

# Física Experimental IV

Notas de aula: [www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

LabFlex: [www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

Profa. Eloisa Szanto  
[eloisa@dfn.if.usp.br](mailto:eloisa@dfn.if.usp.br)  
Ramal: 7111  
Pelletron

Prof. Henrique Barbosa  
[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)  
Ramal: 6647  
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin  
[nelson.carlin@dfn.if.usp.br](mailto:nelson.carlin@dfn.if.usp.br)  
Ramal: 6820  
Pelletron

Prof. Paulo Artaxo  
[artaxo@if.usp.br](mailto:artaxo@if.usp.br)  
Ramal: 7016  
Basílio, sala 101

## Aula 4, Experiência 1 Circuitos CA e Caos

# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC
  - Circuito integrador e análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

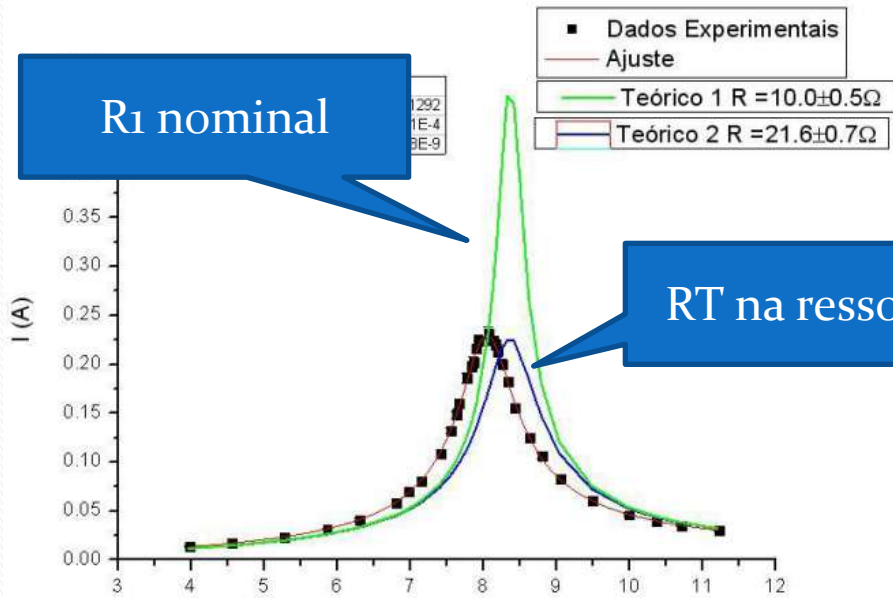
# TAREFAS SEMANA PASSADA



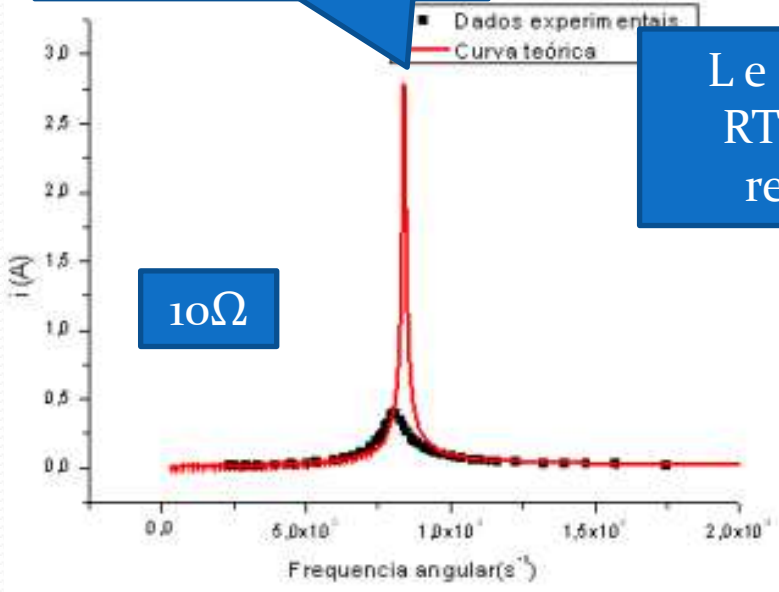
# Tarefas 1 – para Síntese

- Medir a curva de ressonância ( $i \times \omega$ ) com  $R=10 \Omega$ ,  $C=0.47\mu\text{F}$ ,  $L=$  bobina de 1000 espiras
  - **Não altere a força eletromotriz do gerador durante as medidas (e verifique que ela se mantém constante!).**
- Faça o gráfico para a curva de corrente ( $i \times \omega$ )
  - Colocar também curvas teórica e ajustada
- A partir do ajuste, determine o valor experimental da frequência de ressonância e compare com o valor previsto
- A partir do ajuste, determine  $R$ ,  $L$  e  $C$  e compare com os valores nominais.
  - Há discrepâncias? Explique porque.

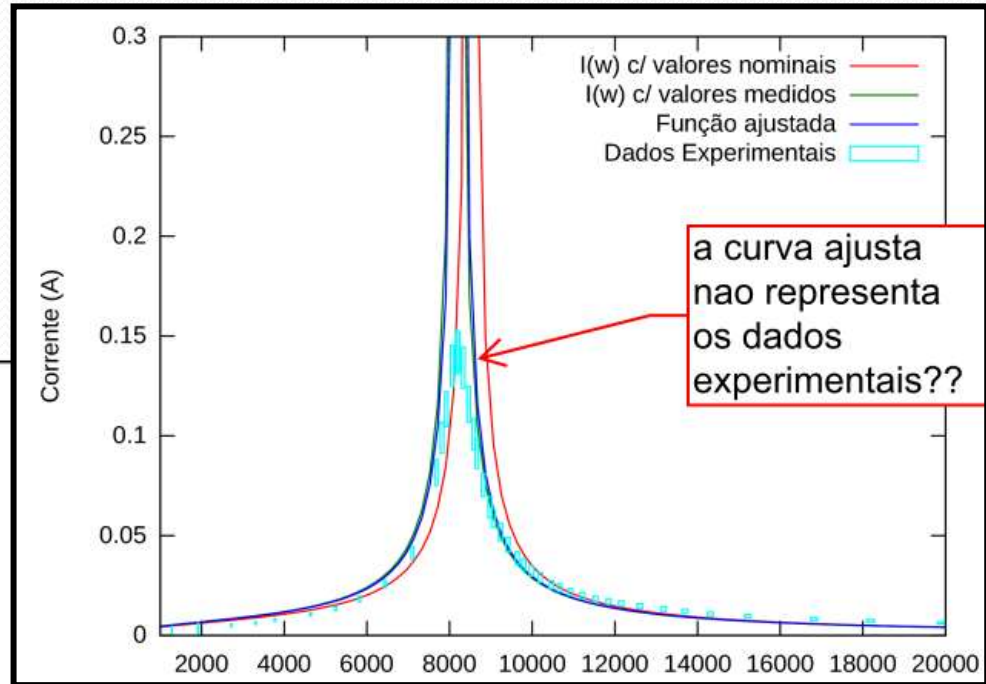
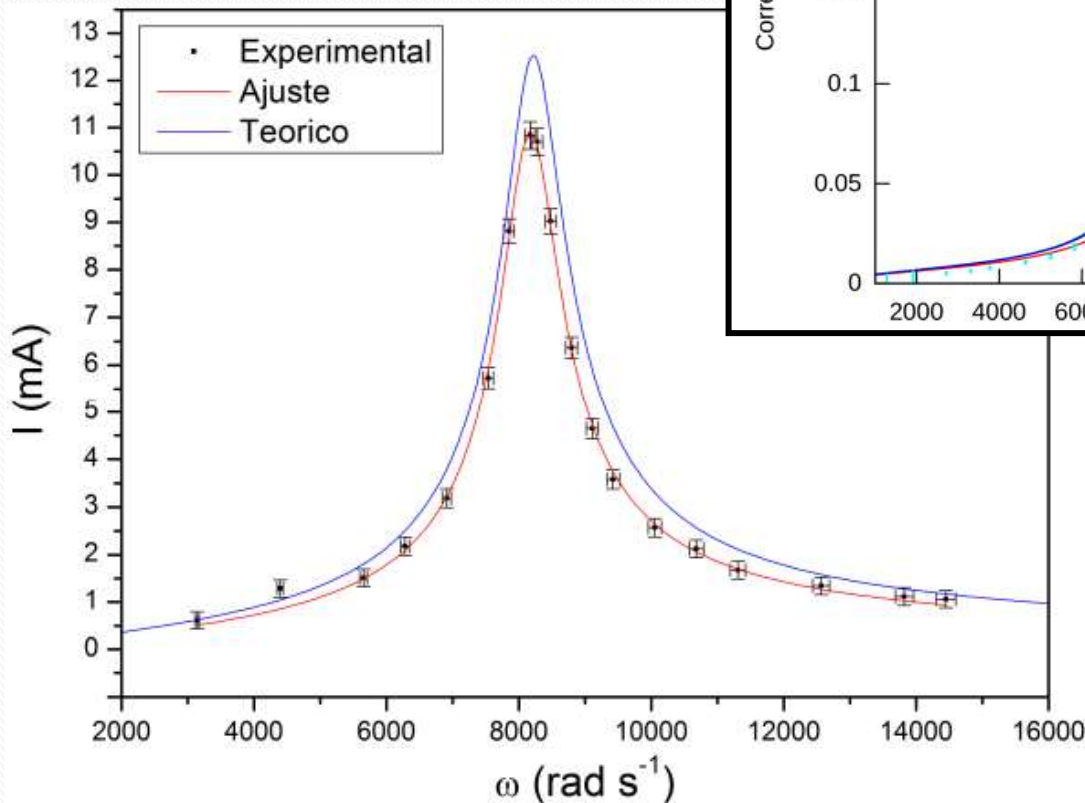
# Ressonancia em Corrente



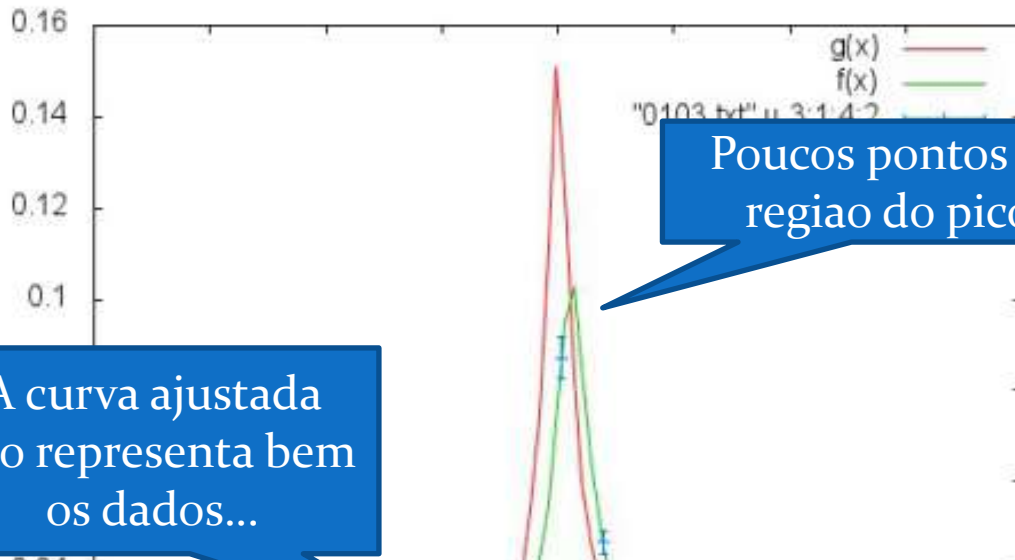
$R_1, L$  e  $C$  nominais



# Ressonancia em Corrente



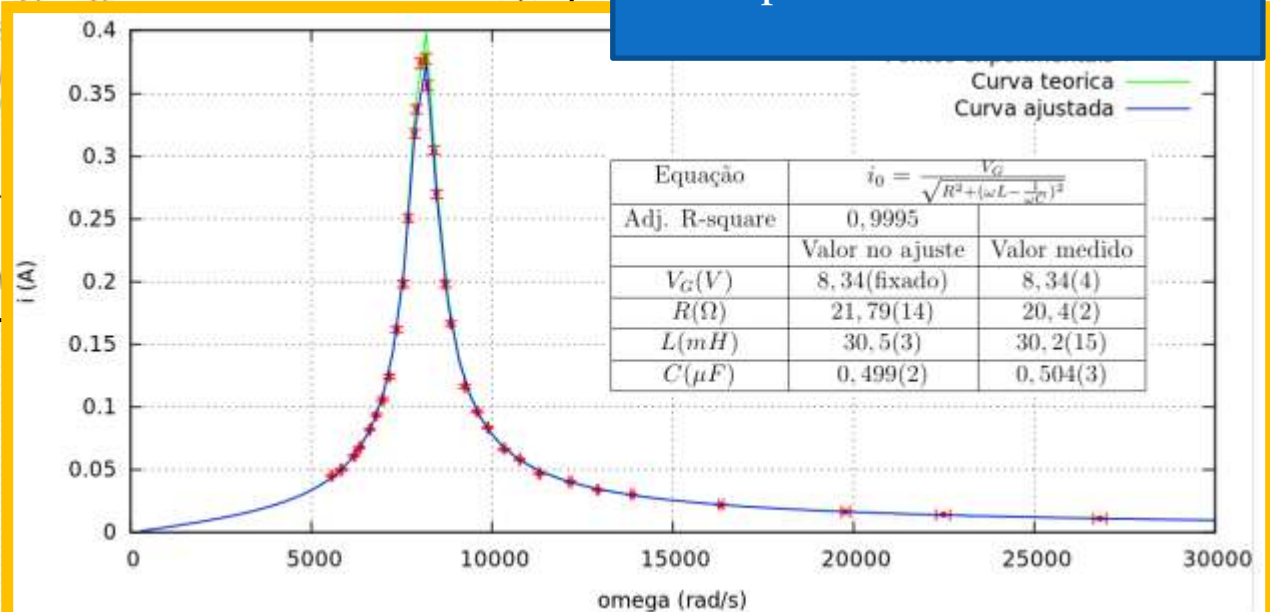
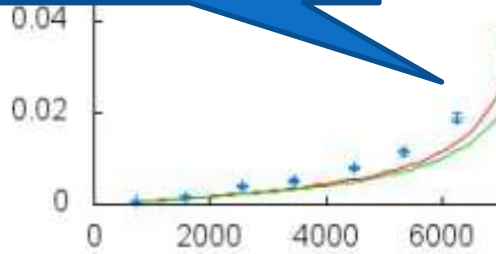
# Alguns problemas



Poucos pontos na região do pico

A curva ajustada não representa bem os dados...

Dependendo de quais parâmetros foram ajustados o resultado pode não representar os dados!

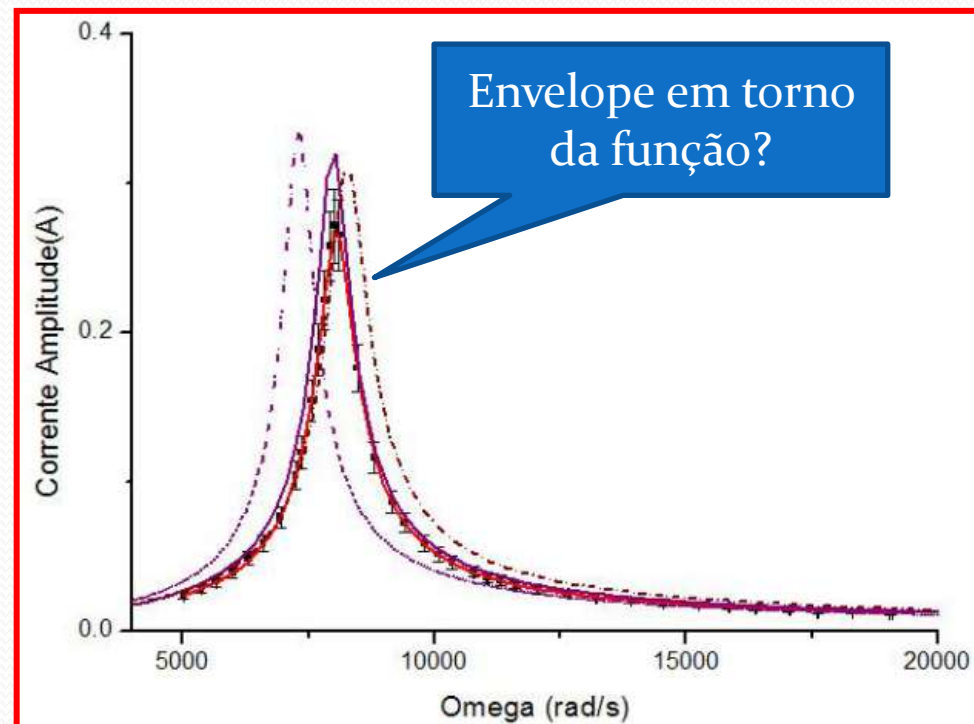


# Alguns problemas

medidos, assim como da resistência do indutor. A incerteza para os valores teóricos foram obtidas da seguinte maneira: a maior curva deve somar a incerteza em  $V_g$  e subtrair em  $R$ , já para  $L$  e  $C$ , que se relacionam como um binômio com o termo do meio negativo, fizemos

testes, e obtivemos: 
$$i_{0\pm} = \frac{(V_g \pm \sigma_{V_g})}{\sqrt{(R \mp \sigma_r)^2 + \left(\omega(L \pm \sigma_L - \frac{1}{\omega(C \mp \sigma_C)})\right)^2}}$$

Discutimos em sala que no caso de funções não lineares fica complicado estimar a incerteza na curva teórica simplesmente somando as incertezas nos parâmetros!





# Monte Carlo no Excel

1. Parâmetros e incertezas

2. Valores sorteados para os parâmetros

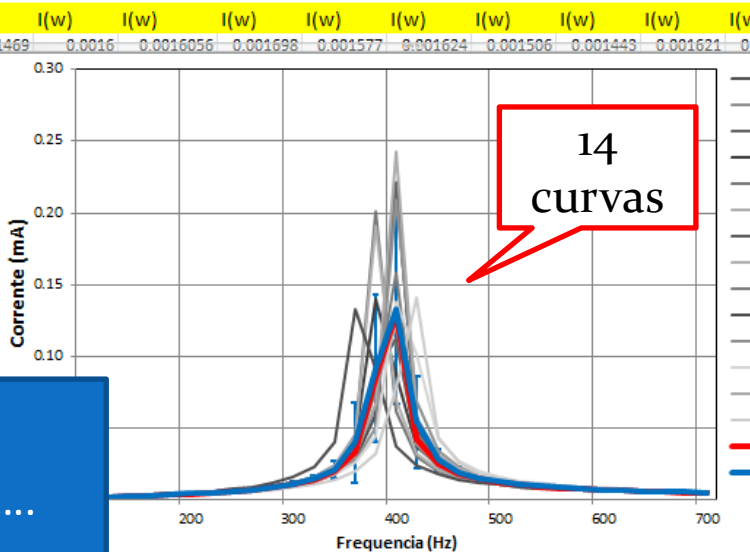
14 sorteios

Teórico

freq (hz) (rad/s)	Teórico	Médio	Desvio	I(w)
100	1.58E-03	0.0016	0.000121	0.001469
120	1.95E-03	0.001981	0.000152	0.001698
140	2.37E-03	0.002401	0.000188	0.001957
160	2.83E-03	0.002872	0.000231	0.002244
180	3.37E-03	0.003412	0.000284	0.002559
200	3.99E-03	0.004044	0.000351	0.002904
220	4.74E-03	0.004803	0.000442	0.003280
240	5.66E-03	0.005742	0.000569	0.003688
260	6.84E-03	0.006946	0.000758	0.004129
280	8.42E-03	0.008561	0.001064	0.004604
300	1.07E-02	0.010866	0.001615	0.005115
320	0.0141E-02	0.014475	0.002784	0.005672
340	0.0213E-02	0.0211	0.006123	0.006277
360	0.0333E-02	0.039684	0.027682	0.006931
380	0.0484E-02	0.091532	0.051369	0.007644
400	2513			0.008426
420	2890			0.009276
440	3016			0.010191
460	2890			0.011161
480	3016			0.012186
500	3142			0.013266
520	3267			0.014401
540	3393			0.015591
560	3519	0.008186	0.000836	0.006804
580	3644	0.007409	0.000715	0.007206
600	3770	0.006779	0.000626	0.006606

4. ...cada frequência...

