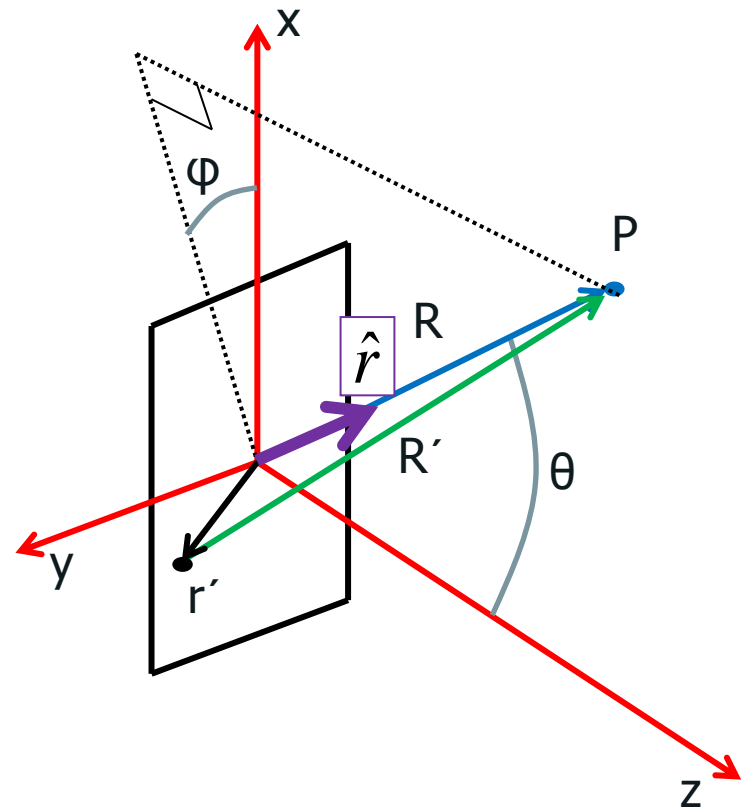
# Generalizando a difração

- Ainda para grandes distâncias, temos:

$$R' \approx R$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



# Generalizando a difração

- Quem é  $\vec{k} \cdot \vec{r}'$  ?

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

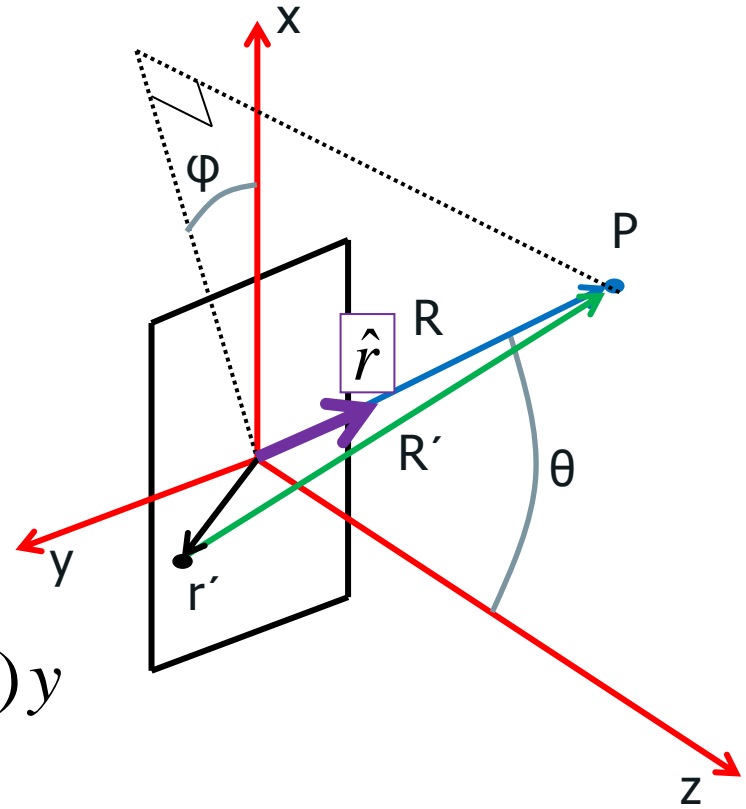
$$\vec{k} = k\hat{r} = (k \sin \theta \cos \varphi)\hat{x} + (k \sin \theta \sin \varphi)\hat{y} + (k \cos \theta)\hat{z}$$

- Assim:

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = (k \sin \theta \cos \varphi)x + (k \sin \theta \sin \varphi)y$$

- Podemos ainda definir:

$$\begin{cases} k_x = (k \sin \theta \cos \varphi) \\ k_y = (k \sin \theta \sin \varphi) \end{cases} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' = k_x x + k_y y$$



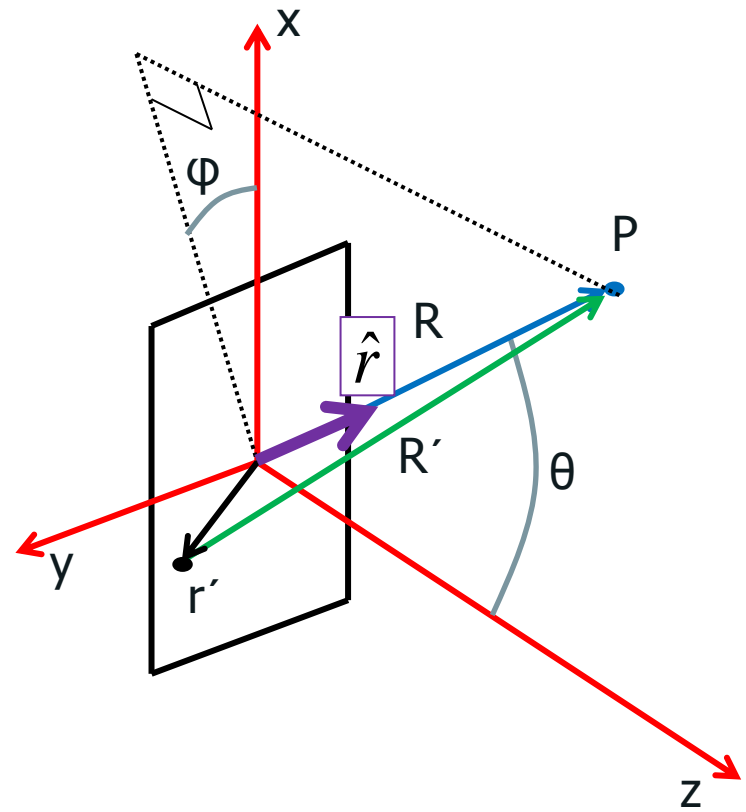
# Generalizando a difração

- A expressão para o campo era assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

- E agora pode ser escrita como:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$



# Séries de Fourier

- A transformada de fourier em 2D

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$

- Difração de Fraunhofer:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

# Difração e transformada de Fourier

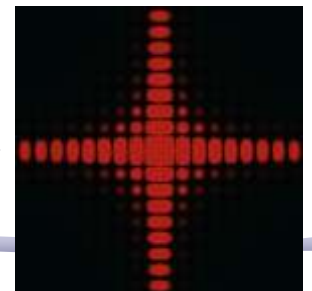
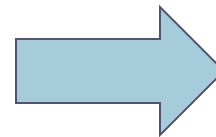
- A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às intensidades para cada frequência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_x, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$



# Generalizando ainda mais

- Para uma onda plana incidente:
  - $E_0(x,y)$  é constante.
- Uma onda qualquer pode ser decomposta numa soma de ondas planas.
  - Então já consideramos todos os casos?
- Não! E se a abertura **não** for uma fenda? E se houver uma **lente** ou um **objeto opaco** que modifiquem **a amplitude** ou **a fase** de  $E(x,y)$  em cada ponto?

# Generalizando ainda mais

- Se houver uma lente, o que interessa é o campo transformado por ela, ou seja:

$$E_0(x, y) \xRightarrow{\text{LENTE}} \varepsilon(x, y)$$

A função da abertura é o campo incidente transformado pelo objeto/fenda/lente/etc onde ocorre a difração.