Corrente calculada com os valores sorteados



14 curvas

3. Para cada sorteio, aplica a formula teorica com  $R^*$ ,  $L^*$ ,  $C^*$ ,  $V_g^*$  ....

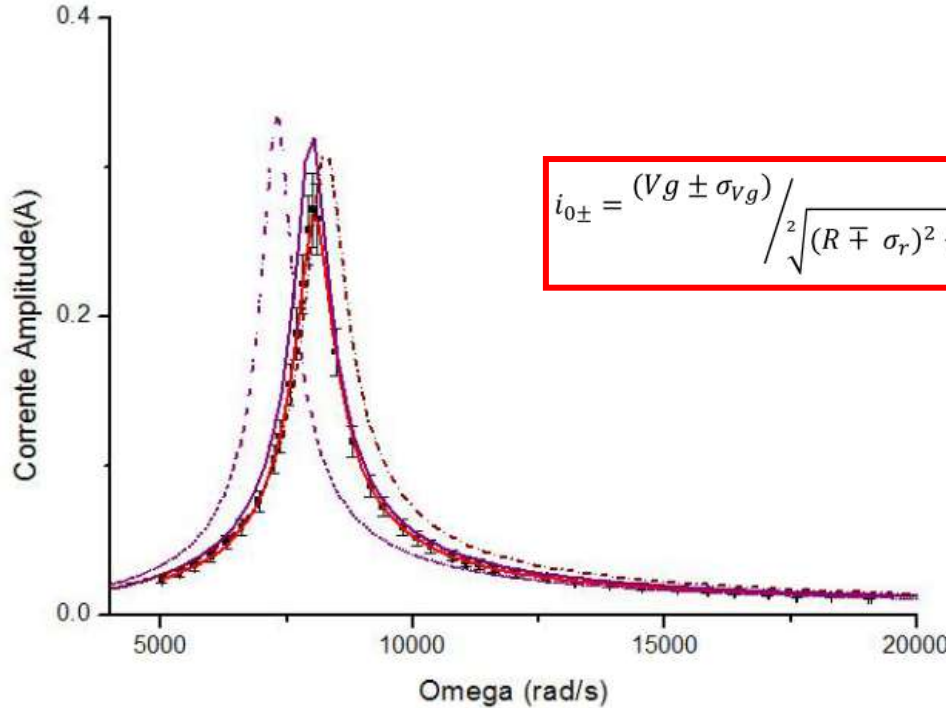
Microsoft Excel interface showing the Monte Carlo simulation setup. The spreadsheet contains theoretical values and 14 sampled parameter sets. A graph displays the resulting current vs. frequency curves. Callouts explain the steps: 1. Parameters and uncertainties, 2. Randomly selected values for parameters, 3. Applying the theoretical formula for each sample, and 4. Frequency for each curve.



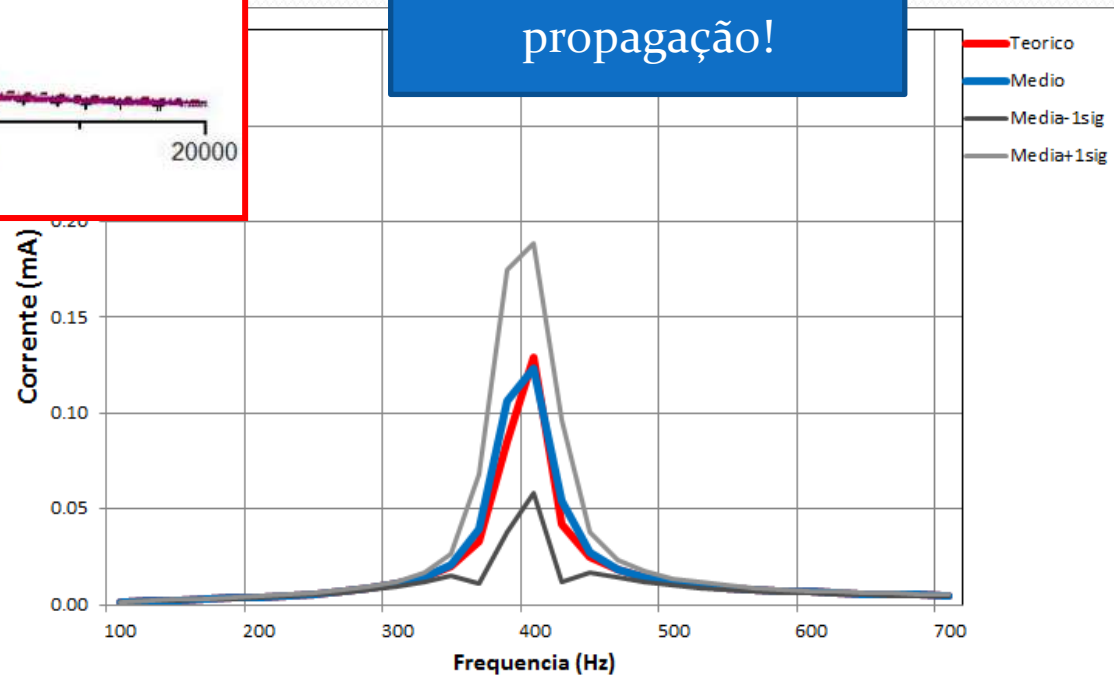
# MC versus +-sigmas

Incorreto para  
estimar a variacao  
de  $i_0(\omega)$  em cada  $\omega$

$$i_{0\pm} = \frac{(Vg \pm \sigma_{Vg})}{\sqrt{(R \mp \sigma_r)^2 + (\omega(L \pm \sigma_L - \frac{1}{\omega(C \mp \sigma_C)})^2}}$$



Usar monte-Carlo ou  
propagação!



# Parâmetros do Circuito

	R1 ( $\Omega$ ) Nom	R1 ( $\Omega$ ) Multi	R1 ( $\Omega$ ) Outros
H1	10.0 (5)	X	X
H2	10.0 (5)	12.0 (6)	X
H3	10.0 (5)	10.9 (6)	X
H4	10.0 (5)	11.0 (19)	X
H5	10.0 (5)	11.5 (1)	X
H6	10.0 (5)	9.60 (18)	X
H7	10.0 (5)	14.3 (2)	X
H8	10.0 (5)	X	X
H9	10.0 (5)	10.2 (8)	X

Era preciso **uma boa medida** da resistência **R1** pois desta é que se vai tirar a **corrente** no circuito!

Apesar da média da turma ser compatível com o valor nominal, cada resistor em si pode ser bem diferente!

Multi= 11.4 (1.5)  $z=0.85$

# Parâmetros do Circuito

	C ( $\mu\text{F}$ ) Nom	C ( $\mu\text{F}$ ) Multi	C ( $\mu\text{F}$ ) Exp
H1	0.47 (5)	X	0.50 (1)
H2	0.47 (5)	0.511 (20)	0.505 (25)
H3	0.47 (5)	0.516 (33)	0.49 (3)
H4	0.47 (5)	0.513 (33)	0.499 (104)
H5	0.47 (5)	0.504 (3)	0.499 (2)
H6	0.47 (5)	0.51 (3)	0.51 (8)
H7	0.47 (5)	0.51 (7)	0.41 (5)
H8	0.47 (5)	X	0.527 (22)
H9	0.47 (5)	0.504 (13)	0.48 (13)

Para uma boa estimativa do  $\omega_0$  teórico era preciso medir a capacitância, mas os resultados da turma mostram que o valor nominal não é ruim.

Multi= 0.510 (4)  $z=0.79$   
Exp= 0.491 (33)  $z=0.35$

# Parâmetros do Circuito

	L (mH) Nom	L (mH) Multi	L (mH) Exp	RL ( $\Omega$ ) Nom	RL ( $\Omega$ ) Multi
H1	X	X	30.3 (3)	7.7 (4)	X
H2	29.3 (14)	X	X	X	X
H3	30.3 (28)	X	31 (4)	X	X
H4	29.5 (1)	30.5 (38)	30.95 (65)	7.7 (4)	8.80 (20)
H5	X	30.2 (15)	30.5 (3)	X	8.9 (1)
H6	X	30.3 (15)	30.5 (2)	X	X
H7	29.6 (27)	X	36.8 (6)	9.9 (2)	X
H8	30.3 (15)	X	29.30 (12)	7.8 (4)	X
H9	X	30 (3)	30 (8)	X	8.20 (7)

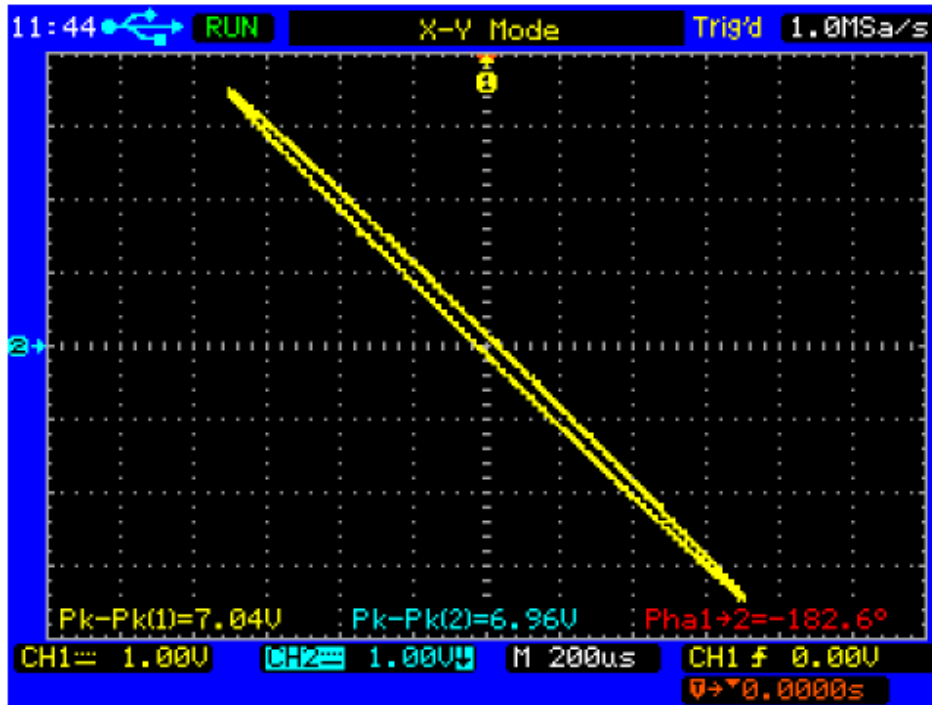
Valores nominal do indutor  
estão razoáveis

Poucos grupos anotaram o valor nominal e  
mediram a resistência com o multímetro!  
Já discutimos isso em aula, não?

# Tarefas 2 – para Relatório

- Meça  $V_C \times t$  e  $V_L \times t$  para a frequência de ressonância
  - Faça um gráfico de  $V_C \times V_L$  na frequência de ressonância (modo XY do osciloscópio)
  - O que você esperaria obter caso os seus componentes fossem ideais?
  - O indutor é ideal? Você pode fazer um modelo simples para o indutor caso ele não seja ideal?
  - Da análise desse gráfico, obtenha os parâmetros físicos (valores e incertezas) das grandezas usadas no seu modelo.
- Ainda na ressonância, verifique a diferença de fase entre  $V_C$  e  $V_L$ .
  - O que era esperado? A diferença pode ser explicado pelo seu modelo não-ideal?

# Diagrama de fase



Também foi medido  $V_C \times t$  e  $V_L \times t$  para a frequência de ressonância. Foi feito um gráfico  $V_C$  vs.  $V_L$ , que permitiu observar que os elementos do circuitos não eram ideais, já que, se fossem, a figura formada seria uma reta e não uma elipse.

Também foi medida a diferença de fase durante a ressonância, e o valor obtido foi de  $2.3(5)^\circ$ , o que é esperado, já que a diferença de fase só deveria ser  $0^\circ$  se todos elementos fossem ideais.



# Teoria

Imaginando um indutor não ideal como uma associação em série de um indutor ideal com uma resistência, tem-se que a impedância no indutor não ideal é dada por

$$Z_L = R_L + i\omega L = \left( \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right) e^{i\varphi} \quad \text{ok}$$

onde  $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_L}\right)$ . A tensão no indutor não ideal fica sendo

$$\hat{V}_L = \left( \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right) e^{i(\omega t + \varphi)} \quad \text{ok}$$

Como a tensão no capacitor é

$$\hat{V}_C = \frac{1}{\omega C} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

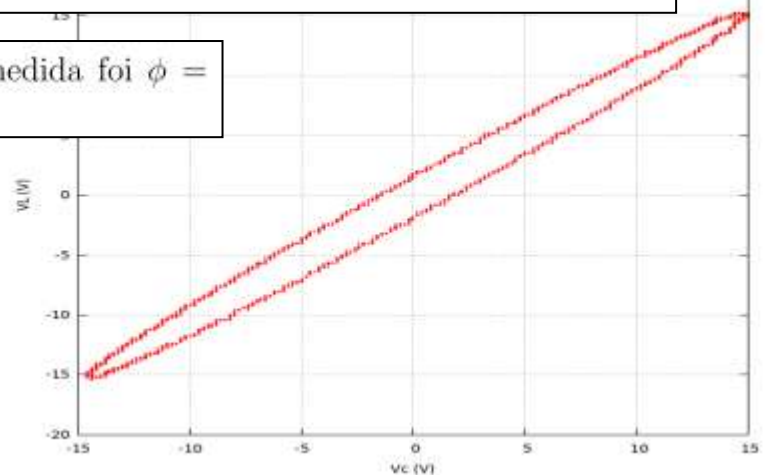
obtemos que a diferença de fase entre o indutor e o capacitor é

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

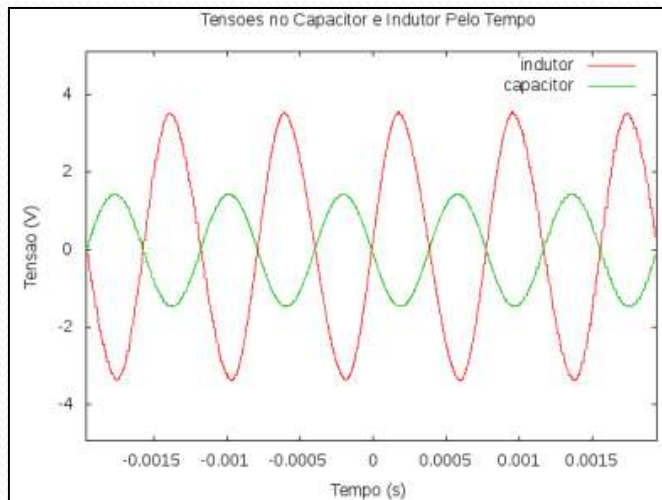
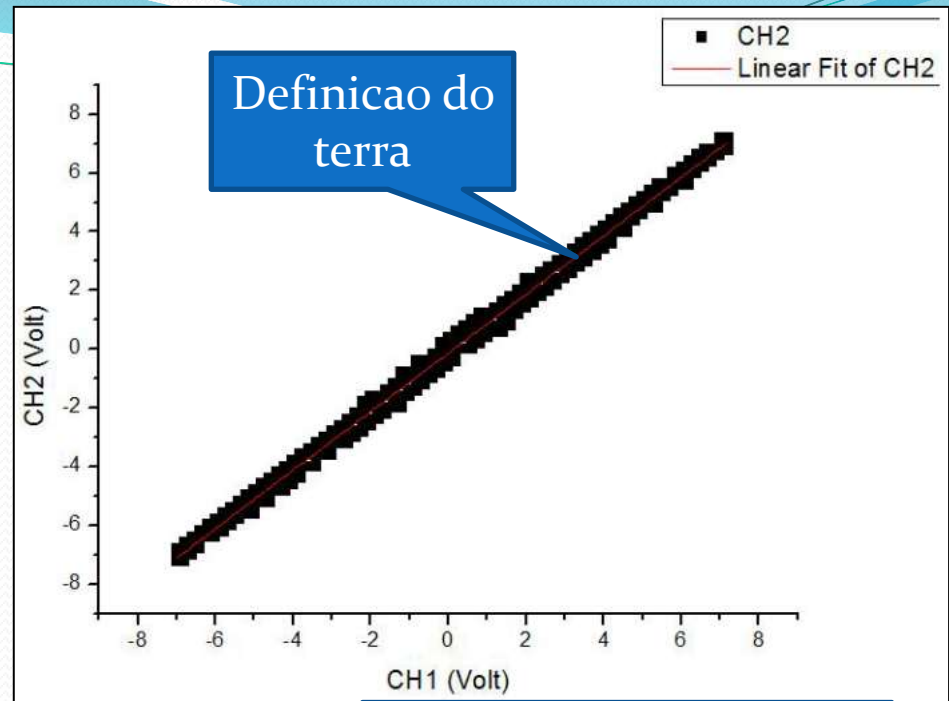
Usando os valores medidos  $\omega_0 = 8105(30) \text{ rad/s}$ ,  $L_{med} = 30,2(15) \text{ mH}$  e  $R_L = 8,9(1) \Omega$ , obtemos  $\delta = 3,1(1) \text{ rad} = 177,90^\circ(6)$ . Resultado que é compatível com o valor medido no osciloscópio.

Corrigindo a inversão do sinal do osciloscópio, a diferença de fase medida foi  $\phi = 2,96(3) \text{ rad} = 169,7^\circ(1,7)$ . Isto se deve à resistência do indutor.

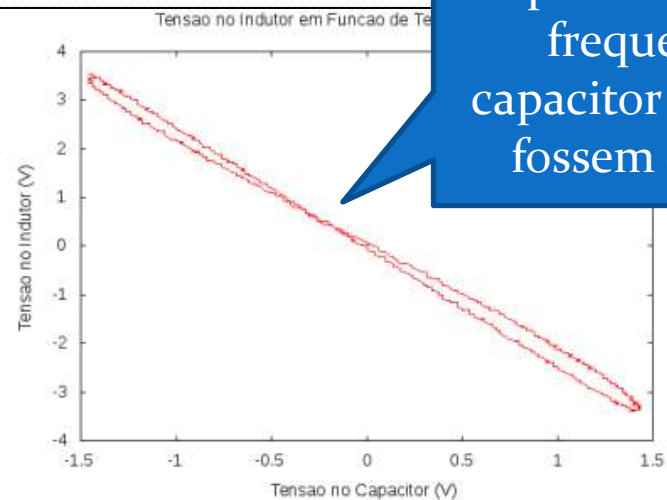
Como calcular a componente não idela, ou seja, a resistência do indutor?



# Problemas



(a) gráfico das tensões pelo tempo



(b) gráfico de  $V_L$  em função de  $V_C$

Só poderia cruzar se as frequencias no capacitor e no indutor fossem diferentes!

# Tarefas 3 – EXTRAS

- Na análise de  $V_L \times V_C$  na ressonância você se questionou apenas se o indutor não seria ideal.
  - E o capacitor é ideal? Você se questionou a respeito?
  - Você tem evidências experimentais de que o capacitor é próximo ao ideal? Quais (quantitativo)?
- Estime o valor da resistência interna do gerador a partir das medidas, ajustes e modelos não-ideias
  - Discuta a incerteza nesta medida, já que ela será obtida como um resíduo. Como você poderia diminuir esta incerteza?

# Parâmetros do Circuito

	R1 ( $\Omega$ )	RL ( $\Omega$ )	RT ( $\Omega$ ) Resson.	RT ( $\Omega$ ) Ajuste	Rg ( $\Omega$ )
H1	10.0 (5)	7.7 (4)	22.2 (10)	–	4.5 (2)
H2	12.0 (6)	X	–	24.7 (20)	–
H3	10.9 (6)	X	–	15.9 (15)	–
H4	11.0 (19)	8.80 (20)	–	21.8 (46)	2.0 (5)
H5	11.5 (1)	8.9 (1)	–	21.79 (14)	1.39 (35)
H6	9.60 (18)	X	–	21.8 (36)	3.0 (5)
H7	14.3 (2)	9.9 (2)	–	31.2 (9)	–
H8	10.0 (5)	7.8 (4)	21.6 (7)	21.26 (11)	3.8 (9)
H9	10.20 (8)	8.20 (7)	–	22 (6)	–

Tinham os dados  
mas não  
calcularam

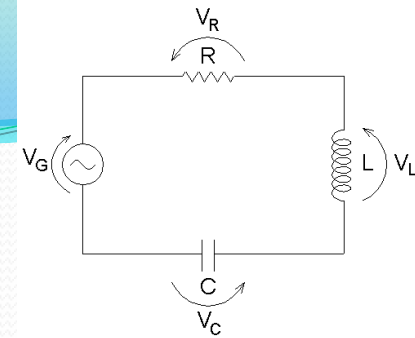
Era fácil e poucos  
fizeram!



# Revisão para o relatório

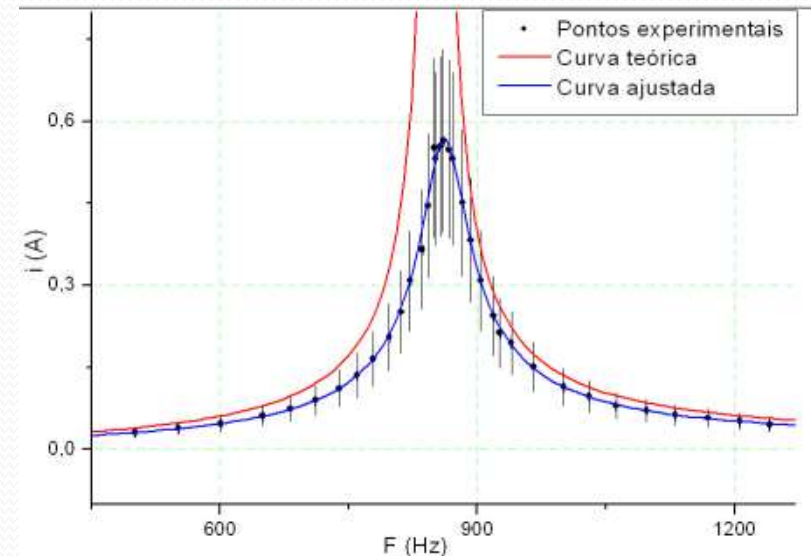
## 1. Resistência Total

# Revendo tudo



- Os dados não batem com a teoria, mas é possível ajustar uma curva, como a teórica, aos dados!
- Voltando a teoria. Qual a expressão para a corrente?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



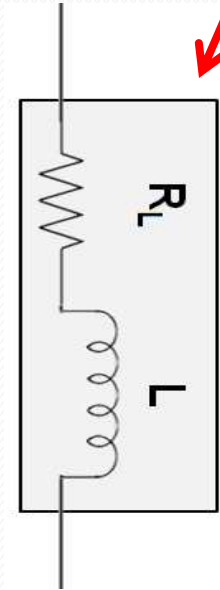
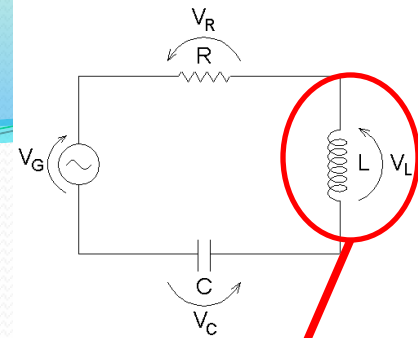
# Reverendo tudo

- O indutor é ideal?
  - Não! A bobina é, na verdade um fio enrolado e tem resistêcia não nula
- Na equação  $R$  é a resistêcia total

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$R_T = R + R_L + \dots$$

- Existem outras resistêcias no sistema?
- E a indutância? Será que o valor nominal é confiável?