- A distribuição de campo elétrico na figura de difração de Fraunhofer é a transformada de Fourier da distribuição do campo elétrico na abertura.

$$\hat{E}(k_x, k_y) = \iint \varepsilon(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

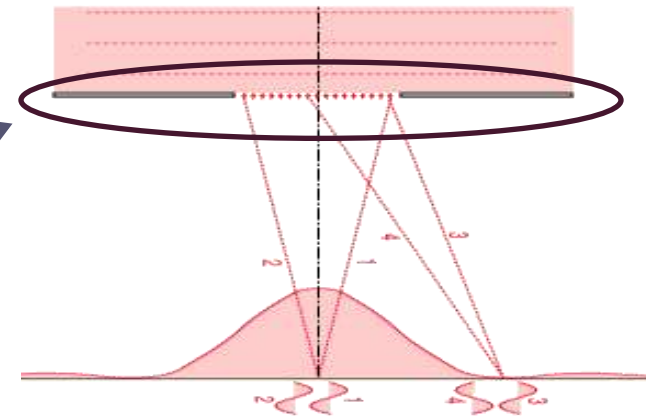
$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint E(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

# Exemplo: Fenda Simples

- Na fenda simples, temos apenas 1D

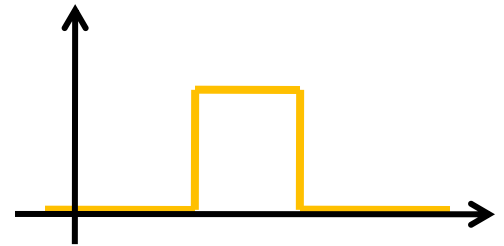
$$\hat{E}(k_x) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int E(k) e^{jk_x x} dk$$



- A função da abertura é a onda quadrada!

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} E_0, & \text{se } |x| < \frac{d}{2} \\ 0, & \text{se } |x| > \frac{d}{2} \end{cases}$$





# Exemplo: Fenda Simples

- Vamos fazer a integral da onda quadrada:

$$\hat{E}(k) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx = E_0 \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_x x} dx = E_0 \left[ \frac{e^{-jk_x x}}{-jk_x} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

- Lembrando da notação complexa para o seno:

$$\hat{E}(k) = \frac{E_0}{k_x} \frac{(e^{+jk_x d/2} - e^{-jk_x d/2})}{j} = 2 \frac{E_0}{k_x} \sin(k_x d / 2)$$

- Multiplicando e dividindo por  $d$ , temos:

$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin(k_x d / 2)}{k_x d / 2}$$

# Exemplo: Fenda Simples

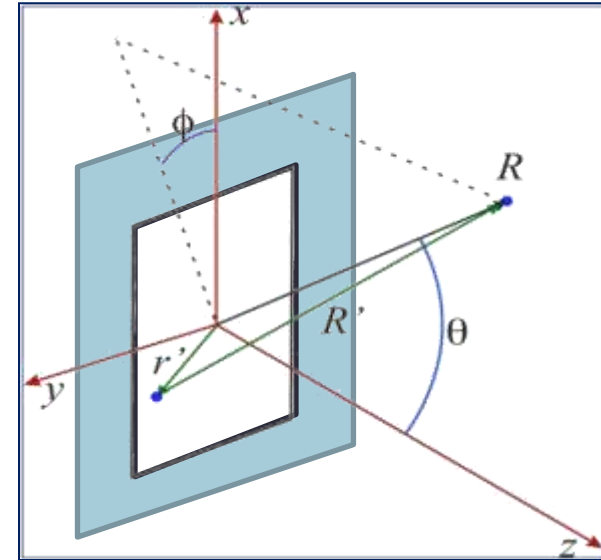
- O  $k_x$  é a projeção do vetor de onda em x:

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

- Como só temos 1 dimensão:

$$k_x = k \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)$$

- E o campo elétrico fica dado por:



$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin \beta}{\beta}, \quad \beta = \frac{k_x d}{2} = \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)$$

A intensidade depende da largura da fenda

$$\Rightarrow I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Exatamente o que tínhamos antes!

# Exemplo: T.F.

- Será que a posição e a intensidade dos máximos são o que esperamos?

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

- Para os máximos SECUNDÁRIOS,  $\sin(\beta) = \pm 1$

$$\sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = \pm(2m+1) \frac{\pi}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta = \pm(2m+1) \frac{\pi}{2}$$

- E as posições são:

$$\Rightarrow \sin \theta_{\max} = \pm \frac{\lambda}{2d}, \pm 3 \frac{\lambda}{2d}, \pm 5 \frac{\lambda}{2d}, \dots$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??

# Exemplo: T.F.

- A intensidade é:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- Portanto os máximos SECUNDÁRIOS ficam:

$$I(\theta_{\max}) = \frac{I_0}{\beta^2} = \frac{1}{(2m+1)^2} \frac{4I_0}{\pi^2} = 1 \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{9} \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{25} \frac{4I_0}{\pi^2}, \dots$$

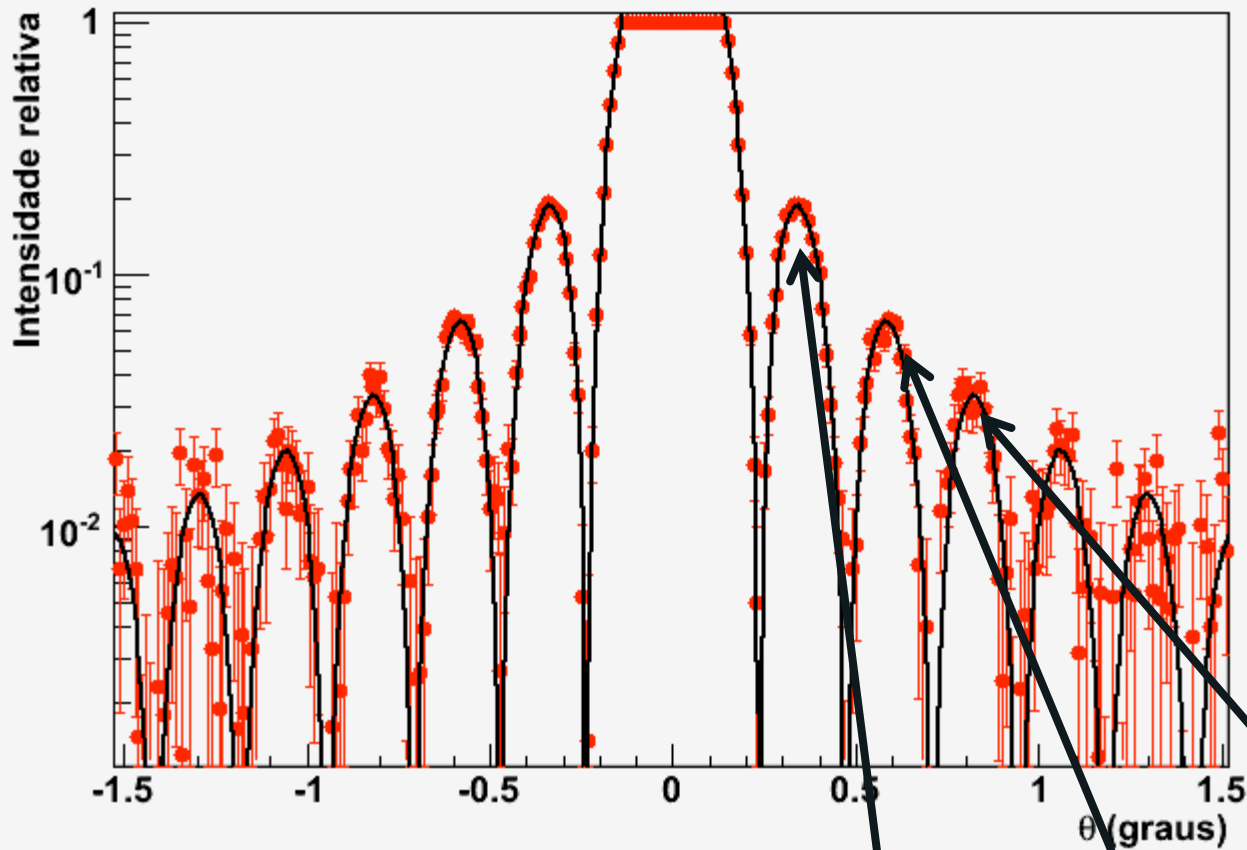
- Assim, o campo elétrico é:

$$|\hat{E}| = \sqrt{I} \Rightarrow \frac{|\hat{E}|}{\sqrt{\frac{4I_0}{\pi^2}}} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??

# Exemplo: T.F.

Difracao de uma fenda simples



$$V(t) = V_0 \left[ \frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

# Tarefas 1 – Para relatório

Com os dados da semana passada, do espectro de difração da fenda simples:

- Obtenha a razão entre as intensidades de cada máximo secundário e aquela do primeiro máximo secundário
  - Determine as posições e amplitudes
  - Compare com a previsão teórica.



# Computador Óptico

## Plano de Fourier

# Difração x Computador óptico

- A condição de Fraunhofer estará satisfeita se o anteparo estiver a uma distância muito grande em comparação às dimensões da abertura. No caso das fendas utilizadas no experimento anterior esse é o caso:
  - A nossa bancada é suficientemente longa se comparado às dimensões das fendas utilizadas ( $\mu\text{m}$ )
- Mas no caso de objetos maiores, não é possível observar a figura de difração de Fraunhofer, pois o comprimento de onda é pequeno e a bancada é curta.



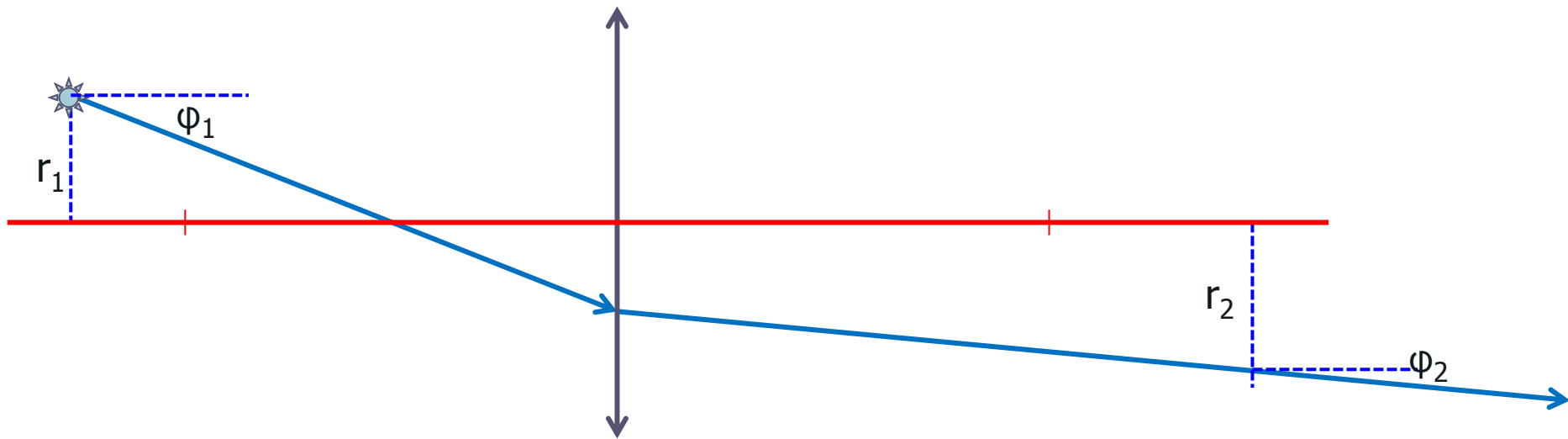
# Computador ótico

- Então, como fazer a transformada de Fourier da imagem do nosso objeto macroscópico?
- Sabemos que quando a imagem do objeto passar pela lente, do outro lado vai sair um  $E(k_x, k_y)$  que é a transformada de Fourier do  $\varepsilon(x, y)$ .
- Para saber o que vai acontecer exatamente, é preciso considerar como a lente modifica a amplitude e a fase de  $E_0$  em cada ponto  $(x, y)$ .
  - Vejam detalhes no site da Rice University, Physics 332, Fourier optics, seção C.

O que acontece é que a transformada de Fourier aparece no plano focal.

# Lente simples

- Seja uma fonte pontual em um sistema óptico do tipo:



- Vamos relembrar como tratamos as lentes...

# T.F. e o método matricial

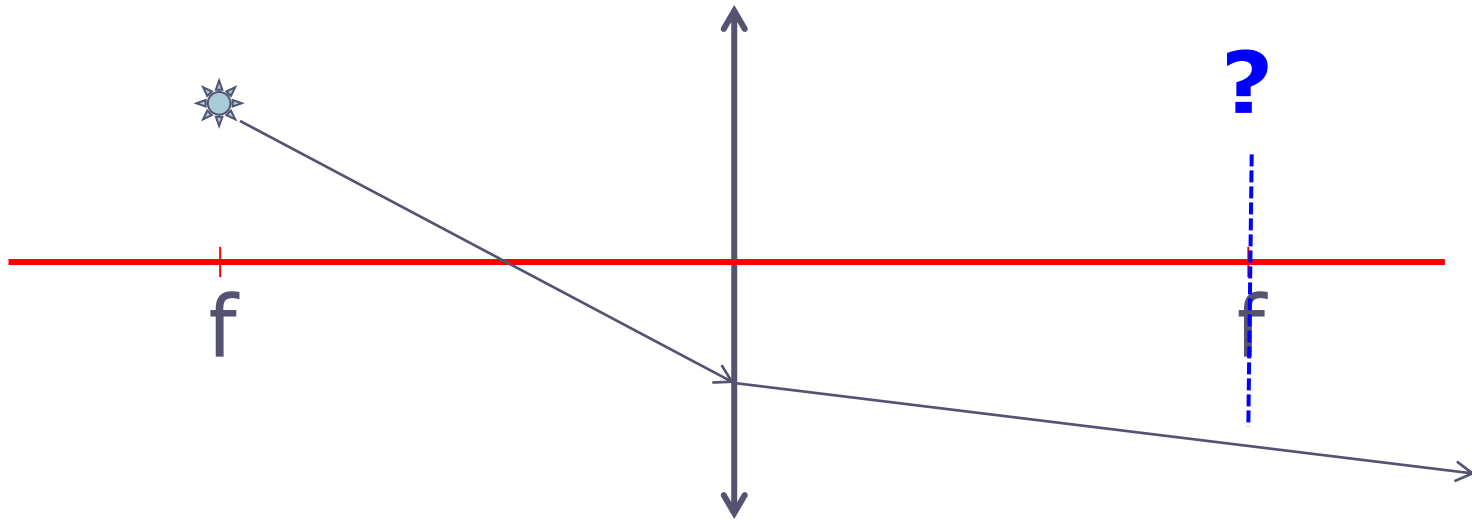
- Seja uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = Ar_1 + B\phi_1 \\ \phi_2 = Cr_1 + D\phi_1 \end{cases}$$

- Se  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , todos os raios de mesmo ângulo passam pelo mesmo ponto  $\mathbf{r}_2$
- Se  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , todos os raios de mesmo ponto de origem emergem com o mesmo ângulo do sistema óptico.

# Lente simples

- Agora vamos considerar uma fonte pontual no plano focal...




- O que acontece?