Mudaria a amplitude do máximo

Mudaria a posição do máximo

# Como determinar $R_{\text{total}}$ ?

- Na condição de ressonância de corrente,  $\omega = \omega_0$  e:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow R$$

$$\text{tg } \phi_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \frac{1}{R} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Se  $\Phi_0 = 0$ , corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo

- Portanto:

$$V_{G0} = R i_0$$

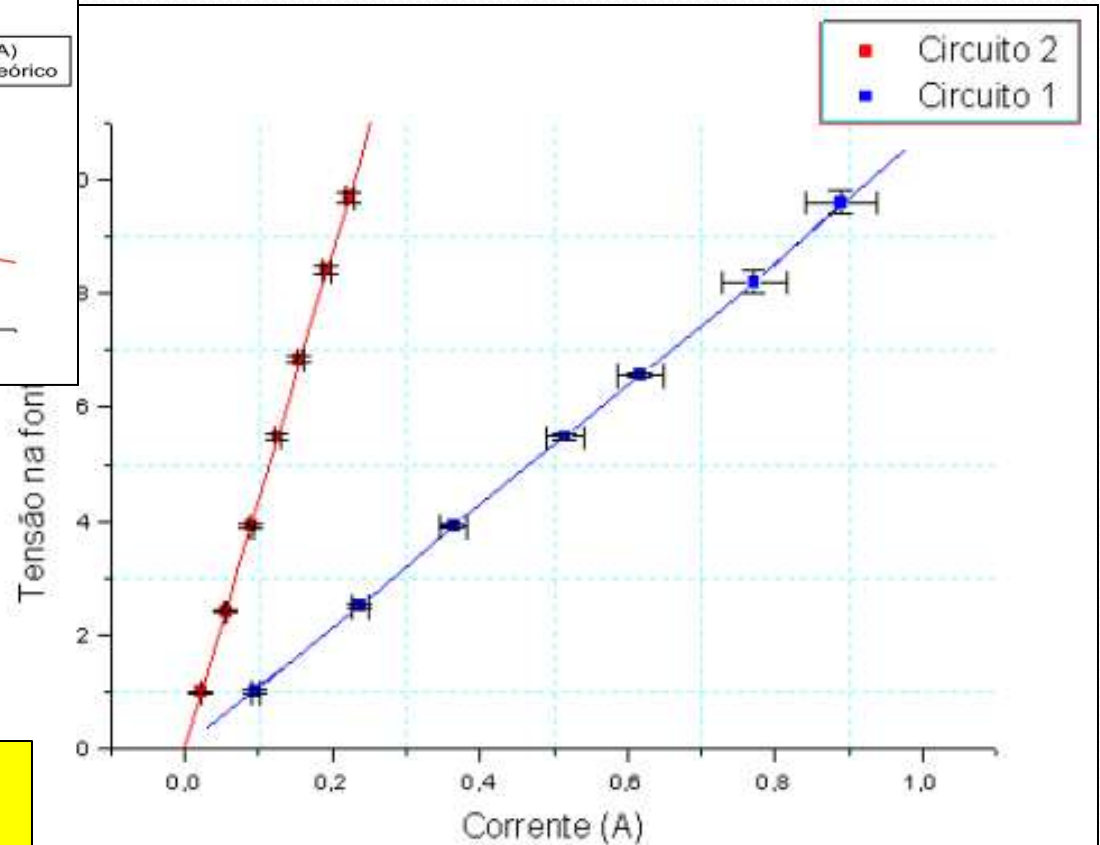
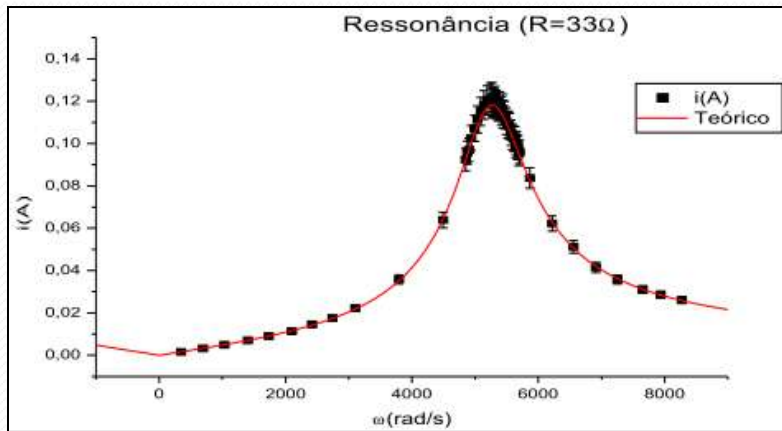
$V_{G0}$  é a tensão de pico aplicada pelo gerador e  $i_0$  é a corrente de pico no circuito

- Ou seja, se medir  $V_{G0}$  e  $i_0$  na ressonância você descobre qual é a resistência total,  $\mathbf{R}$ , do circuito



# Como determinar $R_{\text{total}}$ ?

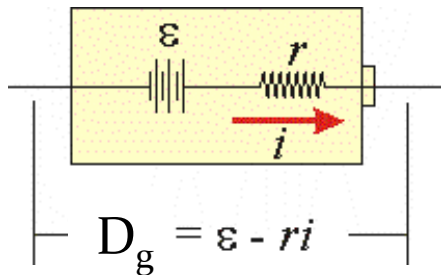
- O problema é que confiaríamos apenas em uma medida... Melhor ajustar uma reta:



Resultado de outro ano, desta vez ninguém fez assim.

# Reverendo a tensão do Gerador

- Como medir  $V_G$ ?
  - **Não confundir a tensão produzida pelo gerador com a ddp entre seus terminais ( $D_g$ )!**



O gerador não é ideal e tem uma resistência interna (lab3)

- Na nossa teoria, o que chamamos de  $V_G$  é na verdade  $\epsilon$ !
  - **$\epsilon$  devia ficar fixo, mas  $D_g$  não, pois a corrente varia.**
  - Para determinar  $\epsilon$  era preciso medir com o circuito “em aberto”, ou seja com a corrente nula.
  - Isso podia ser feito com um multímetro (valor RMS) ou com o osciloscópio, **mas não podia estar passando corrente pelo RLC.**

# Reverendo as medidas de $R_T$

- A resistência podia ser calculada dividindo  $D_G$  pela corrente na ressonância:

$$R_T = \frac{D_G^{ress}}{i^{ress}}$$

- Mas notem que, em um **circuito não ideal**, o que temos é:

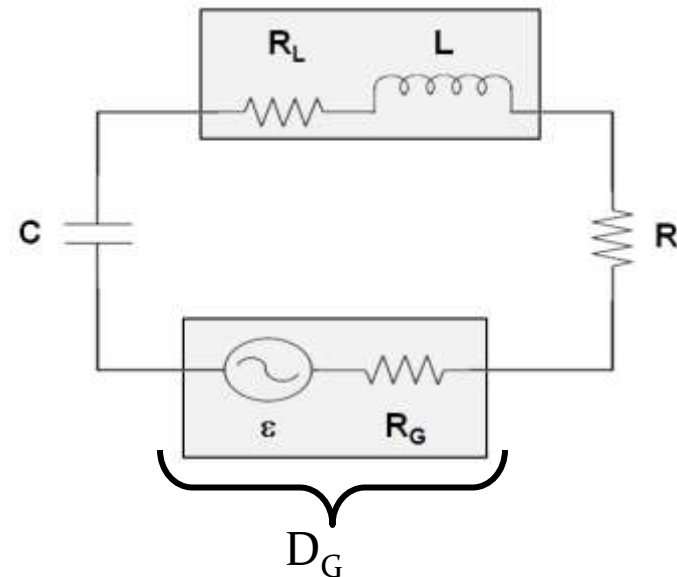
$$R + R_L = \frac{D_G^{ress}}{i^{ress}}$$

Quem usou valores de  $D_G$ , mediu  $R+R_L$

$$D_G^{ress} = \varepsilon - iR_G^{ress}$$

$$R + R_L + R_G = \frac{\varepsilon}{i^{ress}}$$

Era preciso ter medido  $\varepsilon$  para ter  $R_T$ .

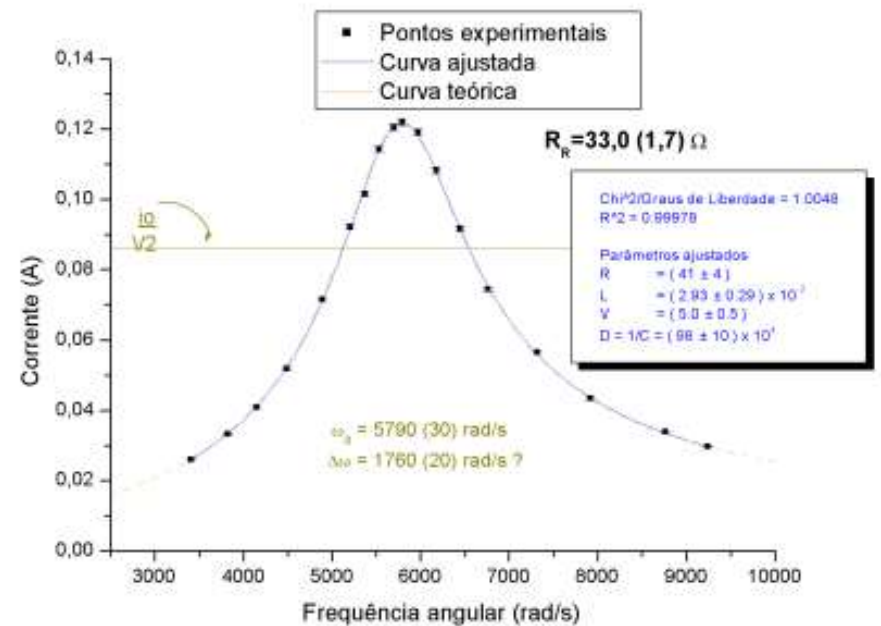
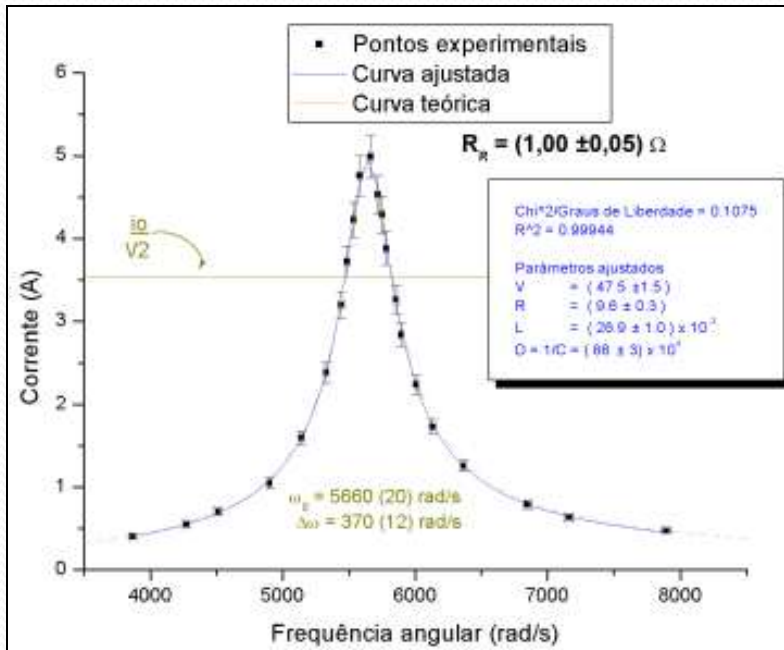


# Como determinar $R_{total}$ ?

- Outra maneira, ajustando a curva teórica aos dados experimentais (mínimos quadrados):

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

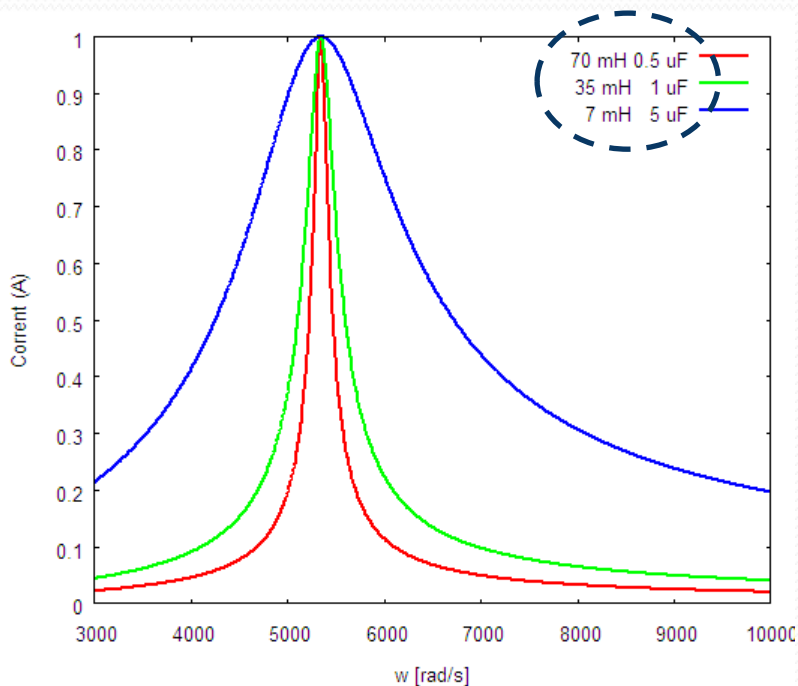
Podemos ajustar todos os parâmetros ao mesmo tempo?



# Ajuste dos parâmetros

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Posição e largura do máximo



Posição

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Largura

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \stackrel{\text{definicao}}{\equiv} \frac{V_G}{\sqrt{2}R}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\mp RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$

Diferença entre as 2 raízes positivas

# Ajuste dos parâmetros

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

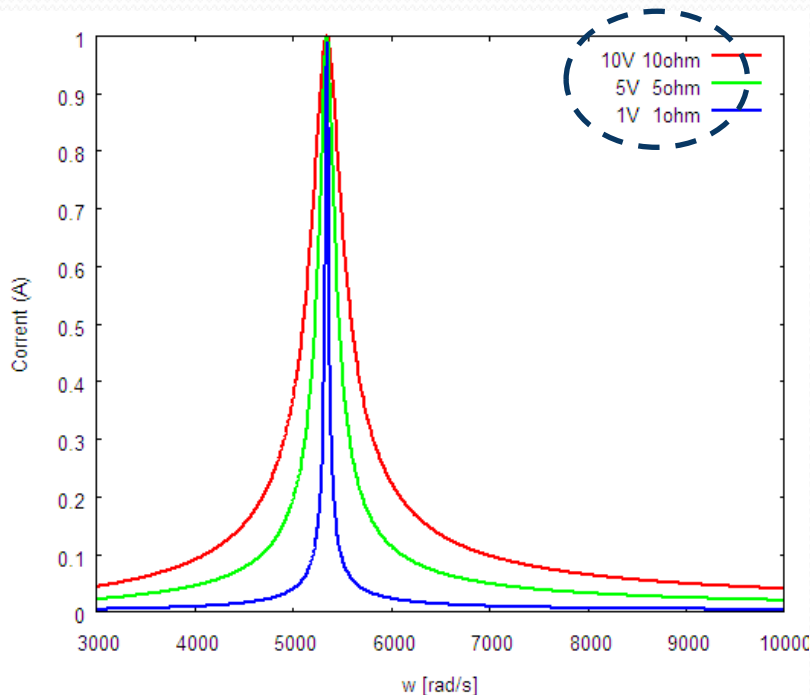
Amplitude e largura do máximo

Amplitude

$$i_0(\omega_0) = \frac{V_G}{R}$$

Largura

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} LC \Rightarrow \text{posição} \\ V_G / R \Rightarrow \text{amplitude} \\ R / L \Rightarrow \text{largura} \end{array} \right.$$

Apenas 3 “variáveis” independentes!

# Ajustando $R_T$ e $\omega_0$

- Apenas R, L fixo em 35(3)mH:

- $R=12.10(50)$  Ohm [grupo]

- $R=11.86$  Ohm  $\pm 2.25\%$  com  $X^2_{red}=337.0$

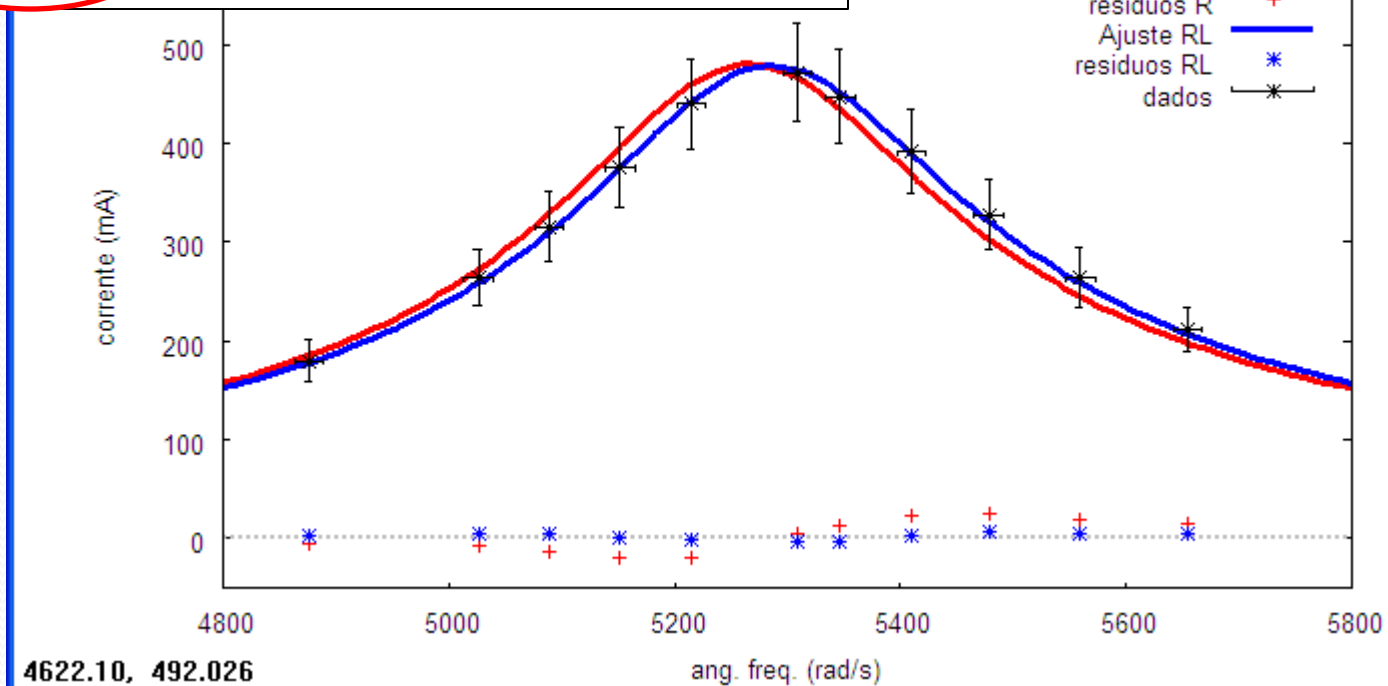
- R e L ao mesmo tempo

- $R=11.90$  Ohm  $+ 0.6\%$  com  $X^2_{red}=23.3$

- $L=34.74 \pm 0.07\%$  mH

Melhor precisão medindo pela ressonância!