# Calculando...

- A matriz de transformação é:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$


$$r_2 = f\phi_1$$

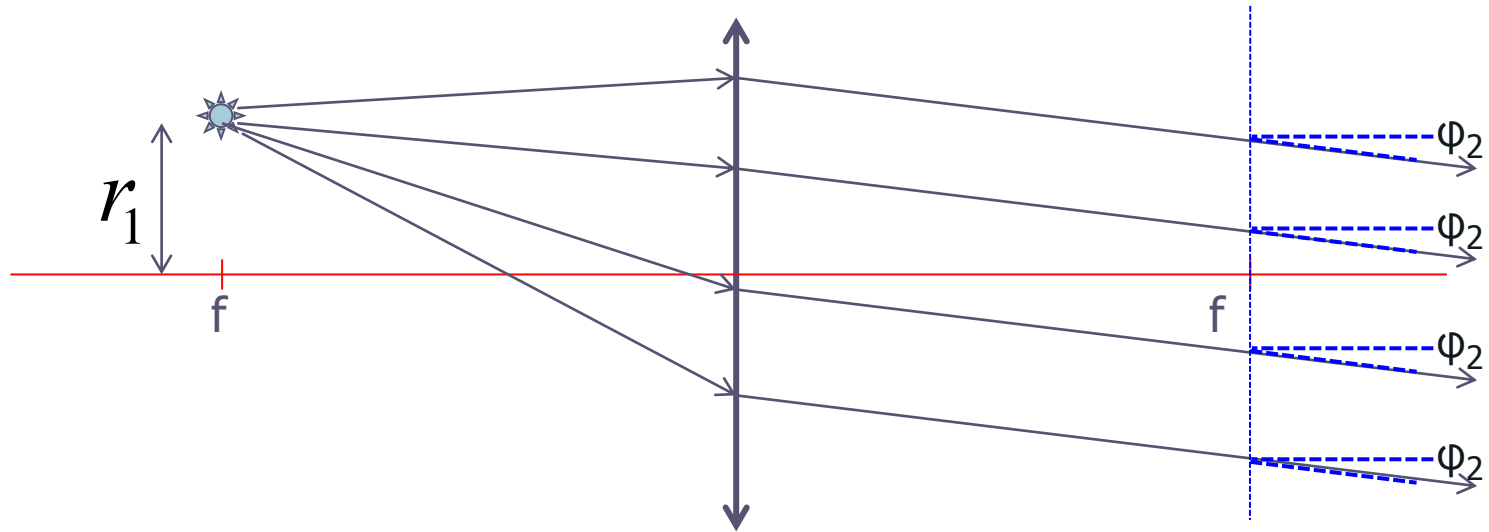
$$\phi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$

O Ângulo no qual o raio de luz emerge depende apenas da posição da fonte, ou seja, os raios emergem paralelos → onda plana

# Lente simples

- Fonte pontual no plano focal.
  - Todos os raios emergem com o mesmo ângulo  
→ saída é uma **onda plana**

$$r_2 = f\phi_1$$
$$\phi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$



- O que está acontecendo? Porque um fonte pontual se transforma em uma onda plana??

# Uma T.F. importante

- Um fonte pontual é uma função delta:

$$f(r) = \delta(r - b)$$

- Cuja transformada de fourier é:

$$FT\{\delta(r - b)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r - b) e^{-2\pi i r k} dr = e^{-2\pi i b k}$$

- Conseqüentemente, a transformada de Fourier de uma onda plana será uma função delta!

# Onda plana

- Onda plana de direção bem definida (não necessariamente no eixo óptico do sistema)

$$E = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\sin\phi} \sim e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r\phi} = e^{2\pi i\mu r}, \quad \mu = \frac{\phi}{\lambda}$$

- A transformada de fourier é:

$$FT\left\{e^{2\pi i\mu r}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\mu r} e^{-2\pi ikr} dr = \delta(\mu - k)$$

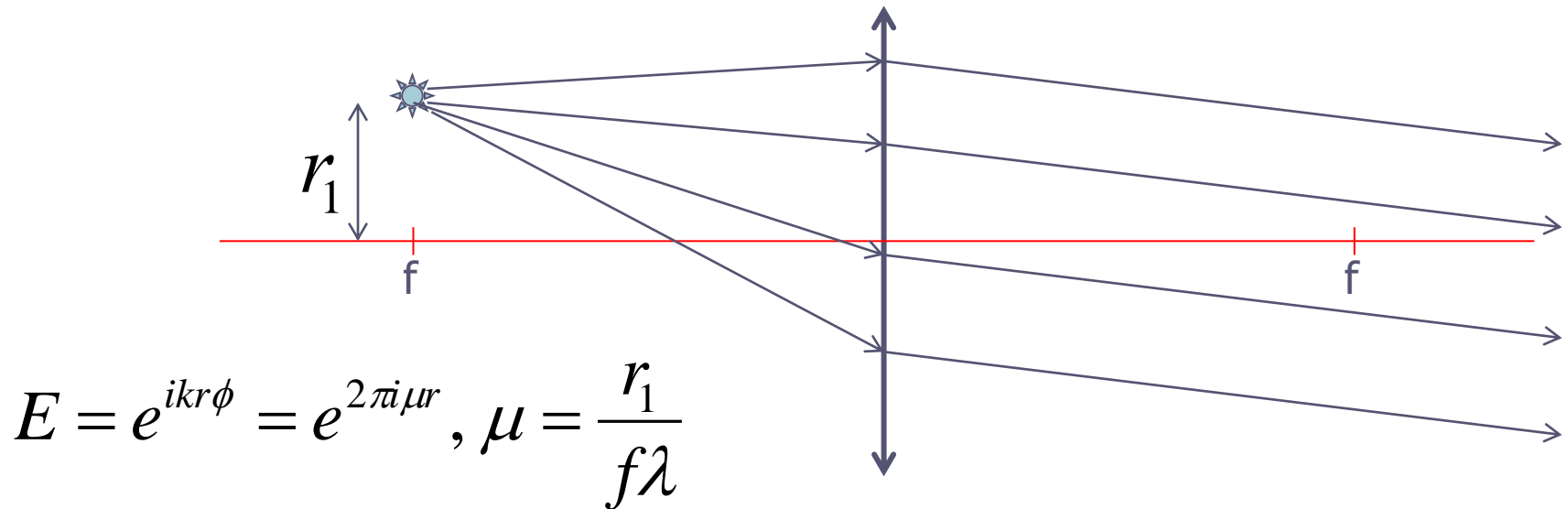
tem dimensão de freq: é a frequência espacial

a transformada de Fourier de uma onda plana é uma função delta



# Lente simples

- Fonte pontual no plano focal: a lente está fazendo a transformada de fourier!



NOTA: colocamos todas as distâncias= $f$ , por isso aparece a transformada de fourier exata. Se um deles fosse diferente, apareceria uma **fase**. Como estamos medindo apenas a amplitude, não vemos isso no lab!

# O reverso de aplica

- Se um conjunto de raios paralelos atinge uma lente em um ângulo bem definido, eles se cruzam no plano focal de tal modo que essa posição vale:

$$r_2 = f\lambda\mu = f\phi_1$$

- Como  $\mu$  é uma frequência espacial, tem dimensão de  $\mathbf{1}/[\mathbf{L}]$ , de tal forma que  $\mathbf{1}/\mu$  tem dimens'ao de  $[\mathbf{L}]$  e podemos escrever:

$$\lambda\mu = \phi_1 \Rightarrow \frac{\lambda}{d} = \phi_1 \Rightarrow d\phi_1 = \lambda$$

# Finalmente...

- A equação de primeira ordem de um objeto difrator é

$$d \sin \theta = m \lambda$$

Lembrar da equação:

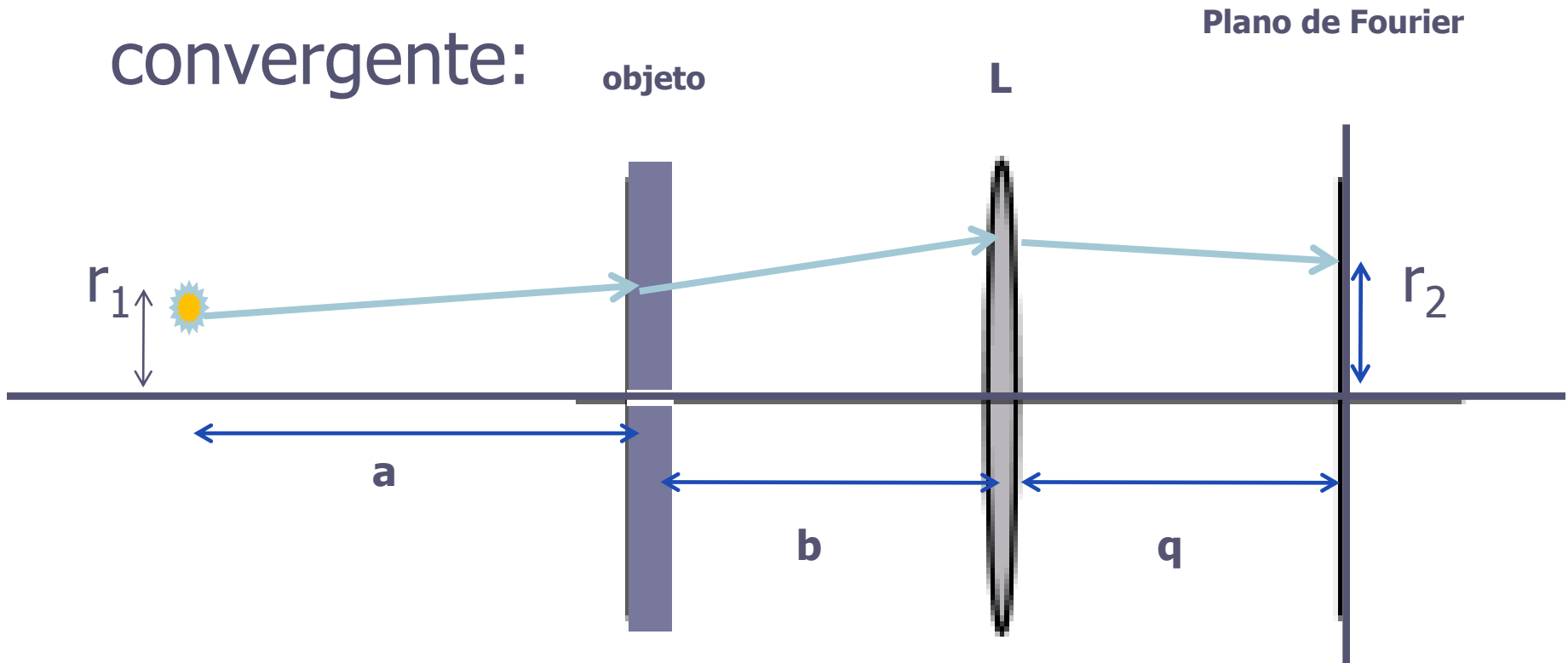
$$d \sin \theta = m \lambda$$

onde **d** é uma dimensão característica do objeto difrator

- Como o padrão de difração corresponde à transformada de Fourier (no campo elétrico), a lente funciona como um elemento que permite obter essa TF.

# Generalizando...

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer vamos calcular onde se situa TF obtida com uma lente convergente:

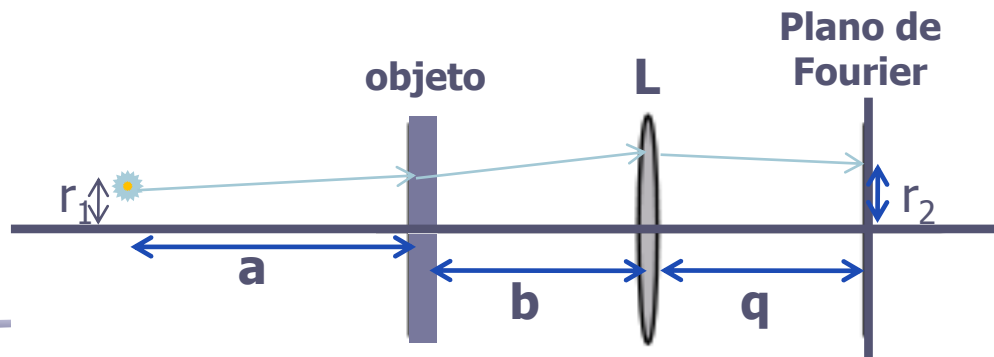


# Generalizando...

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer
- A matriz de transformação é (deduzam):

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right)r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$



# Generalizando...

- $r_2$  deve ser independente de  $\varphi_1$

$$a + b - (a + b)\frac{q}{f} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a + b}$$

- Se a fonte está no infinito, ou seja, o objeto está iluminado por uma onda plana:

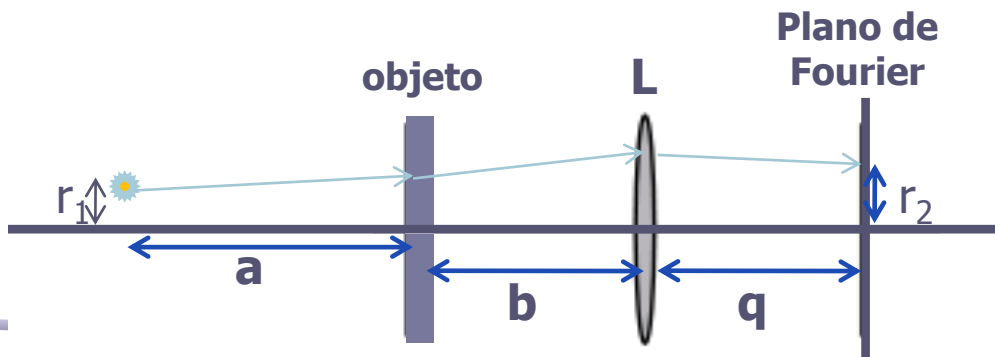
$$a \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a + b} \Rightarrow q = f$$

# Posição do plano de fourier

- A posição do plano de Fourier de uma lente depende tanto da posição da fonte (**a**) quanto do objeto em relação a lente(**b**).

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$

- Caso a fonte esteja no infinito, o plano de Fourier encontra-se na distância focal da lente e INDEPENDENTE da posição do objeto.



$$q = f$$

# “Tamanho” da transformada

- Se a fonte está no eixo óptico, a posição de convergência dos raios é:

$$r_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \left( b + q - \frac{bq}{f} \right) \frac{m\lambda}{d}$$

- Substituindo a expressão para a distância focal, temos:

$$r_2 = \left( \frac{qa}{a+b} \right) \frac{m\lambda}{d}$$

- Se o objeto está na distância focal, **b=f**, e:

$$r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$



# Objetivos da semana

- Estudar o plano de fourier de uma lente
- Posição do plano

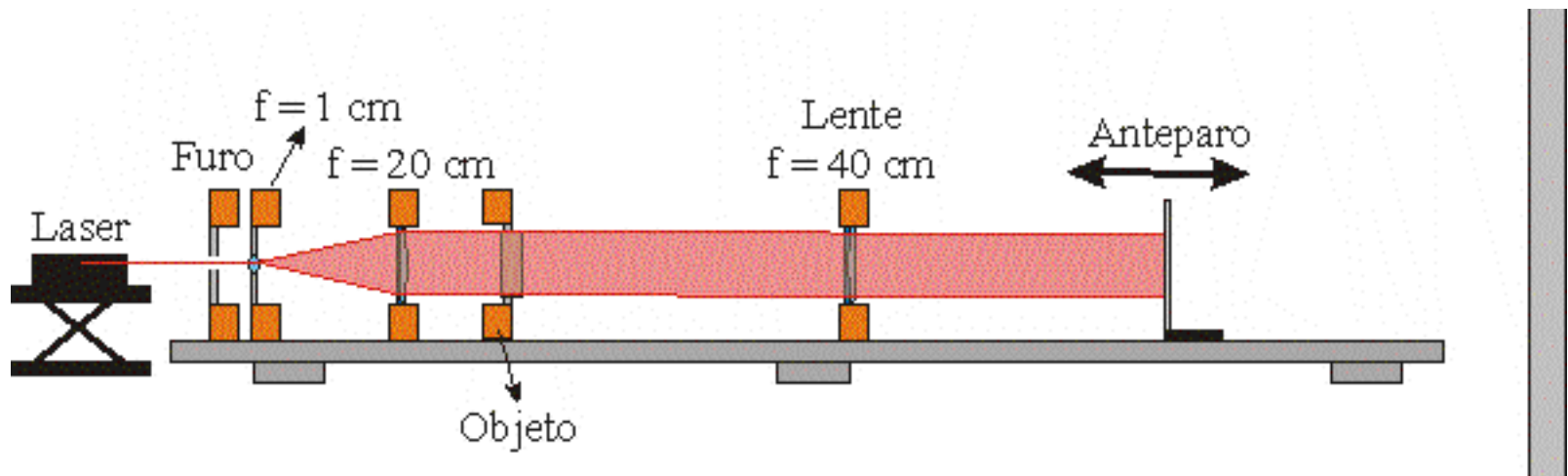
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$