Melhor ajuste





Revisão para o relatório

2. Diagrama de fase



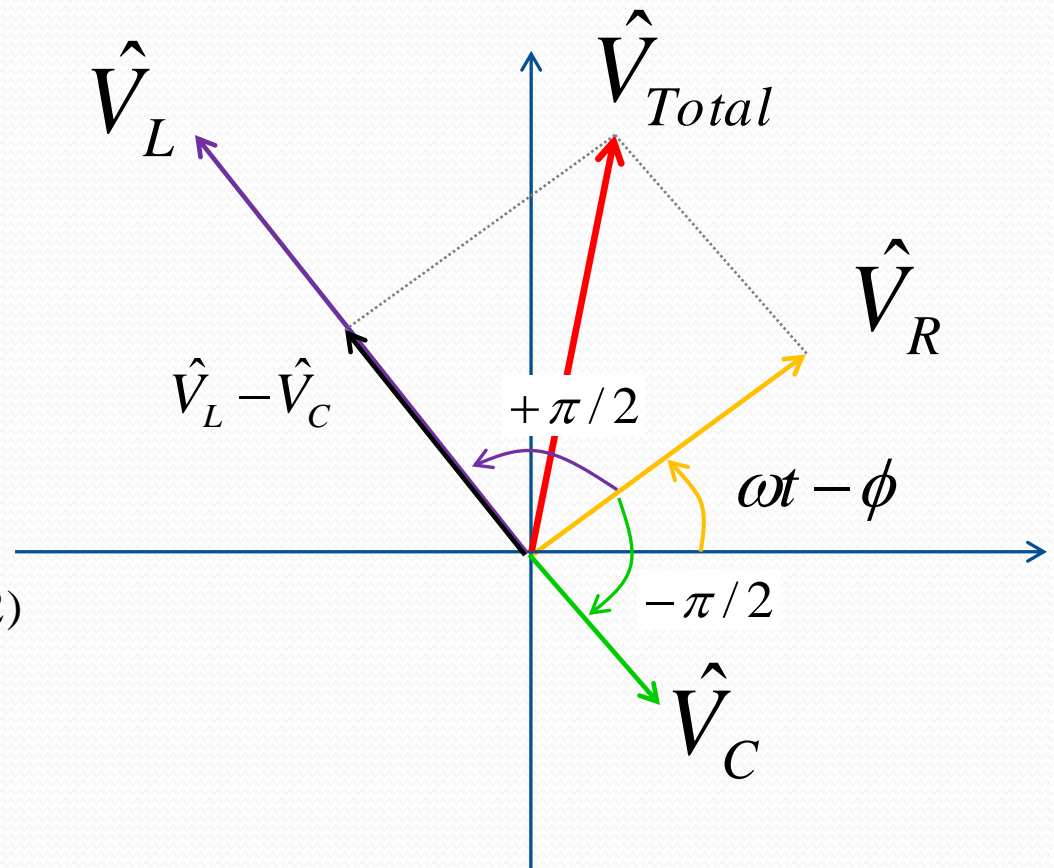
# Diferença entre $V_L$ e $V_C$

- Na ressonância,  $V_L = V_C$  e  $V_{\text{tot}} = V_R$
- Mas e se o indutor não for ideal ??

$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

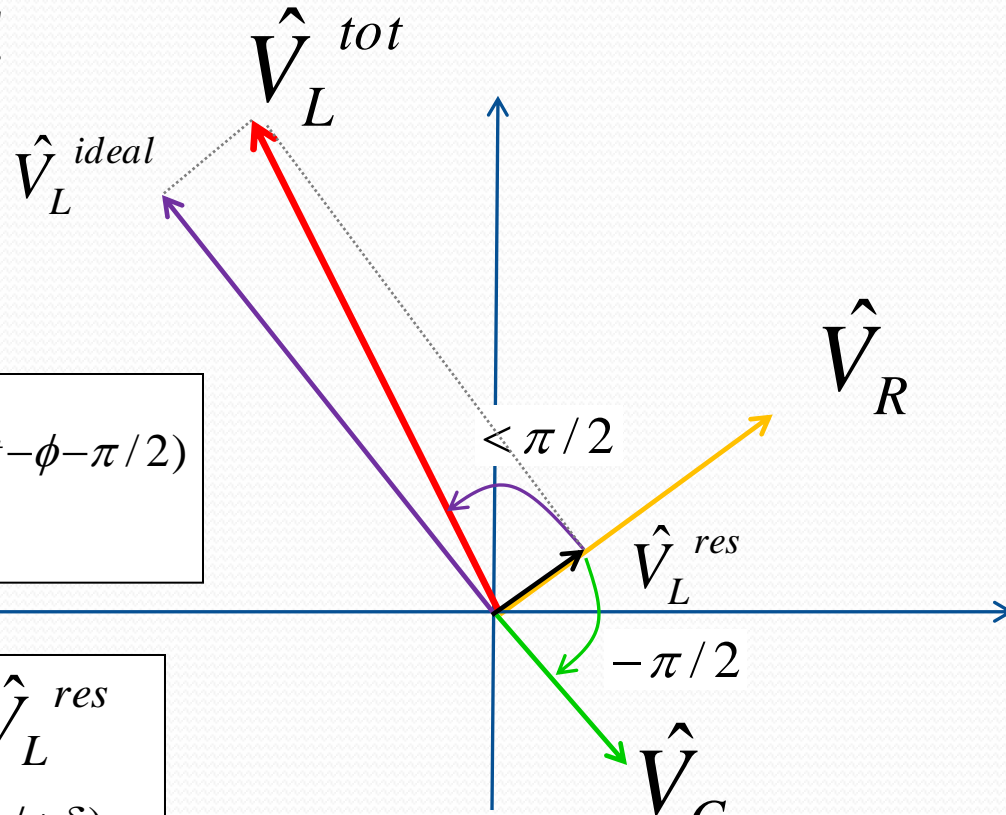
$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$



# Diferença entre $V_L$ e $V_C$

- Nesse caso, a tensão no indutor tem duas componentes!



$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_L(t) &= \hat{V}_L^{ideal} + \hat{V}_L^{res} \\ &= V_L^{tot} e^{j(\omega t - \phi + \delta)}, \end{aligned}$$

onde  $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R_L}\right)$

$$\phi_{C-L} = \delta + \frac{\pi^{lab}}{2} \approx \pi - 4^\circ$$

$$V_L^{real} = i_0 \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} > V_L^{ideal}$$

# Diagrama de fase do RLC

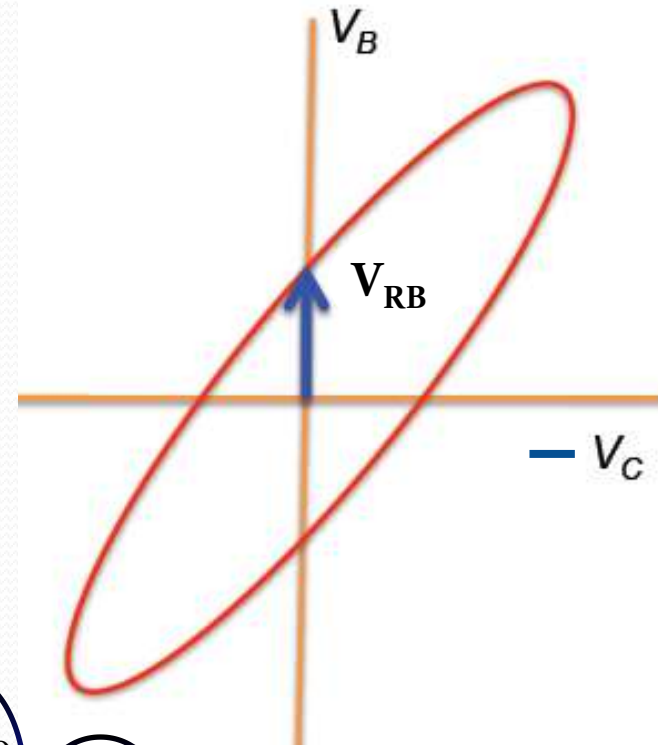
- Na condição de ressonância:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad V_L = -V_C$$

- Observando  $V_B$  contra  $V_C$ :
  - quando  $V_C=0$ , obrigatoriamente  $V_L=0$  (estamos falando de valores instantâneos e não de valores médios),
  - portanto a tensão no eixo  $V_B$  é a tensão sobre a resistência da bobina,  $V_{RB}$ .

$$V_{RB} = R_B i_0 = R_B \left( \frac{V_{R0}}{R_0} \right) i_0$$

Figura de Lissajous  
(RLC):  $V_B \times V_C$



# Resumo dos pontos críticos

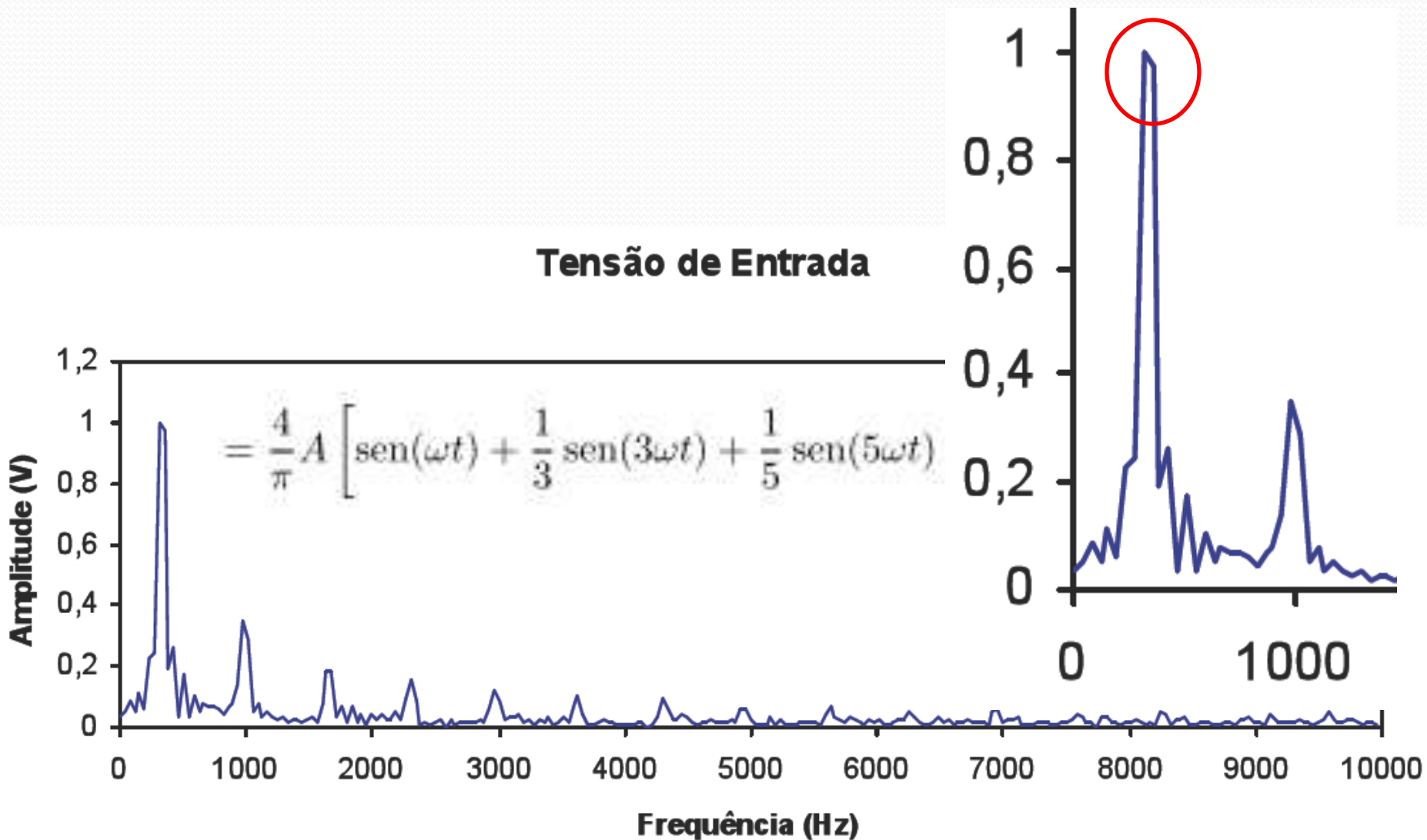
- A resistência total é  $R + R_L + R_G$
- $\varepsilon_{\text{gerador}}$  tem que ser medido com o circuito aberto.  
Caso contrário mede-se  $DDP_G$ .
- $\varepsilon_{\text{gerador}}$  devia ser fixo e não  $DDP_G$ .
- $R_L$  nominal é confiável? Alguém mediu com o multímetro?
- Será que o indutor tem capacitância parasita entre as voltas do enrolamento?
- A diferença de fase devia ser ligeiramente menor do  $\pi$ , e  $V_L$  ligeiramente maior que  $V_C$



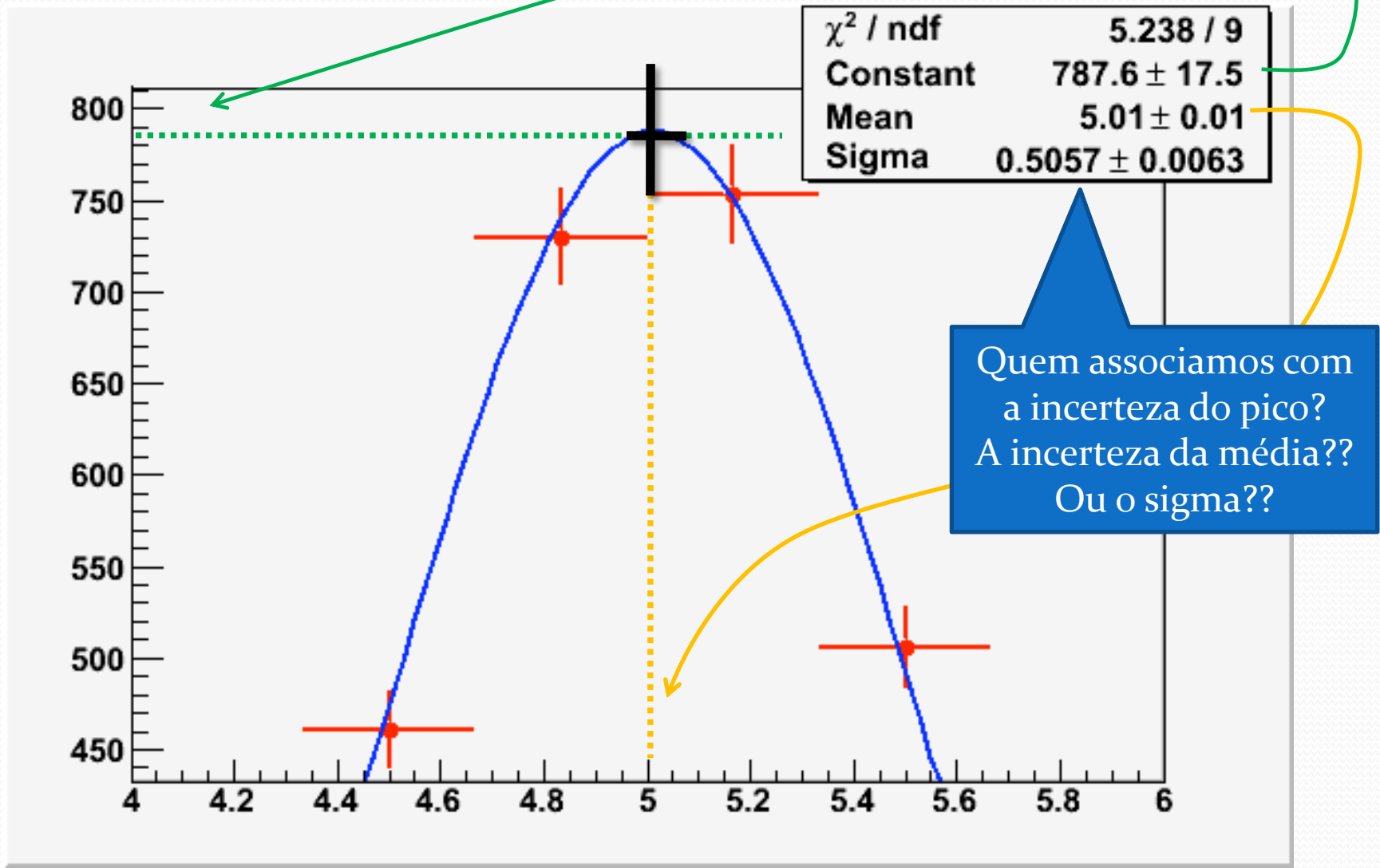
# Reviendo:

## 3. FFT

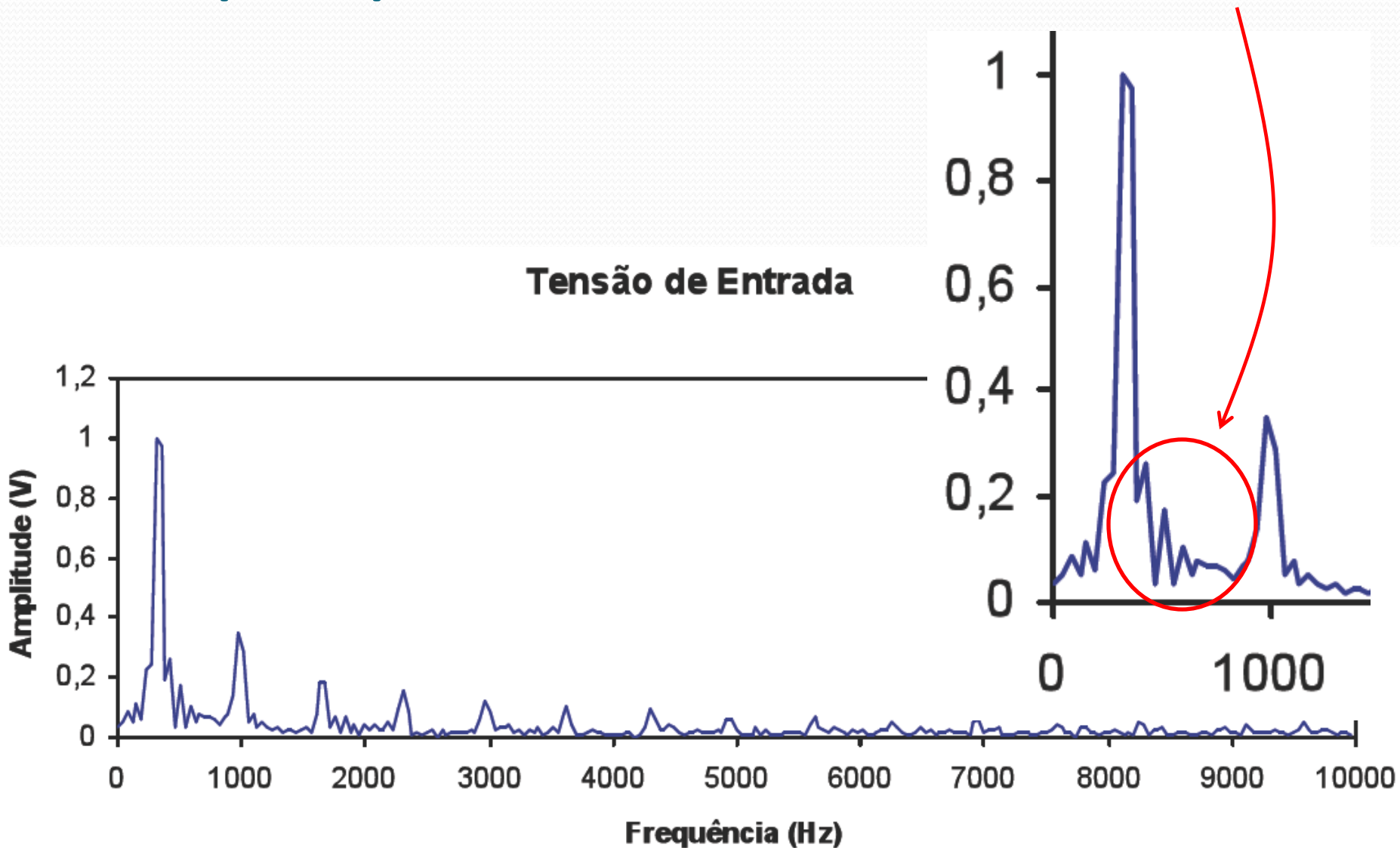
# Onde está o pico?