- Tamanho da T.F.
  - Objeto no foco

$$r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$

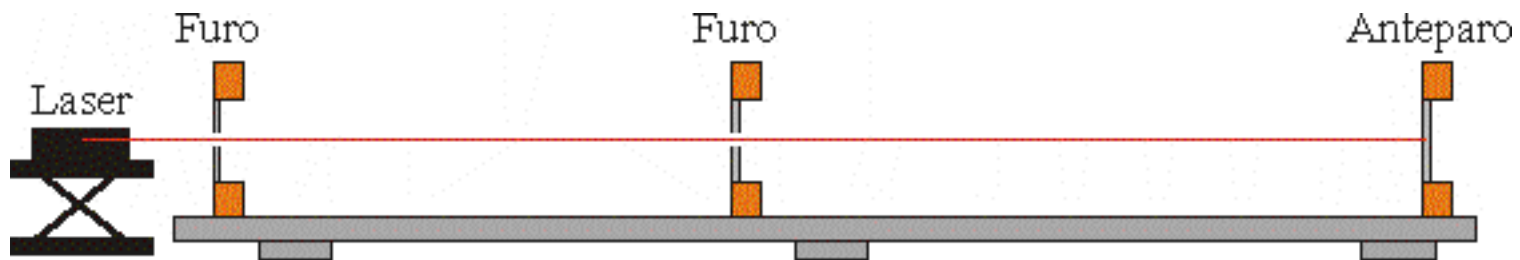
# Arranjo experimental

- Laser e orifícios para alinhamento
- Lentes (para mudar o diâmetro do laser) e fazer a transformada
- Objeto (grades quadriculadas) e anteparos



# Montagem

- Alinhamento do sistema óptico:
  - Montar, no trilho, dois orifícios e um anteparo rebaixado no centro.
  - Alinhar o laser, fazendo o feixe passar por todos os furos e atingir o centro do anteparo.
  - **NÃO MOVIMENTAR MAIS O SISTEMA ÓPTICO!!!!!!**

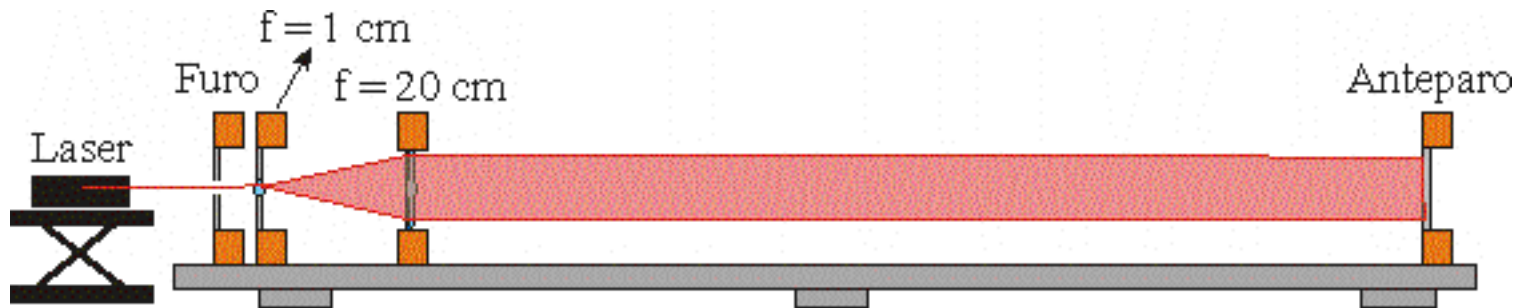




07/05/2012

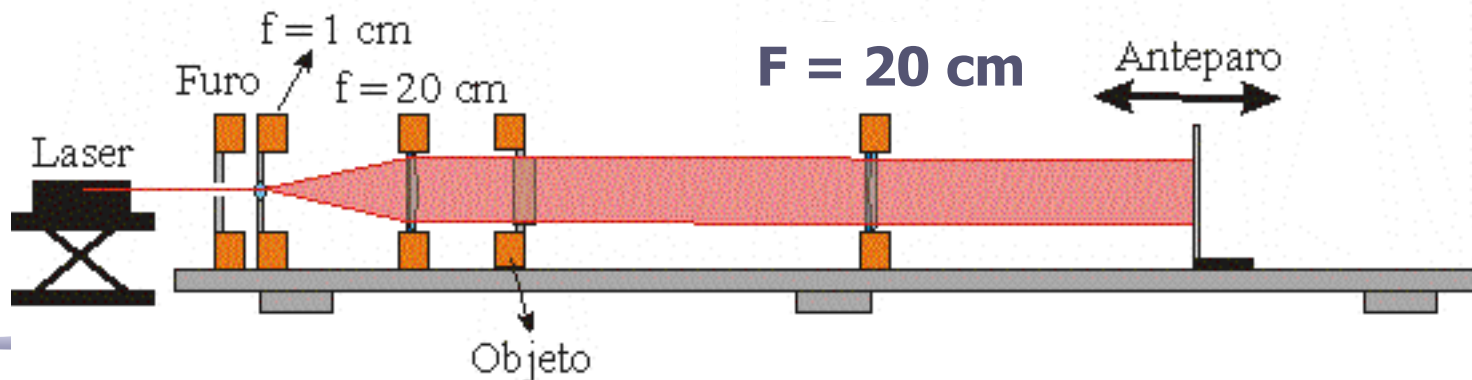
# Montagem

- Alargar o laser para poder incidir na imagem
  - Usar a lente de  $f = 1 \text{ cm}$  e  $f = 5 \text{ cm}$
  - Aumento do laser =  $5/1 = 5$  vezes
  - Lembre da experiência de lentes para saber como determinar a distância entre as lentes.
    - A primeira pode ser bem próxima ao furo.



# Montagem

- Montar o computador óptico
  - Colocar o objeto (no caso, a rede) na posição vertical.
  - Colocar uma lente de  $f = 20$  cm com a face plana para o objeto
  - Posicionar o objeto à distância apropriada da lente.
  - Posicionar o anteparo de modo a determinar o plano de Fourier



Plano de fourier

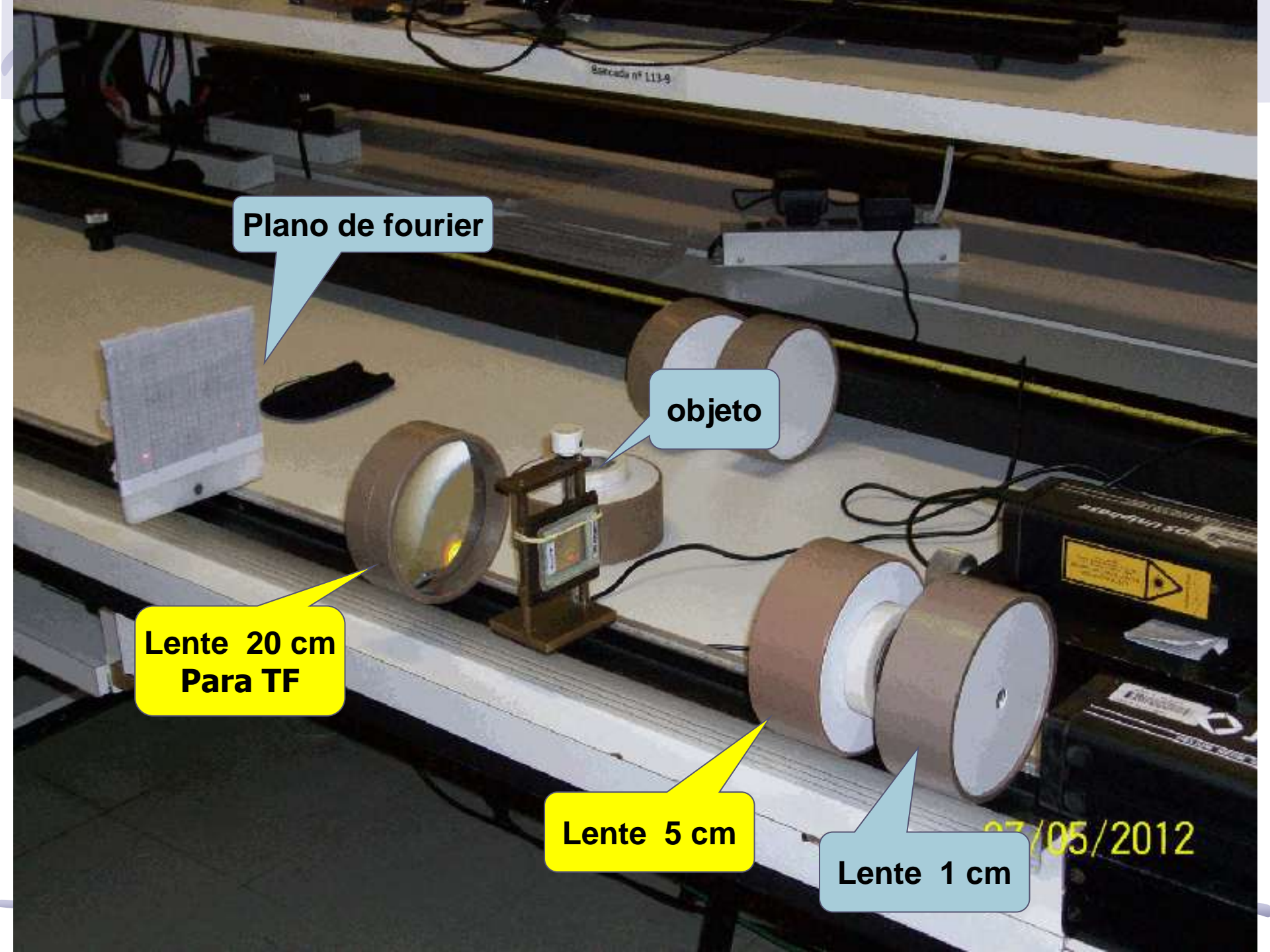
objeto

Lente 20 cm  
Para TF

Lente 5 cm

Lente 1 cm

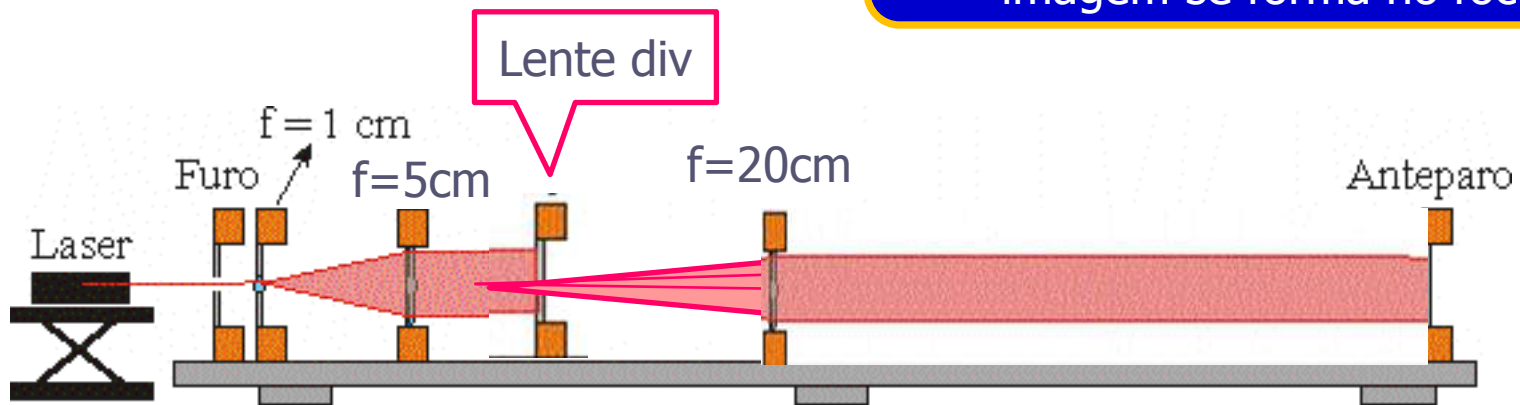
07/05/2012



# Montagem

- Fonte pontual a uma distância FINITA:
  - ajustar a posição da lente de 5 cm em relação à de 1 cm (divergência da saída)
  - usar uma lente divergente (muito mais fácil)

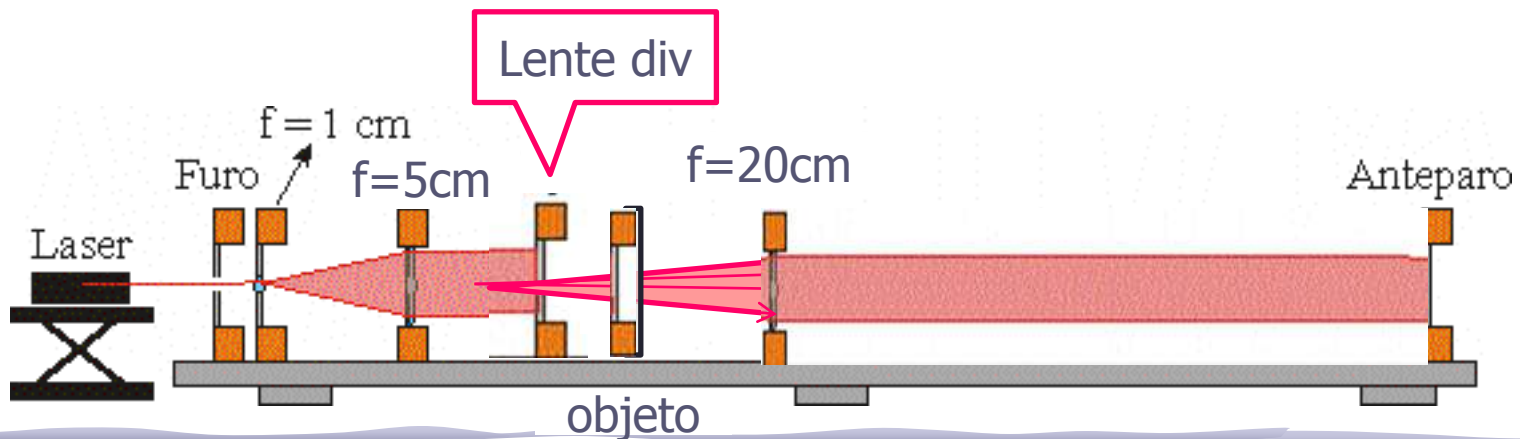
p/ a lente divergente ( $f$  negativo):  
feixe paralelo (fonte no infinito) a  
imagem se forma no foco