# Como medir os picos?

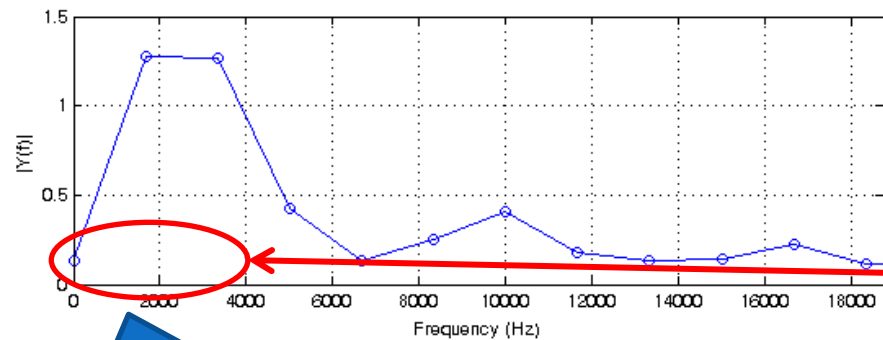
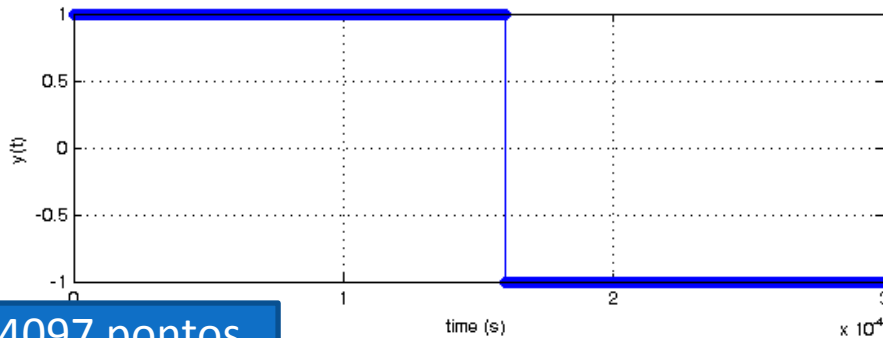


# Mas porque a FFT tem tanto ruído?





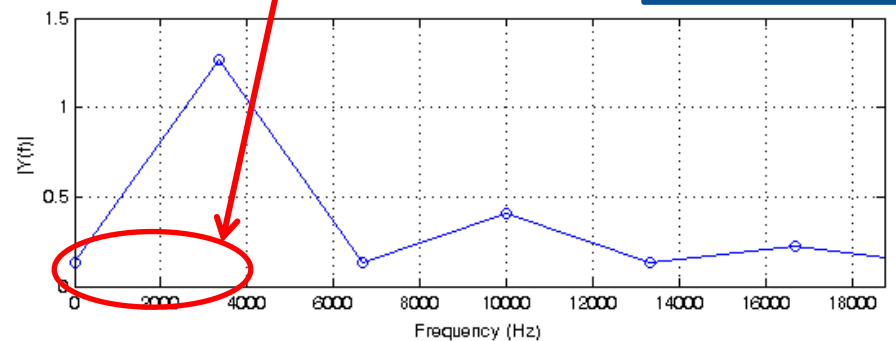
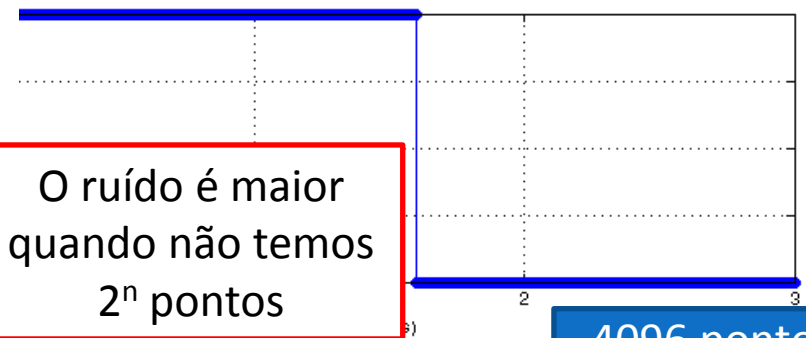
# FFT – Variando núm. períodos



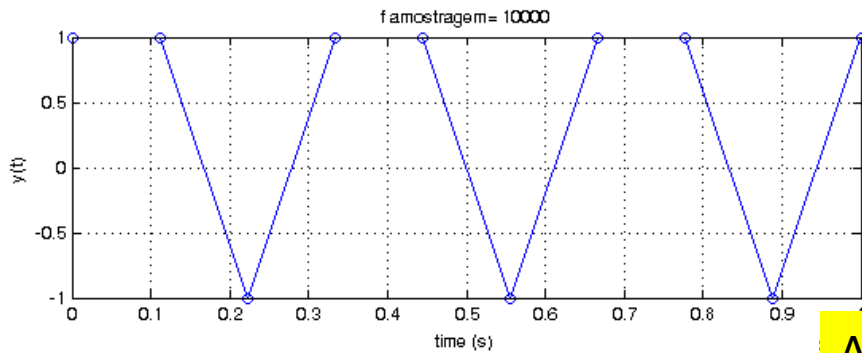
A frequência de amostragem está mudando, por isso a frequência mínima também!! ... E o número de pontos a esquerda do pico!

$f_c=200\text{Hz}$   
 $f_{\text{quad}}=3123\text{Hz}$   
 $\Delta t=0.3\text{ms}$  até  $6\text{ms}$

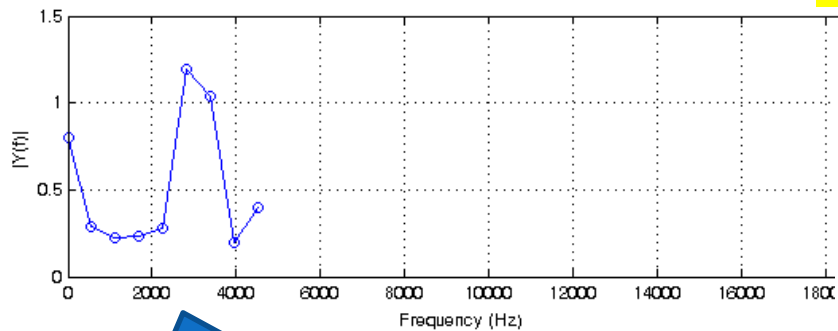
O ruído é maior quando não temos  $2^n$  pontos



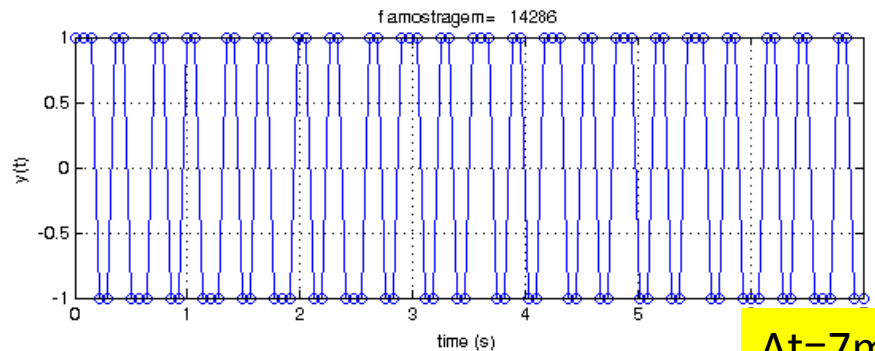
# FFT – Variando a freq\_amostra.



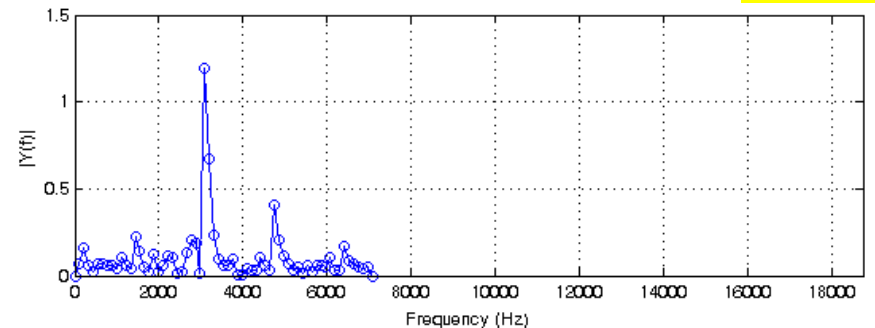
$\Delta t = 1\text{ms}$



$f_c = 200\text{Hz}$   
 $f_{quad} = 3123\text{Hz}$   
 $f_{amostragem} = 2 \text{ a } 110\text{kHz}$



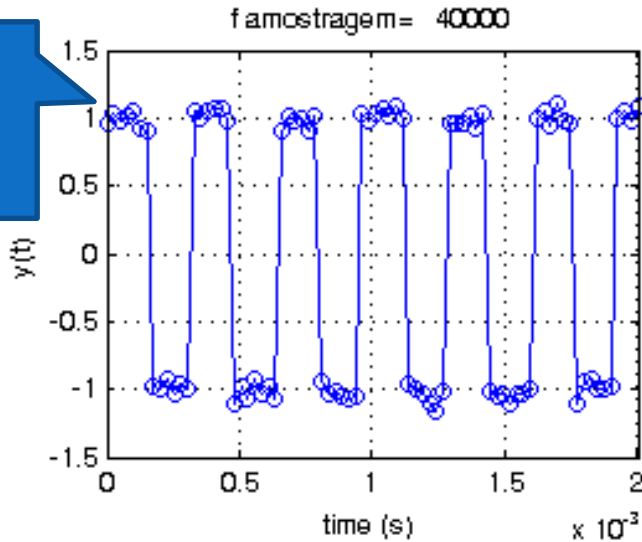
$\Delta t = 7\text{ms}$



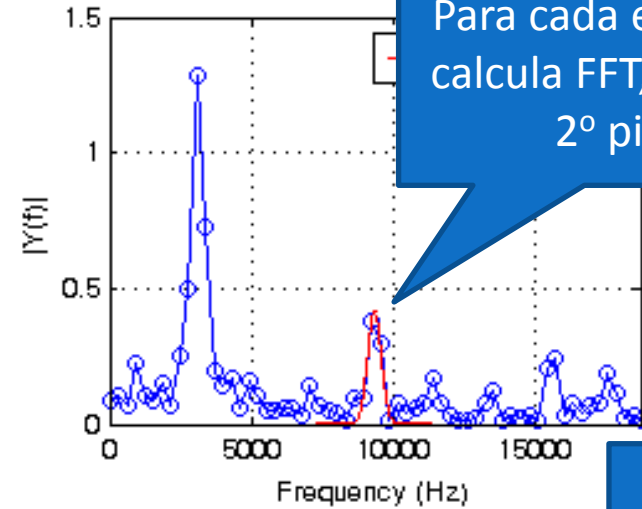
O pico pode ser mais arredondado ou mais triangular dependendo da frequência de amostragem, i.e., da resolução em frequência!

# Ajuste de gauss: $f_1=3123\text{Hz}$ $f_2=9363\text{Hz}$

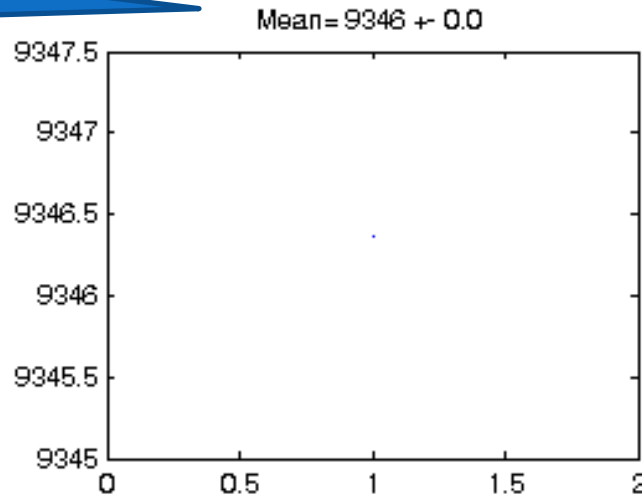
Sinal quadrado com ruído



Para cada espectro, calcula FFT, ajusta o 2º pico

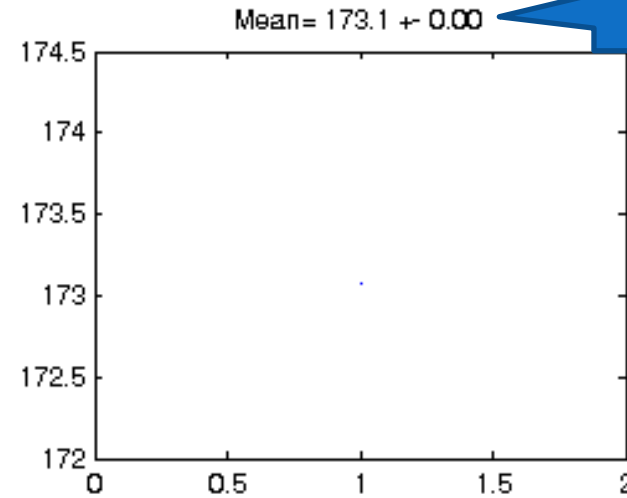


Média da gaussiana



9358 ± 14.8

Sigma da gaussiana



159.2 ± 14.7

# Ajuste de gauss: $f_1=3123\text{Hz}$ $f_2=9363\text{Hz}$

General model Gauss1:

$$gfit(x) = a1 * \exp(-((x-b1)/c1)^2)$$

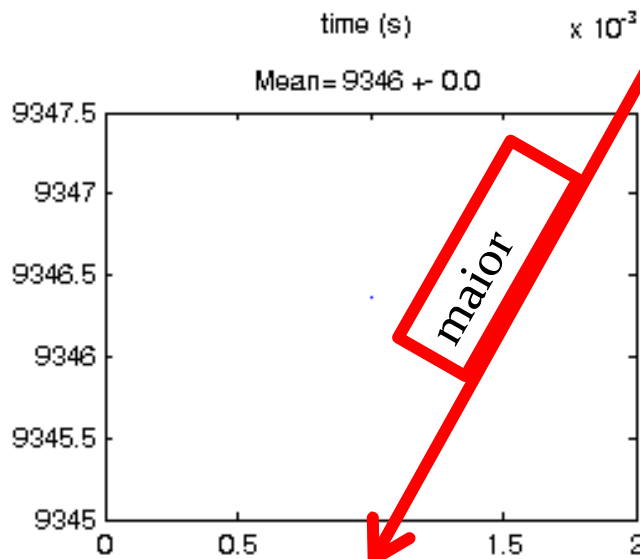
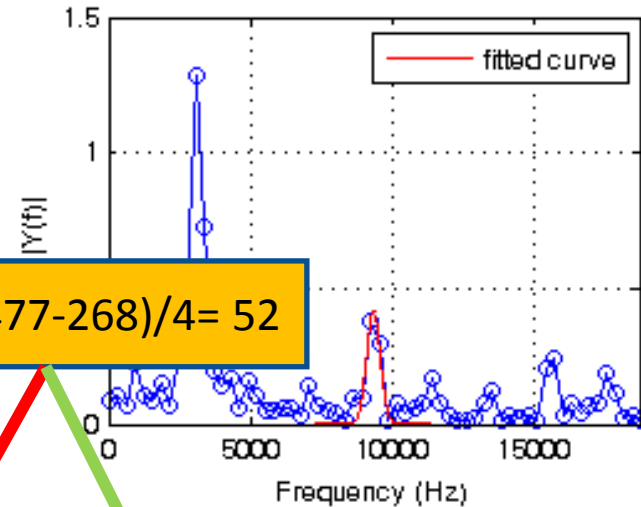
Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a1 = 0.4191 \quad (0.2699, 0.5684)$$

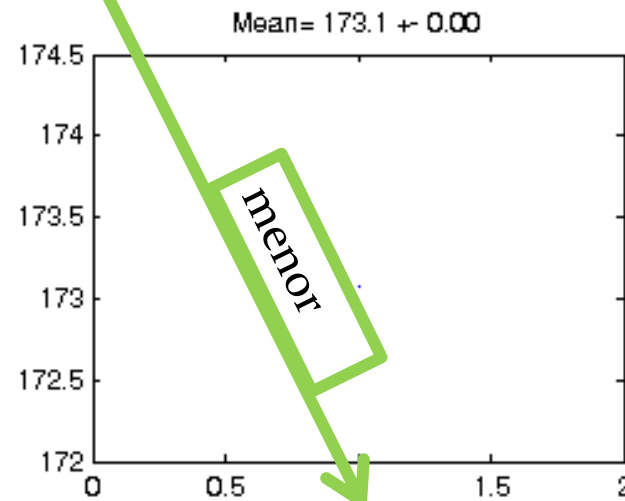
$$b1 = 9372 \quad (9268, 9477)$$

$$c1 = 364 \quad (212.3, 515.7)$$

$$\text{errb1} \approx (477-268)/4 = 52$$



$$9358 \pm 14.8$$



$$159.2 \pm 14.7$$

# Teoria de FFT

- Seja uma função  $h(t)$ , sua transformada  $H(f)$  é

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-2\pi i f t} df$$

- Ou em  $\omega$ :

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

- Propriedades:

$$h(at) \iff \frac{1}{|a|} H\left(\frac{f}{a}\right) \quad \text{“time scaling”} \quad (12.0.4)$$

$$\frac{1}{|b|} h\left(\frac{t}{b}\right) \iff H(bf) \quad \text{“frequency scaling”} \quad (12.0.5)$$

$$h(t - t_0) \iff H(f) e^{2\pi i f t_0} \quad \text{“time shifting”} \quad (12.0.6)$$

$$h(t) e^{-2\pi i f_0 t} \iff H(f - f_0) \quad \text{“frequency shifting”} \quad (12.0.7)$$

# Teoria de FFT

The *total power* in a signal is the same whether we compute it in the time domain or in the frequency domain. This result is known as *Parseval's theorem*:

$$\text{Total Power} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (12.0.13)$$

Frequently one wants to know “how much power” is contained in the frequency interval between  $f$  and  $f + df$ . In such circumstances one does not usually distinguish between positive and negative  $f$ , but rather regards  $f$  as varying from 0 (“zero frequency” or D.C.) to  $+\infty$ . In such cases, one defines the *one-sided power spectral density (PSD)* of the function  $h$  as

$$P_h(f) \equiv |H(f)|^2 + |H(-f)|^2 \quad 0 \leq f < \infty \quad (12.0.14)$$

so that the total power is just the integral of  $P_h(f)$  from  $f = 0$  to  $f = \infty$ . When the function  $h(t)$  is real, then the two terms in (12.0.14) are equal, so  $P_h(f) = 2 |H(f)|^2$ .

# Nyquist

In the most common situations, function  $h(t)$  is sampled (i.e., its value is recorded) at evenly spaced intervals in time. Let  $\Delta$  denote the time interval between consecutive samples, so that the sequence of sampled values is

$$h_n = h(n\Delta) \quad n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (12.1.1)$$

The reciprocal of the time interval  $\Delta$  is called the *sampling rate*; if  $\Delta$  is measured in seconds, for example, then the sampling rate is the number of samples recorded per second.

For any sampling interval  $\Delta$ , there is also a special frequency  $f_c$ , called the *Nyquist critical frequency*, given by

$$f_c \equiv \frac{1}{2\Delta} \quad (12.1.2)$$

# Nyquist

fact known as the *sampling theorem*: If a continuous function  $h(t)$ , sampled at an interval  $\Delta$ , happens to be *bandwidth limited* to frequencies smaller in magnitude than  $f_c$ , i.e., if  $H(f) = 0$  for all  $|f| \geq f_c$ , then the function  $h(t)$  is *completely determined* by its samples  $h_n$ . In fact,  $h(t)$  is given explicitly by the formula

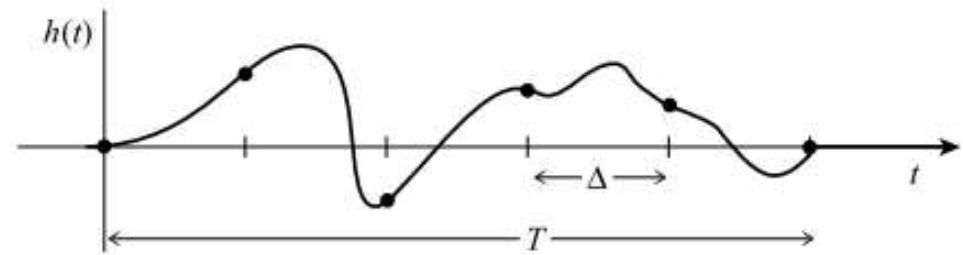
$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin[2\pi f_c(t - n\Delta)]}{\pi(t - n\Delta)} \quad (12.1.3)$$

- Exemplo: transmissão de voz sem perda de qualidade mesmo usando uma amostragem finita!

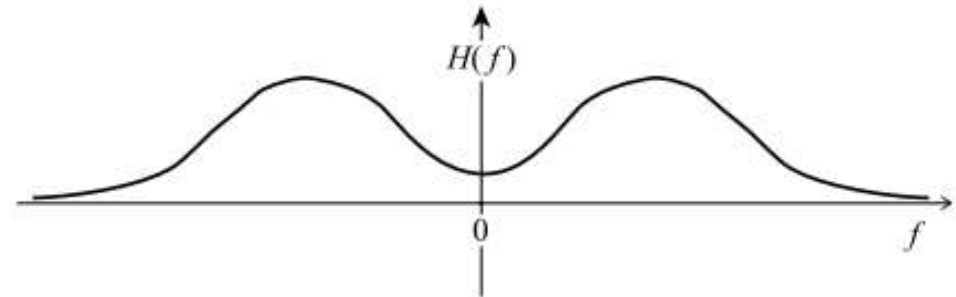


# Problema

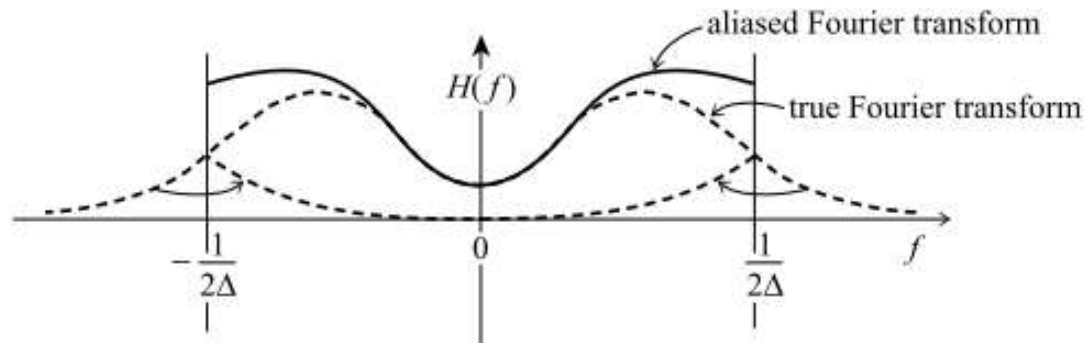
- E se a função não for limitada em frequência??



(a)



(b)



(c)

# Indo ao ponto:

With  $N$  numbers of input, we will evidently be able to produce no more than  $N$  independent numbers of output. So, instead of trying to estimate the Fourier transform  $H(f)$  at all values of  $f$  in the range  $-f_c$  to  $f_c$ , let us seek estimates only at the discrete values

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (12.1.5)$$

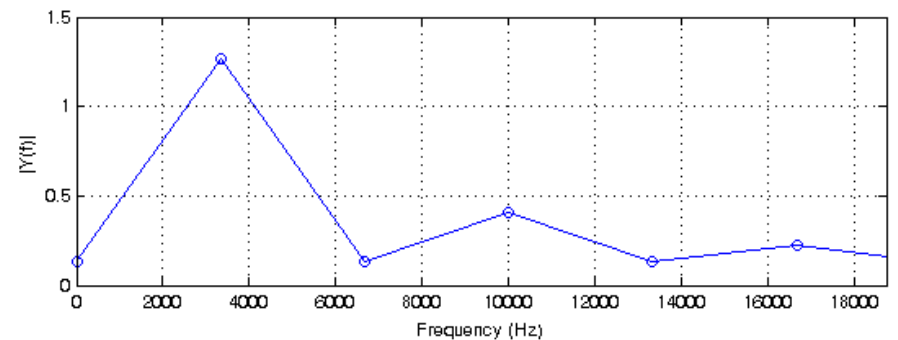
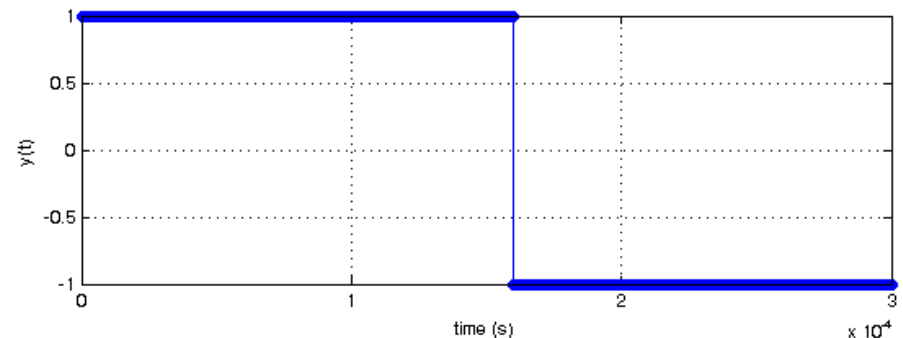
- Então a menor frequência possível é:  $1/N\Delta$ 
  - Depende do intervalo de amostragem
  - Depende de quantos pontos foram usados
- A maior frequência é:  $1/2\Delta$ 
  - Justamente a frequência crítica (Nyquist)

# Exemplo 1

- Voltando a simulação de variação do número de períodos:
  - $f_{\text{quadrada}}=3123\text{Hz}$
  - $N=4096$
  - $\Delta t=0.3\text{ms}$  até  $6\text{ms} \rightarrow f_{\text{amostragem}}=13.6\text{Mhz}$  até  $680\text{khz}$

- Então:

- $f_{\text{min}}^{0.3} = \Delta f = 1/N\Delta = 3333\text{Hz}$
- $f_{\text{min}}^6 = \Delta f = 1/N\Delta = 167\text{Hz}$
  
- $f_{\text{max}}^{0.3} = f_c = 1/2\Delta = 6.8\text{Mhz}$
- $f_{\text{max}}^6 = f_c = 1/2\Delta = 340\text{khz}$



# Exemplo 2 – Ajuste do pico por gaussiana

General model Gauss1:

$$gfit(x) = a1 * \exp(-((x-b1)/c1)^2)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

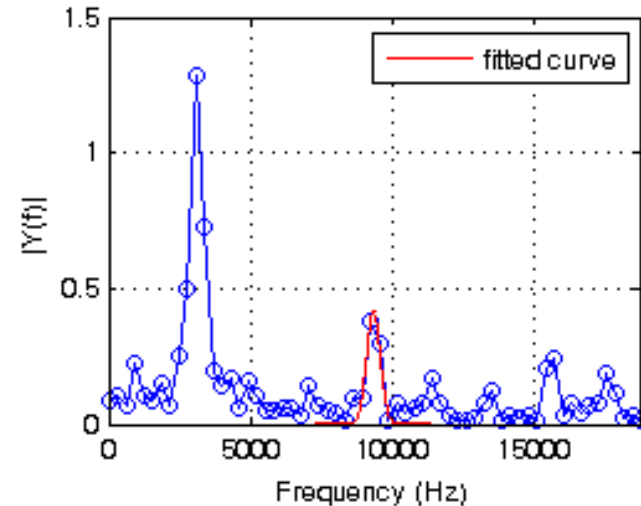
$$a1 = 0.4191 \quad (0.2699, 0.5684)$$

$$b1 = 9372 \quad (9268, 9477) \Rightarrow \text{errob1}=52$$

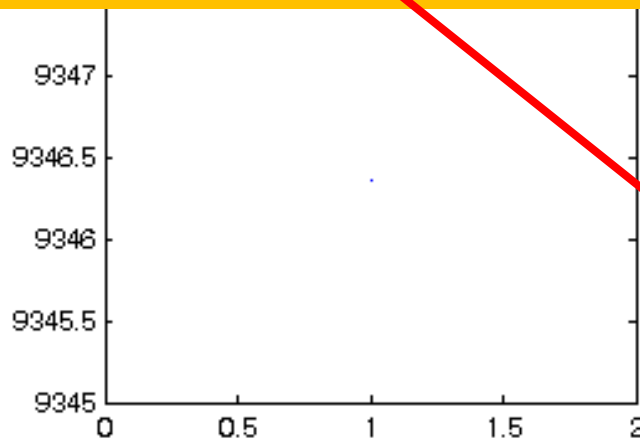
$$c1 = 364 \quad (212.3, 515.7) \Rightarrow \text{sigma}=132$$

$$f_{\min} = \Delta f_n = 1/2\text{ms} = 500\text{Hz}$$

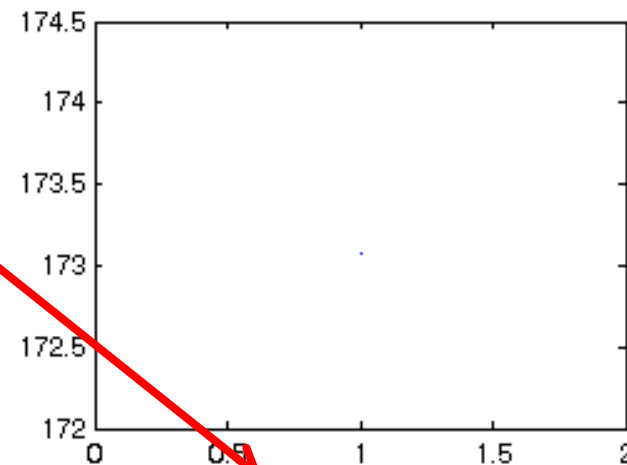
Conf. 100% pico está entre os 3 valores mais altos  $\Rightarrow 1000/6 \approx 166\text{Hz}$



Mean = 173.1 ± 0.00



9358 ± 14.8

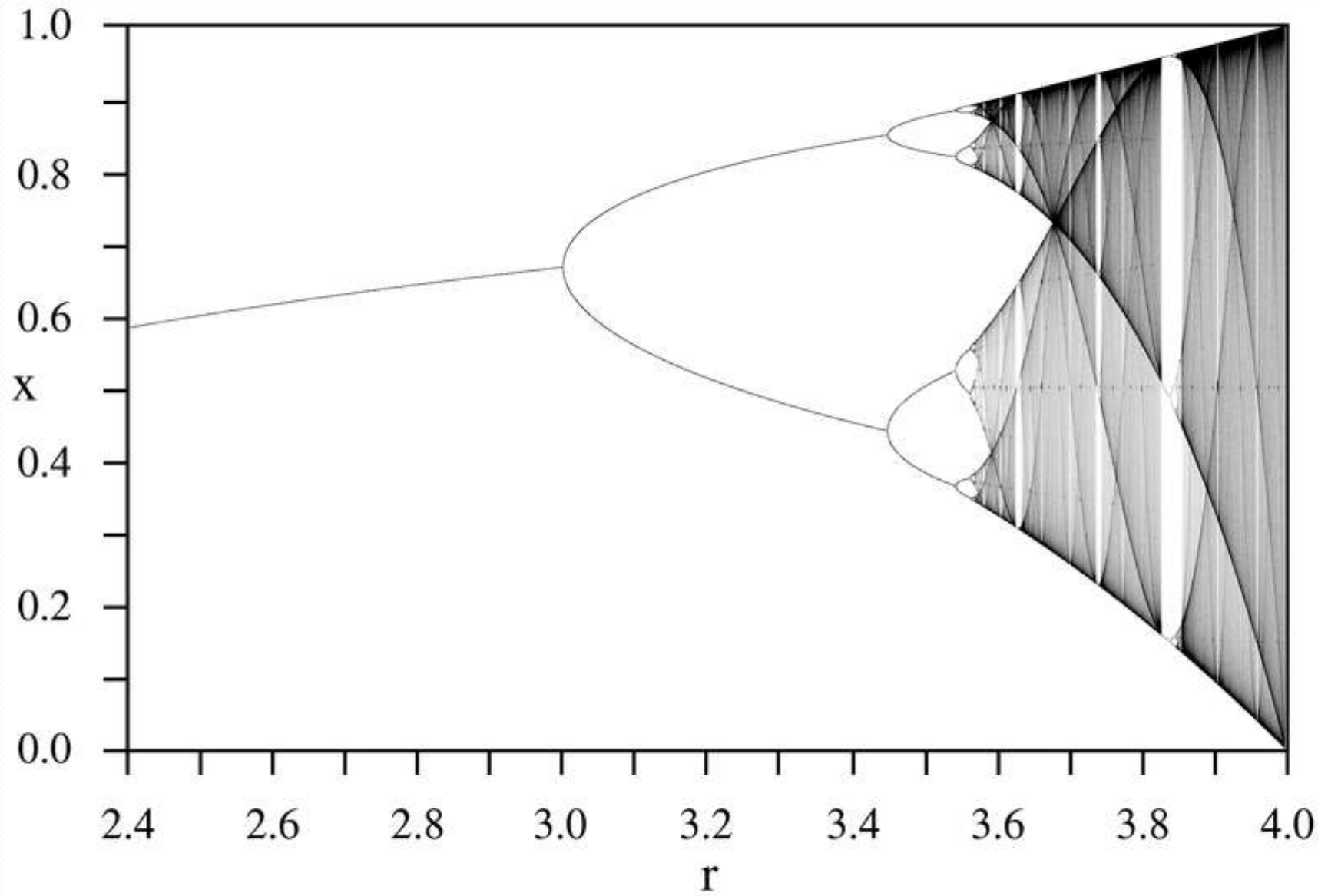


159.2 ± 14.7

# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC
  - Circuito integrador e análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

# Próximas duas Semanas

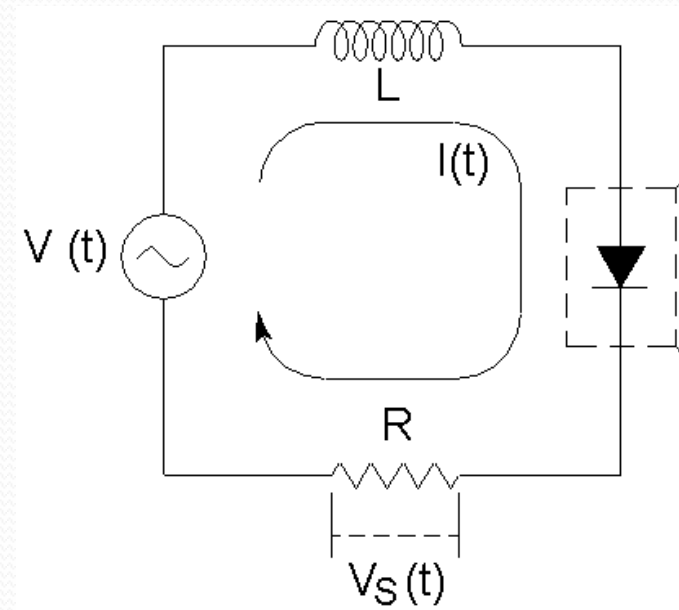
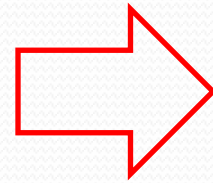
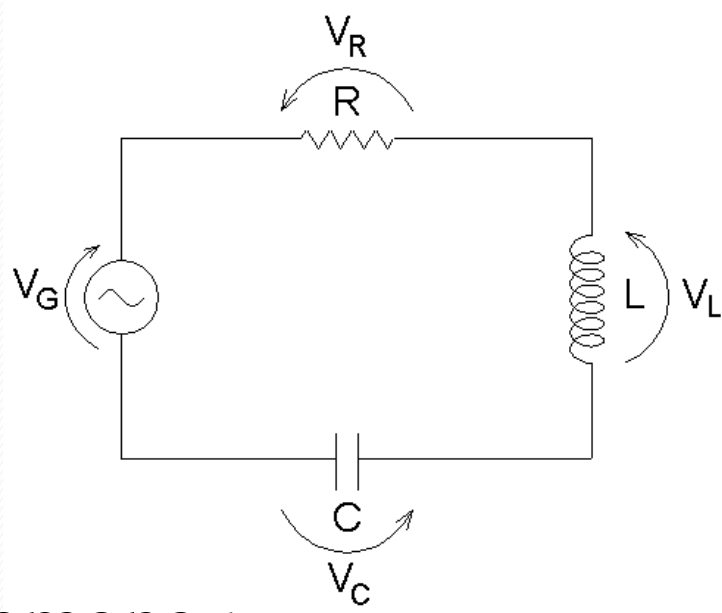


# Próximas duas Semanas

- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC muda o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
  - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
    - Diodo  $\rightarrow$  capacitor não linear
    - **A dinâmica muda totalmente  $\rightarrow$  Caos**

# Objetivos Para as Próximas Semanas

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



- Semana 1
  - Teoria de caos e experimentos computacionais
- Semana 2
  - Medidas experimentais com RLD



# Aula de Hoje



- Introdução a caos e sistemas caóticos
- Estudo de crescimento de populações
- Mapa logístico

# O que é Caos ?

Quais são os limites para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?

**Comportamento regular rígido**

- Pêndulos (relógio)
- Sistema massa-mola
- Queda livre
- Circuito RLC comum

**Sistemas que apresentam Caos**

- Clima
- Crescimento populacional
- Pêndulo duplo
- Circuito RLD

**Comportamento totalmente aleatório**

- Jogo de dados
- Decaimento radioativo
- Movimento Browniano

# Sistemas complexos: causa e efeito, exemplos

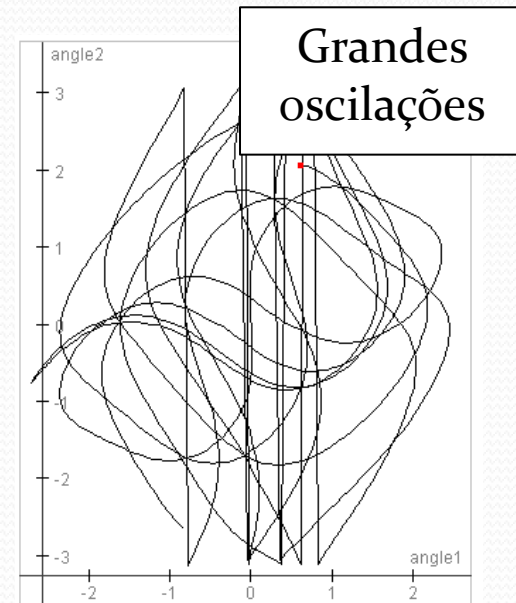
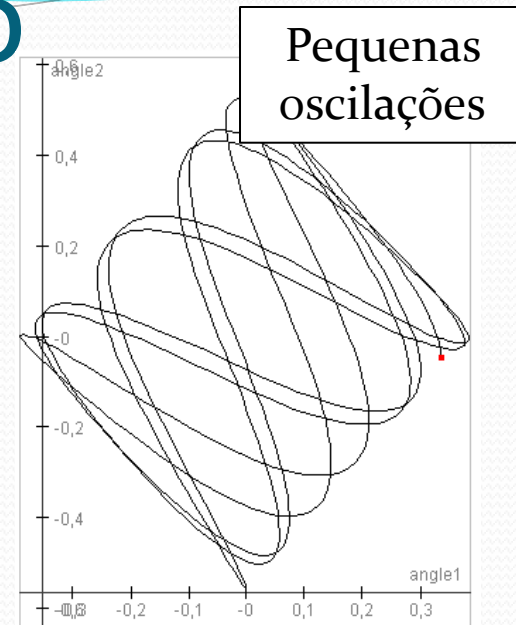
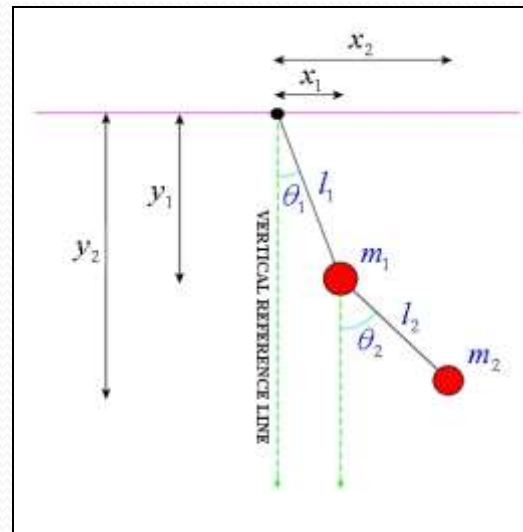
- Construir um viaduto sobre uma estrada
  - Efeito esperado: melhorar o tráfego
  - Efeito real: o tráfego na estrada piora (“[Introduction to General Systems Thinking](#)” Gerald Weinberg)
- Tornar os carros cada vez mais seguros
  - Efeito esperado: evitar acidentes, evitar ferimentos e mortes
  - Efeito real: os motoristas se tornam mais agressivos e se arriscam mais, o número de acidentes aumenta ([Freakonomics](#) : “[What happens to your head](#)”)
- Melhores remédios para AIDS
  - Efeito esperado: aumentar a vida e diminuir o número de infectados
  - O que ocorre: está aumentando o número de casos e o vírus está se tornando mais resistente à medicação (Ann Appl Stat. 2010 March 1; 4(1): 460-483.

# Sistemas complexos: causa e efeito

- Porque isso acontece?
  - porque aplicamos métodos lineares a sistemas não lineares que determinam esses efeitos, como:
    - comportamento de sociedades
    - sistemas políticos/culturais
    - adaptabilidade de microorganismos
  - Vamos ver alguns exemplos simples

# Exemplo: Pêndulo Duplo

- Um pêndulo amarrado no outro
  - O espaço de fase é composto pelos 2 ângulos e as 2 velocidades



# Algumas Definições Necessárias

**Sistema dinâmico** – é qualquer sistema cuja evolução a partir de uma determinada condição inicial é regida por um conjunto de regras. Essas regras podem se resumir a um conjunto de equações diferenciais, que é o caso para sistemas contínuos.

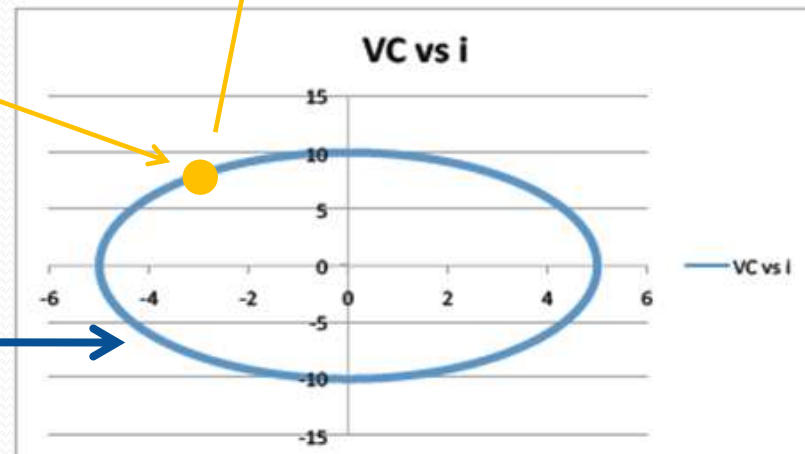
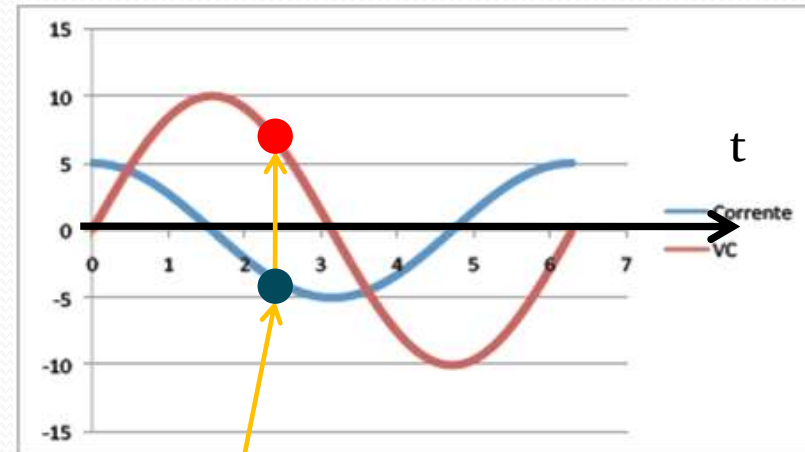
**Espaço de fase** – é o espaço no qual todos os possíveis estados de um sistema são representados. Em mecânica, por exemplo, seria o conjunto de posições e momentos.

No pêndulo duplo teria 4 dimensões:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_1' \text{ e } \theta_2'$$

**Estado** – é uma possível condição para o sistema, isto é, uma configuração de variáveis que represente uma condição fisicamente possível ou aceitável.