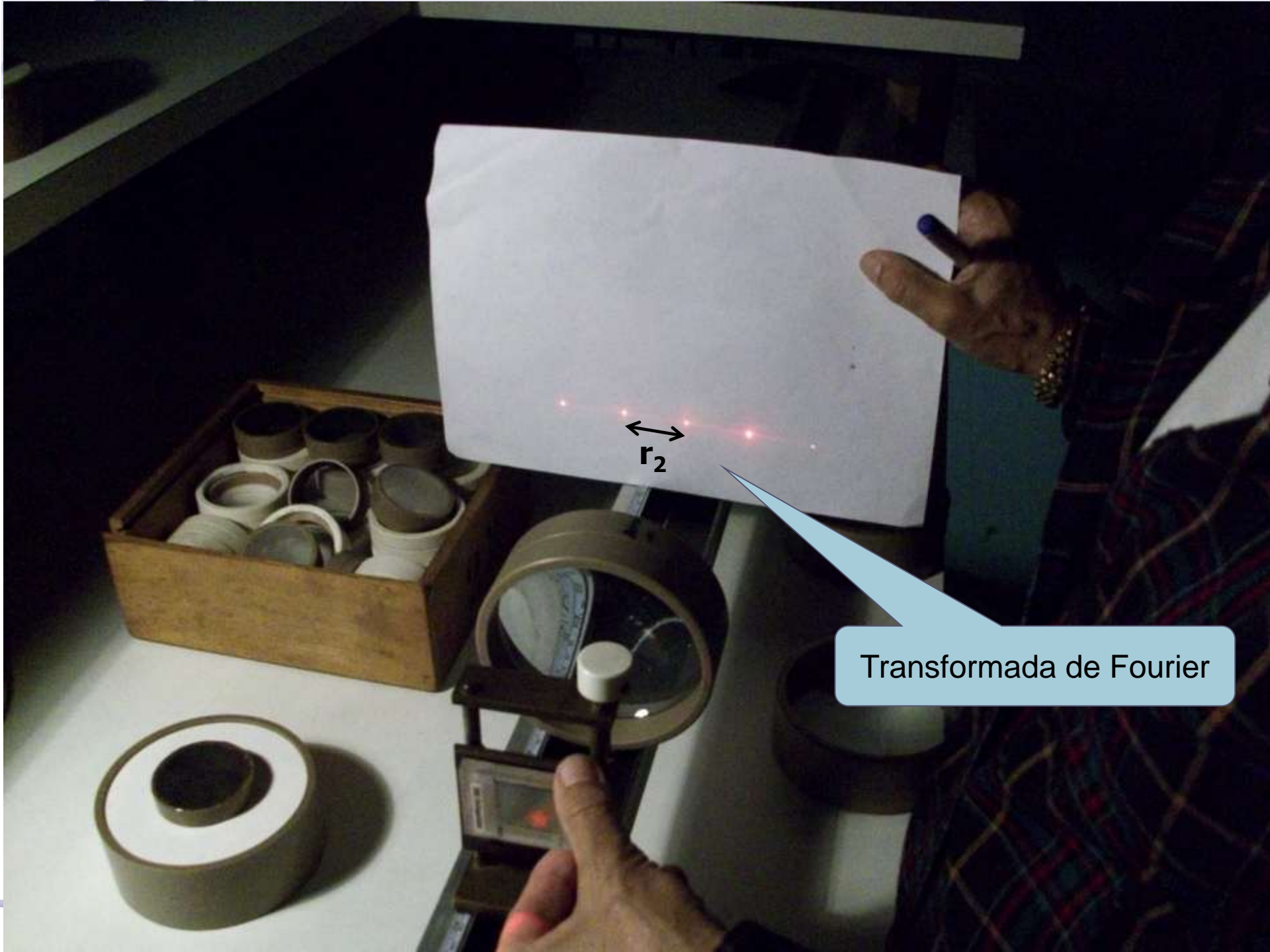




# Montagem: fonte pontual

- Montar o computador óptico:
  - Colocar a lente divergente próxima à lente de 5cm (você vai ter que ajustar)
  - Colocar o objeto (no caso, a rede) na posição vertical.
  - Colocar a lente de  $f = 20$  cm com a face plana para o objeto
  - Posicionar o objeto à distância apropriada da lente.
  - Posicionar o anteparo de modo a determinar o plano de Fourier



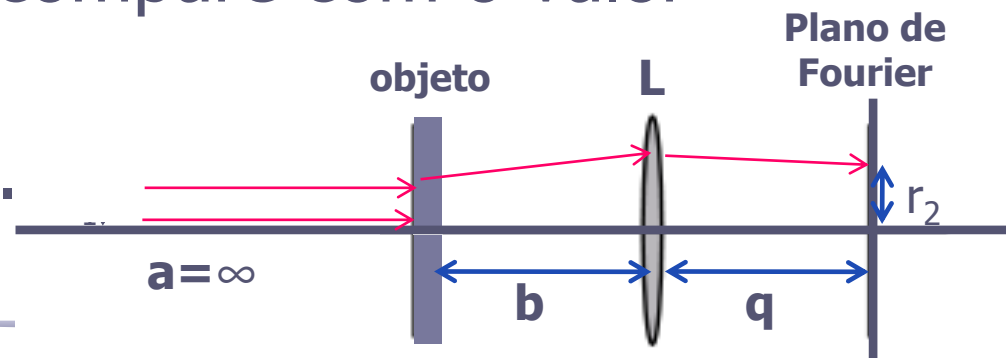


$r_2$

Transformada de Fourier

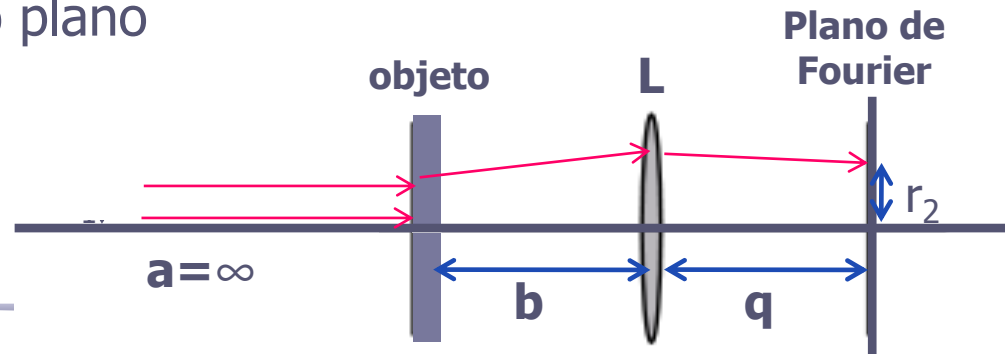
# Tarefa 2 – Para síntese

- Ilumine o objeto, com o feixe paralelo (fonte no  $\infty$ ):
  - Use a rede de difração de 300 linhas/mm como objeto
- Identifique o plano de Fourier  $q=f$
- Verifique que a posição do plano de Fourier não depende da posição do objeto em relação à lente
  - Faça pelo menos 3 medidas
- A partir das medidas das posições dos máximos ( $r_2$ ) da transformada de Fourier, determine as dimensões da grade e compare com o valor nominal de 300 l/mm
- Comente os resultados.



# Tarefas 3 - Relatório

- Crie uma fonte pontual, ajustando a divergência do feixe
- Coloque o objeto no foco da convergente, isto é,  $b=f$
- Determine a posição do plano de Fourier em função da posição da fonte pontual e compare com o previsto teoricamente
  - repita o procedimento para pelo menos 3 posições diferentes da fonte em relação ao objeto ( $a$ ) para comparar com a previsão teórica da posição do plano em relação à lente ( $q$ )
- Verifique que, se o objeto estiver no foco  $b=f$ , as posições dos máximos ( $r_2$ ) não variam: independem da posição da fonte em relação ao objeto ( $a$ ):
  - Desde que a figura esteja no plano de Fourier, ( $q$  vai variar)



# DICAS

1. Coloque o trilho em cima dos batoques, e depois não mexe mais nunca
2. Ajuste a altura do suporte do laser. Se for preciso, coloque um pouco de papel na frente ou atrás, até alinhar pelos 2 furos
3. Tire os furos da bancada
4. Coloque apenas a 1a lente. Verifique que o feixe ampliado no final do trilho está centralizado
5. Coloque a 2a lente e verifique se continua alinhado.
  1. Nestes dois passos, o ajuste é bem fino ( $\sim 1-3\text{mm}$ ). Não mexa no trilho, apenas no laser!