**Retrato de fase** – é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema dinâmico em questão. Os retratos de fase para sistemas contínuos são trajetórias no espaço de fase.

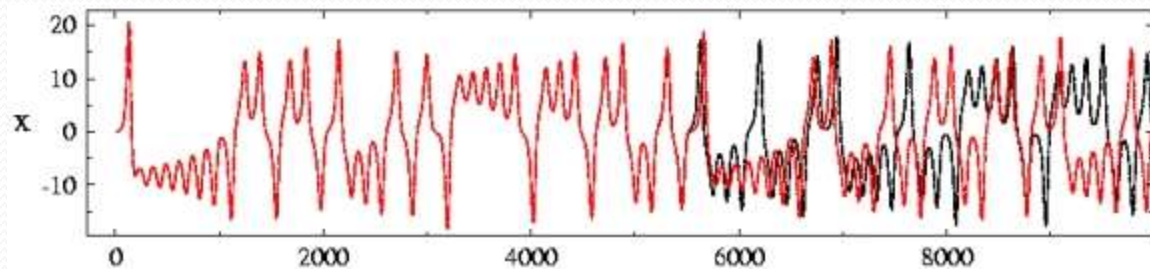


# Algumas Definições Necessárias

- Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real depende de um ou mais parâmetros chamados de **parâmetros de controle**.
- Por exemplo: a **freqüência natural de oscilação** é um parâmetro de controle de um oscilador harmônico simples.
- No caso de um circuito **RLC forçado**, tanto a **freqüência** quanto a **amplitude da tensão aplicada** são parâmetros de controle.
- Um sistema dinâmico pode, portanto, ser pensado como função do parâmetro de controle. De fato, pode-se **influir no comportamento dinâmico do sistema alterando-se o valor de um parâmetro de controle**.

# CAOS: Principais características

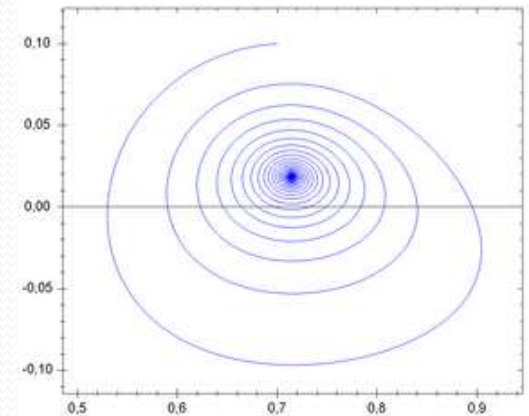
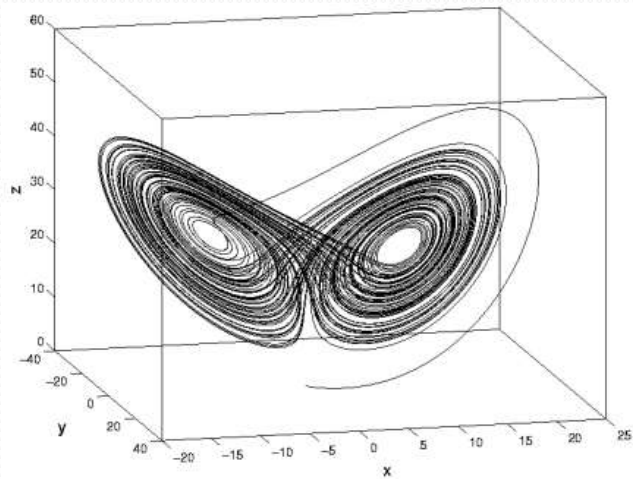
- **Não linearidade.** Se o comportamento de um sistema for linear, esse sistema não pode ser caótico
- **Sensibilidade a condições iniciais:** pequenas alterações nas condições iniciais podem levar a comportamentos radicalmente diferentes do sistema em seu estado final. É o chamado “efeito borboleta”. Os sistemas caóticos também apresentam sensibilidade aos parâmetros de controle.
- **Determinismo:** existem regras subjacentes determinísticas (e não probabilísticas) que todo estado futuro do sistema deve obedecer
- **Manutenção da irregularidade no comportamento do sistema.** Há uma ordem oculta que inclui um número grande de configurações periódicas ocultas na infra-estrutura desses sistemas: há uma “ordem na desordem”.
- **Previsão de longo prazo impossível:** em decorrência da sensibilidade às condições iniciais, a previsão (mas não o controle) do comportamento de sistemas caóticos de **longo prazo é impossível**, porque as condições iniciais são conhecidas com grau de precisão finito.





# CAOS: Como são as trajetórias no espaço de fase?

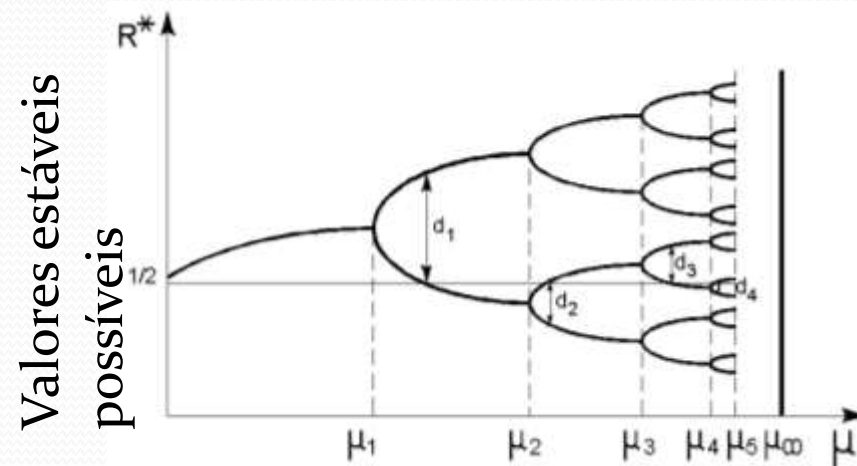
- **Existe 3 possibilidades para essas trajetórias:**
  - as trajetórias tendem a se concentrar numa determinada região do espaço de fase e não saem mais de lá: esses são chamados de estados assintóticos do sistema ou **atratores**.



- as trajetórias tendem a se afastar uma das outras e vão para o infinito
- as trajetórias ficam “passeando” por todo o espaço de fase

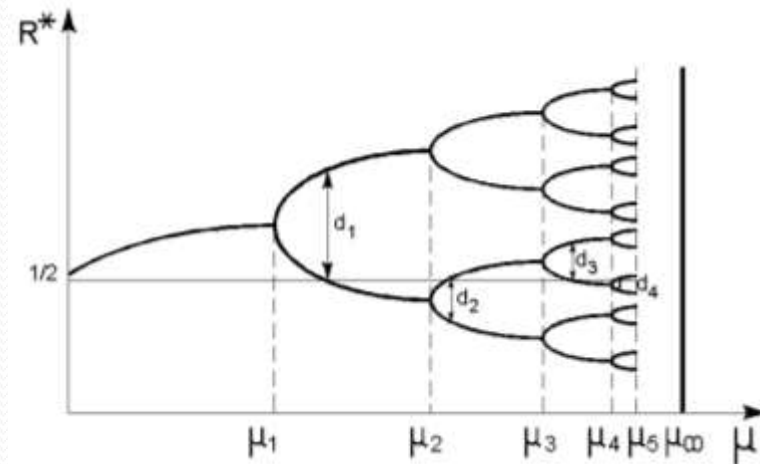
# CAOS: Como se chega lá?

- **Bifurcações** – Vamos supor que um sistema dinâmico tenha um parâmetro de controle  $\mu$ .
  - Variando-se  $\mu$  podem aparecer novos padrões de comportamento ou seqüências de novos estados estáveis (atratores) para o sistema.
  - Neste caso diz-se que ocorreram **bifurcações** e  $\mu_n$  é o valor do parâmetro de controle para o qual ocorreu a n-ésima bifurcação.
  - Em outras palavras, variando-se  $\mu$  pode-se variar tanto a posição quanto as características qualitativas dos pontos de equilíbrio estáveis (atratores) do sistema.



# CAOS: Como se chega lá?

- Nesse caso uma solução estável do sistema perde a estabilidade com a variação de um parâmetro de controle e aparece uma nova solução estável com o dobro do período da solução anterior. Então diz que para  $\mu = \mu_n$  houve uma bifurcação porque o “período” duplicou. Essas soluções são estados assintóticos do sistema, geralmente chamados de **atratores**.
- Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**) é a duplicação dos atratores



# Caos: a constante de Feigenbaum

- A cascata de bifurcações apresentadas pelos sistemas que se encaminham para o caos via **cenário de Feigenbaum** tem certas propriedades de caráter universal:
  - verifica-se que os valores de  $\mu_n$  onde ocorrem bifurcações obedecem a uma lei de escala:

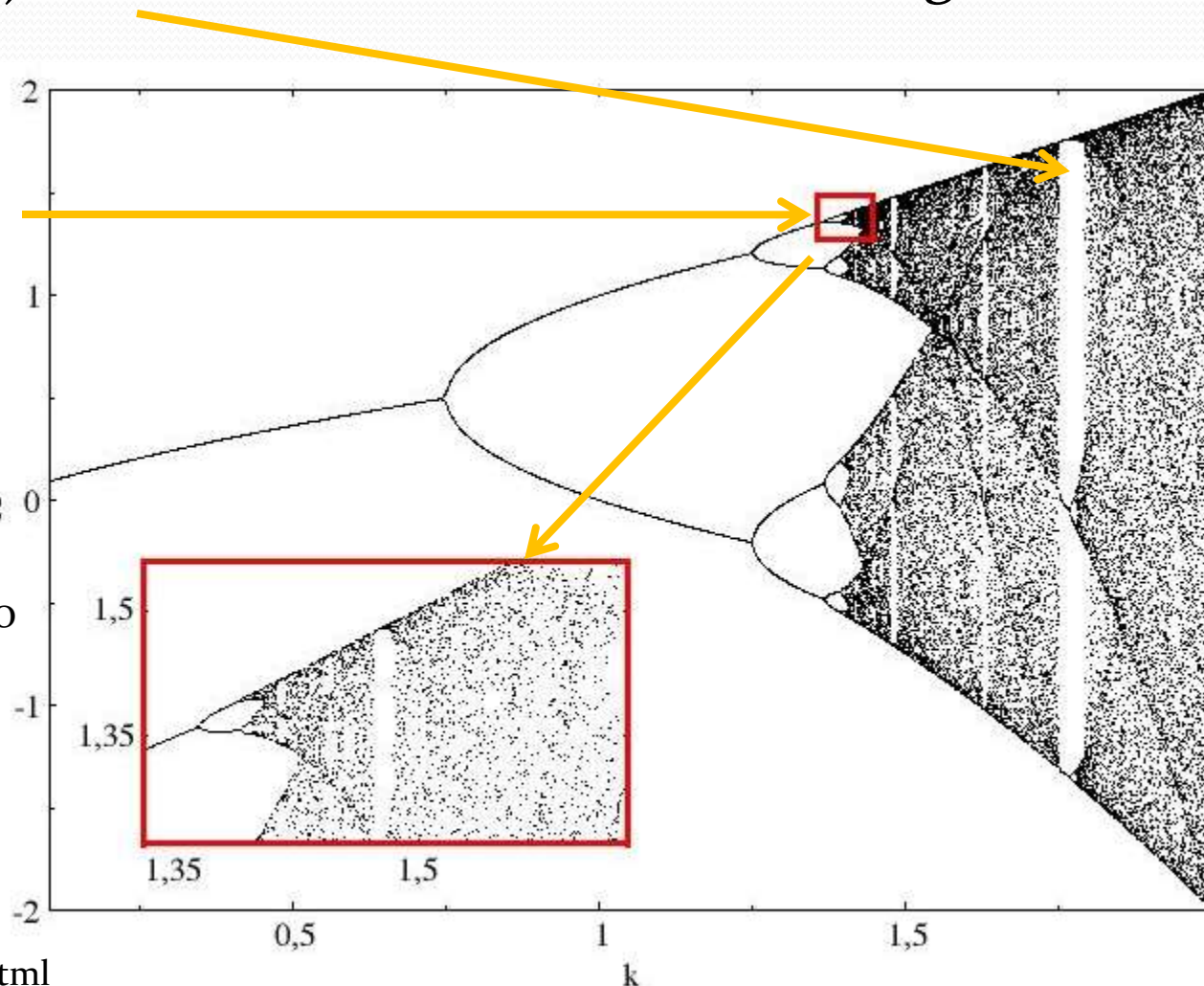
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta$$

$$\delta = 4,6692016091029909\dots$$

- $\delta$  é uma constante universal para sistemas que apresentam duplicação de período

# Caos e Fractais

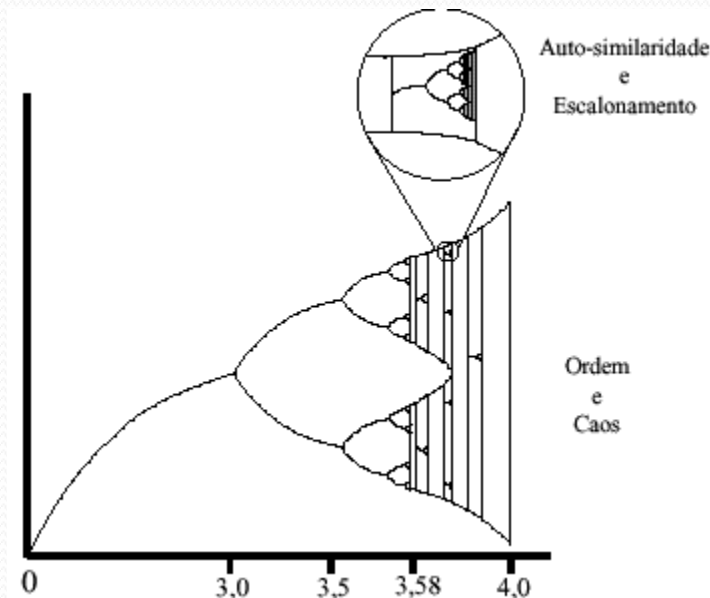
- A sucessão de dobramentos do período acaba levando ao domínio caótico, que *parece* (mas não é) uma nuvens de pontos dispersos.
- No meio do caos, há janelas indicando uma dinâmica organizada e previsível.
- Um pequeno pedaço é similar ao diagrama todo  $\Rightarrow$  fractal.
- ... Ou melhor: o domínio caótico aparece como uma nuvens de pontos com dimensão fractal no espaço de parâmetros



# Caos e Fractais

**Fractal** - é a propriedade de se fraturar em padrões auto-similares e escalonados. Fractais possuem:

- **Auto-similaridade** - existem padrões dentro dos padrões que nunca são exatamente os mesmos mas que são sempre similares (galhos de uma árvore que se bifurcam cada vez mais até chegar nas micro-nervuras da folha, mas que têm praticamente o mesmo padrão de bifurcação).
- **Escalonamento** - quando examinamos os padrões de auto-similaridade em escalas cada vez menores, verificamos que eles são repetições de si mesmos (podemos "enxergar" o padrão de nervuras de uma árvore inteira em qualquer folha desta mesma árvore).



# Exemplo Simples de CAOS

- Em 1838, Pierre Verhulst publicou sua “equação logística” para descrever o **crescimento de populações**, ou a taxa de crescimento em função da população atual e do parâmetro  $r$ .

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x), \text{ com } x = \frac{\text{número de indivíduos}}{\text{capacidade do ambiente}}$$

- $r$  é o número malthusiano:
  - Se  $r < 0$  a população sempre morre com o tempo
  - Se  $r > 0$  a pode sobreviver
- Essa equação pode ser resolvida de maneira exata e a solução só depende de  $x_0$  e de  $r$ .

$$x(t) = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1)e^{-rt}}, \text{ função sigmoide}$$

# Exemplo Simples

- A equação de **Verhulst** possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante  $t$  depende somente das condições iniciais e é contínua.
- Era desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial.
- O **Mapa Logístico** é um análogo discreto no tempo da equação logística e foi popularizado por um paper de 1976 de **Robert May**. Físico teórico australiano, ele começou a trabalhar com biologia quando foi para o Instituto de Estudos Avançados de Princeton em 1971.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

**Só funciona para gerações independentes.**

Ex: insetos colocam ovos antes do inverno, que ficam adormecidos em baixas temperaturas, e eclodem com a chegada do calor no ano seguinte...



# Exemplo Simples: Mapa Logístico

## Crescimento de Populações:

- O mapa logístico descreve o tamanho da populações em função de seu tamanho na geração anterior:

$$x_{n+1} = x_n \cdot r(1 - x_n)$$

- $x_n$  são frações da população máxima (capacidade do meio)
- $x_0$  é a fração inicial
- $r$  é o potencial biótico e  $r(1 - x_n)$  é a taxa de crescimento
- Deve-se ter necessariamente  $r > 0$  e  $r < 4$
- Como é a evolução temporal da população (tamanho das gerações  $n=1,2,3\dots$ ) em função da condição inicial  $X_0$  e do potencial biótico?

# Calculando o Mapa Logístico(1)

- Na mão:

$x_0=0.500$  e  $r=0.5$

$x_1=.5*.5*(1-.5)=.125$

$x_2=.5*.125*(1-.125)=.055$

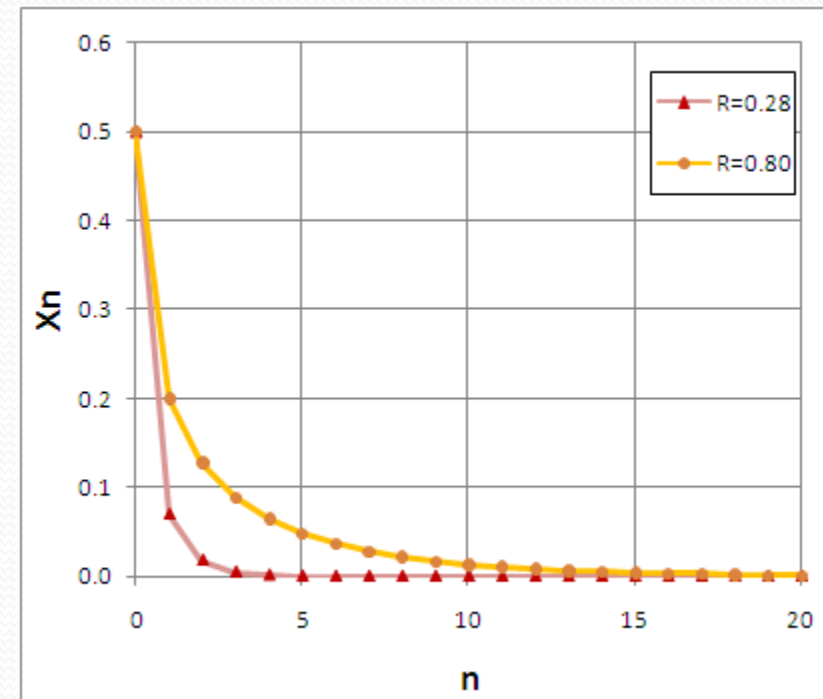
$x_3=.5*.055*(1-.055)=.026$

$x_4=.5*.026*(1-.026)=.013$

...

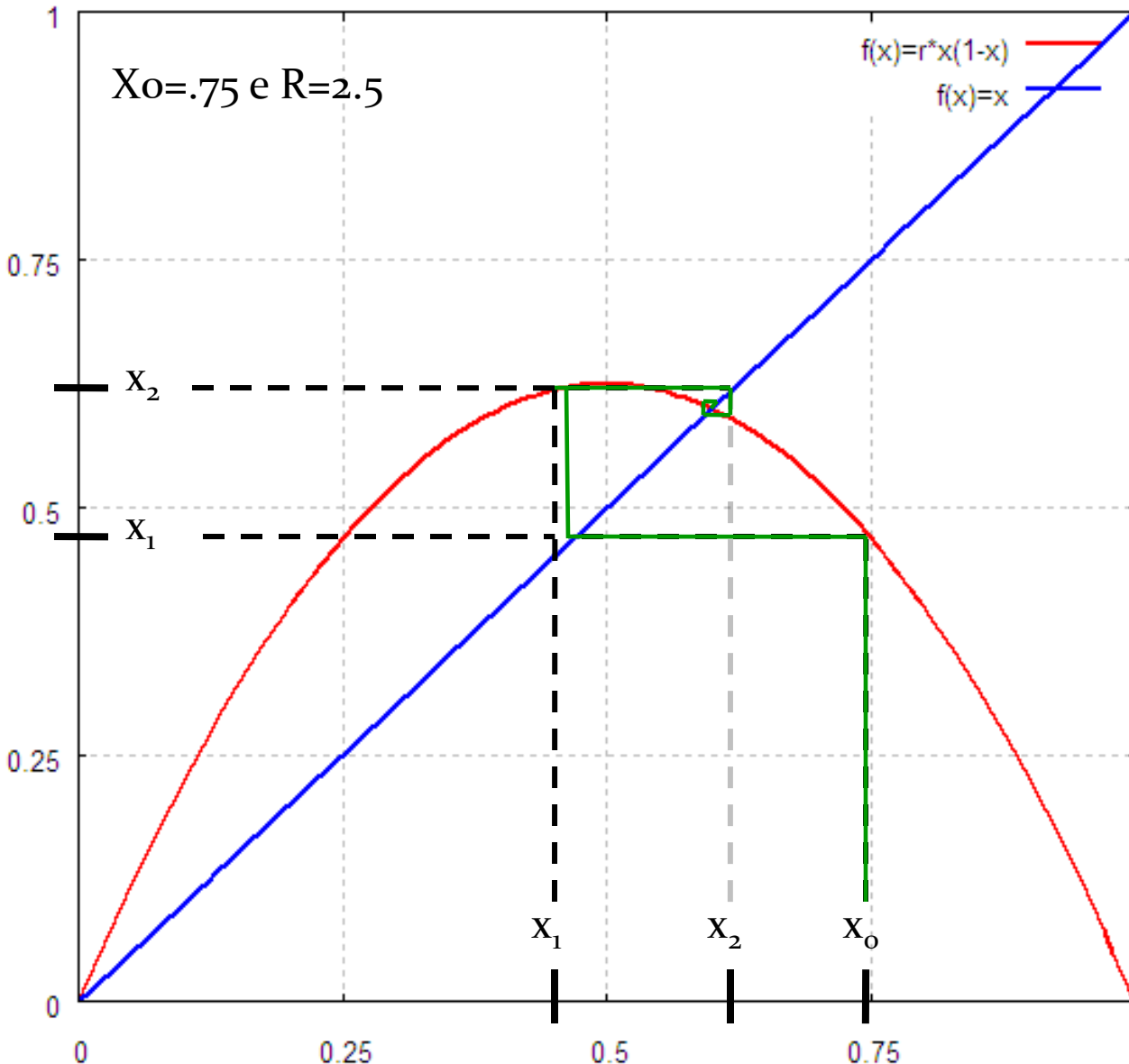
$x_9=0.000$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



Para estes parâmetros a população não sobrevive

# Calculando o Mapa Logístico(2)



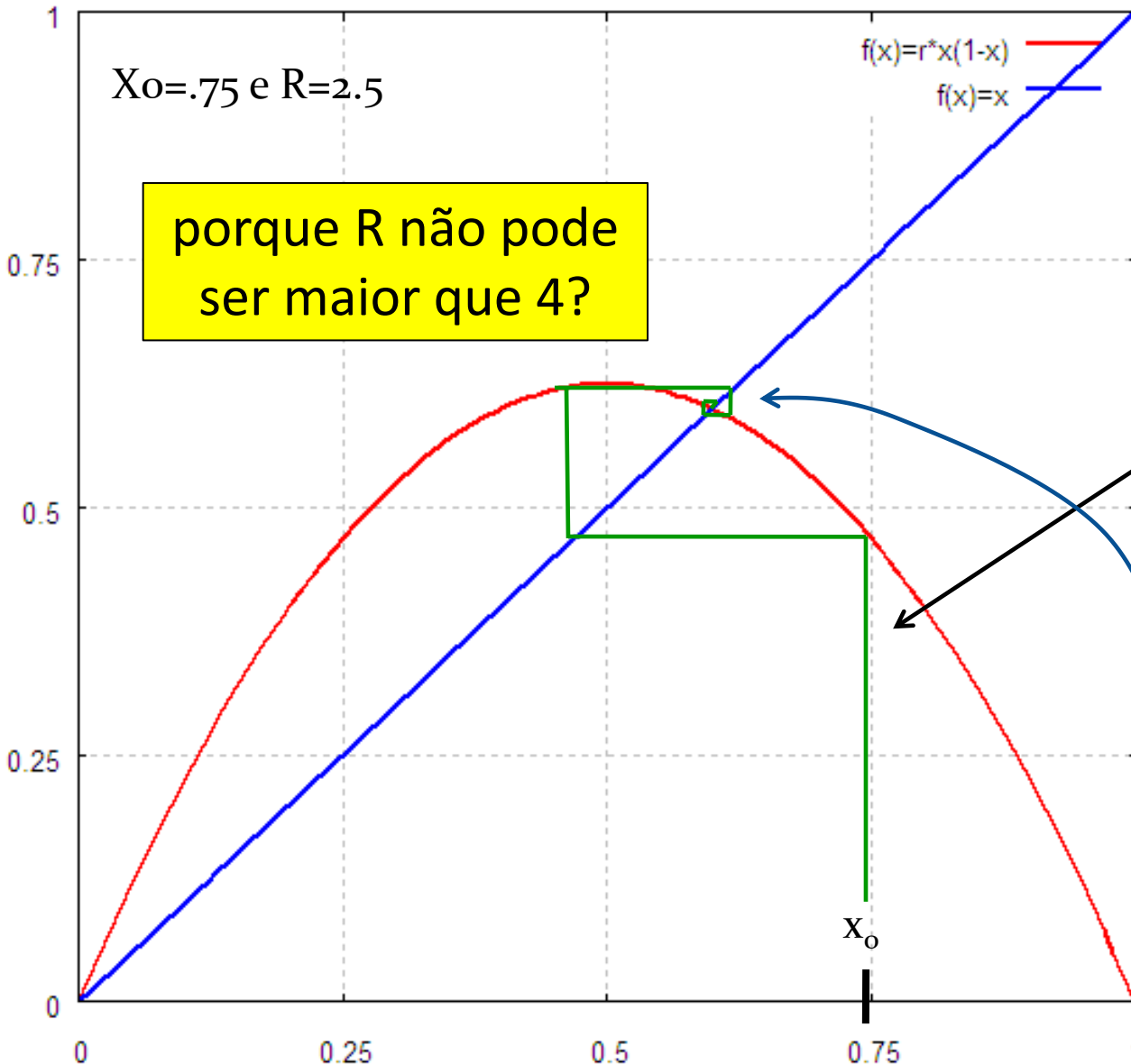
• Meios gráficos:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

- 1) Calcula-se o valor de  $f(x_0)$
- 2) Rebate-se na reta para ter  $x_1$
- 3) Calcula-se o valor de  $f(x_1)$
- 4) Rebate-se na reta para ter  $x_2$
- 5) etc...

A população estabilizou em 0.6

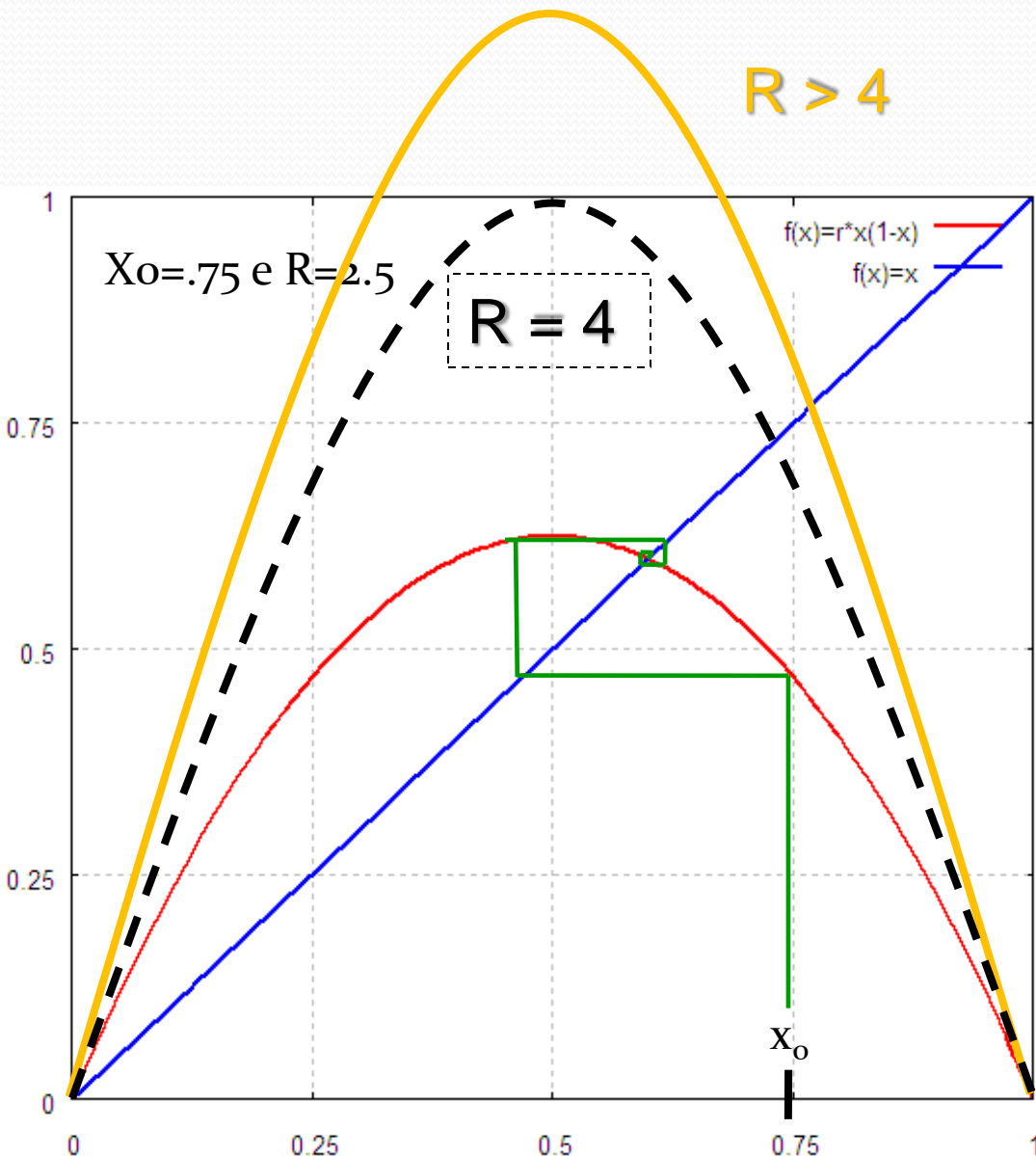
# Calculando o Mapa Logístico(2)



IMPORTANTE: O comportamento depende de  $r$ .

- Transiente:
  - As várias iterações antes da população estabilizar
- Estacionário
  - As iterações depois do transiente

# Mapa Logístico - Detalhes

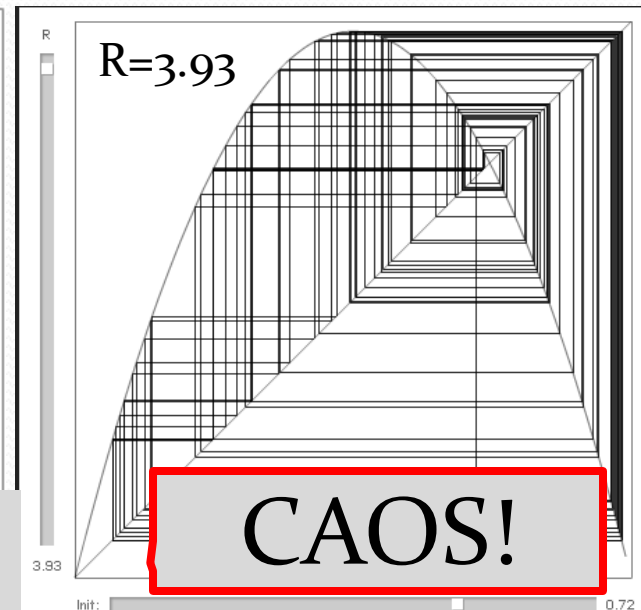
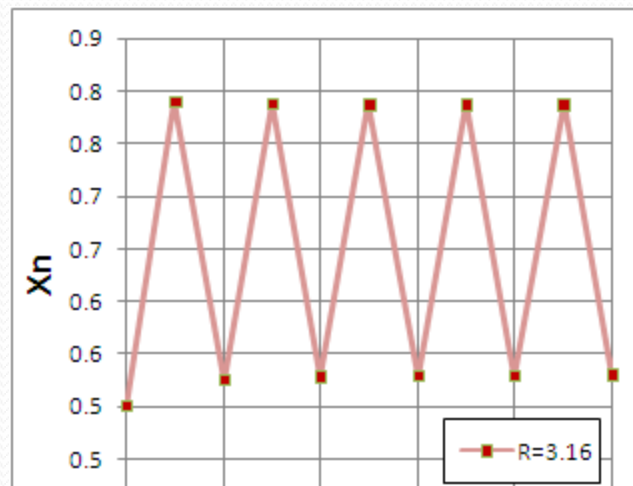
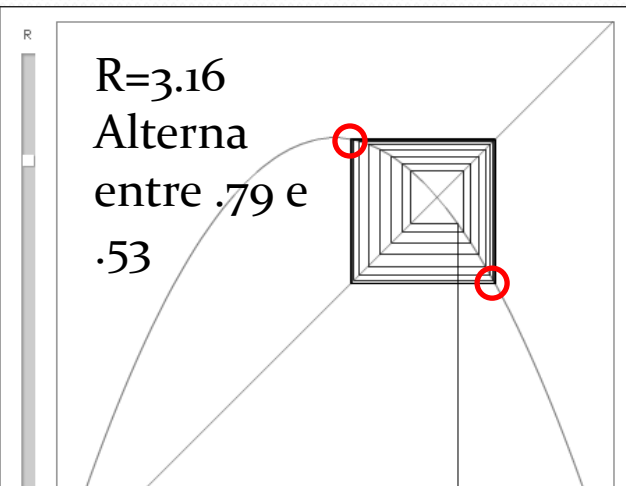
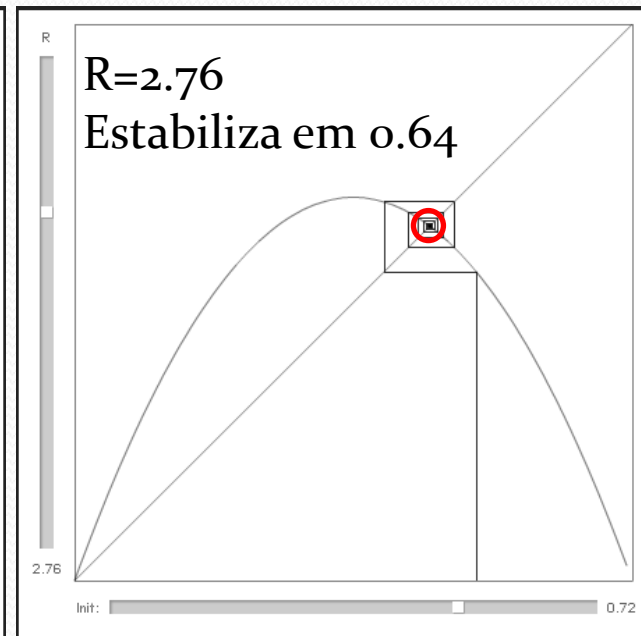
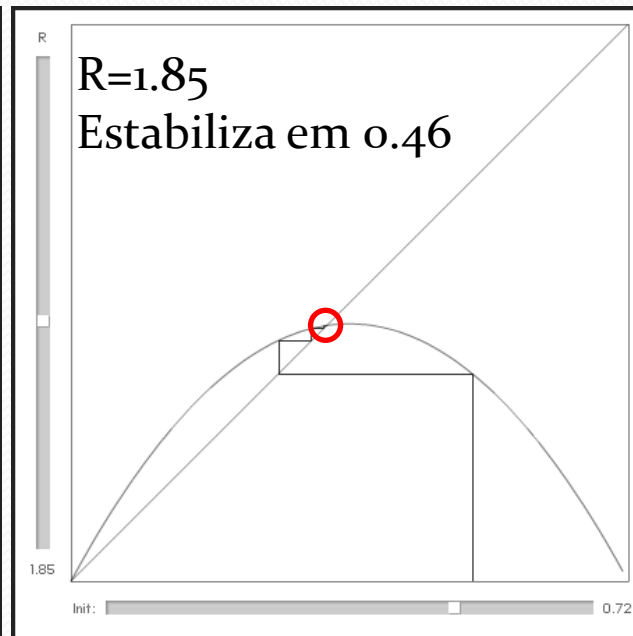


$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Porque  $0 < R < 4$  ?

- $R < 0 \Rightarrow x < 0$
- $R = 0 \Rightarrow x = 0$
- $R > 4 \Rightarrow x > 1$
- $R = 4 \Rightarrow x = 0$

# Applet Mapa Logístico – $x_0=0.72$



<http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/gallery/doubling/>  
<http://ibiblio.org/e-notes/MSet/Logistic.htm>

# Se divertindo com o Applet

- Varie  $r$  para um  $x_0$  qualquer e veja que para  $r < 1$  a solução final (atrator) depois de várias iterações é sempre **zero**:
  - variando  $x_0$  o que muda é a rapidez com que a solução se aproxima do atrator
- Agora faça  $r=2,5$  e veja que **zero** não é mais um atrator, o novo atrator é a intersecção da parábola  $f(x)=x r(1-x)$  com a reta  $f(x)=x$ , para qualquer valor de  $x_0$ .
- Agora faça  $r=3,2$  e veja que agora a intersecção da parábola e da reta **não** é mais um atrator. Temos **dois** atratores, dados pela intersecção do quadrado com a parábola.
- Aumente  $r$  ainda mais e veja aparecer o caos!

# Calculando o Mapa Logístico(3)

- Ao invés de fazer “na mão” podemos usar o Excel

- Valores Constantes:

- R na célula B1
- N nas células A3 e A4
- x0 na célula B3

- A célula B4 (x1) vale:

- $=B\$1*B3*(1-B3)$

- Selecionar a linha 4

- E arrastar com o mouse para repetir a fórmula para as outras linhas.

	A	B
1	R	1.50
2	N	X0
3	0	0.5
4	1	0.3750
5	-	-



# Calculando o Mapa Logístico(3)

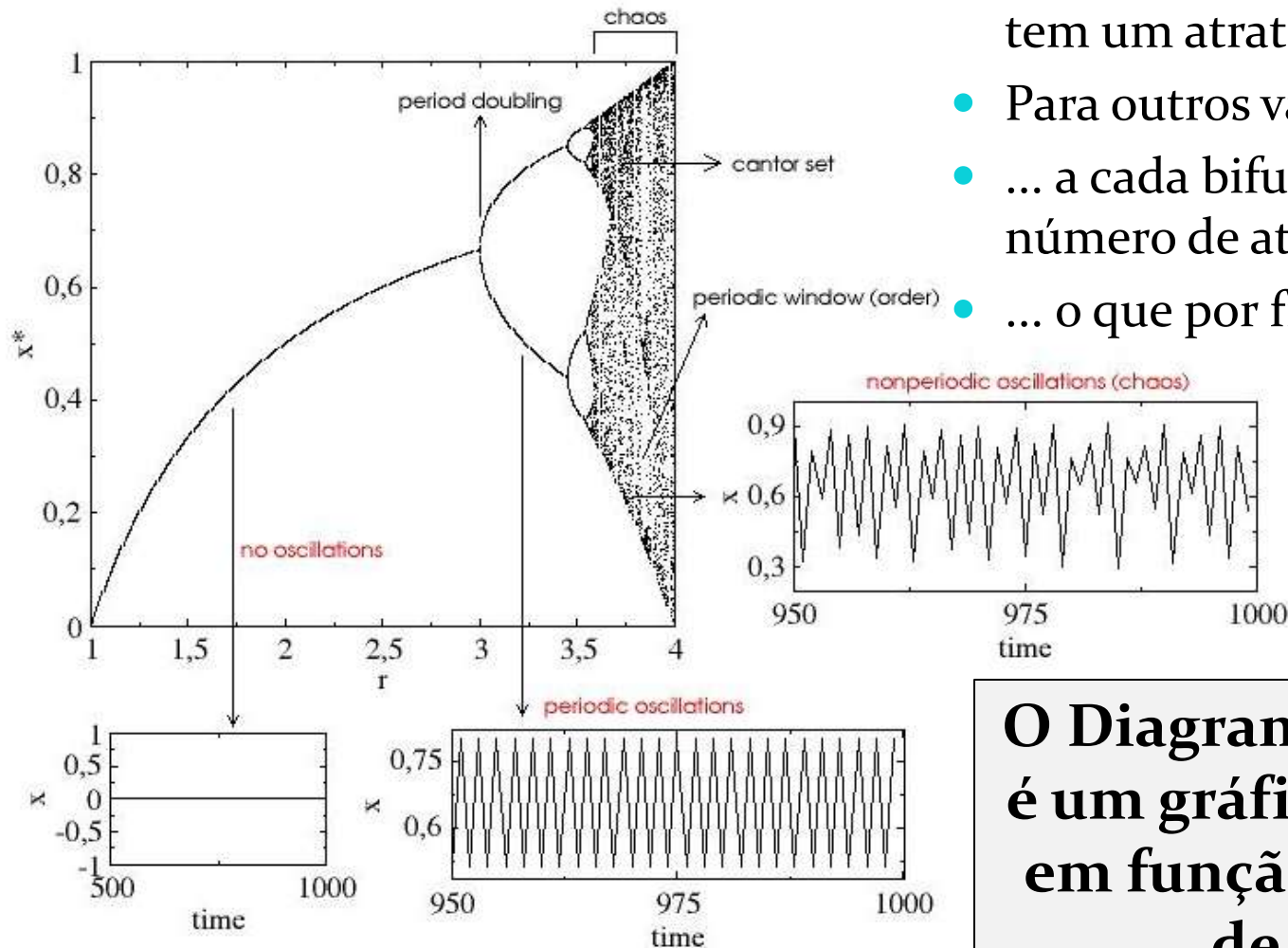
Você pode calcular para vários “R”s de uma vez, ou mesmo definir um intervalo de valores onde serão calculados!

Lembre-se que o número de iterações é importante, para ter certeza do valor é bom ter pelo menos 500 iterações.

C4		$f_x = \$C\$1 + (\$E\$1 - \$C\$1) / 100 * C3$									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1		min=	0.2	max		4					
2											
3		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
4	R	0.20	0.24	0.28	0.31	0.35	0.39	0.43	0.47	0.50	
5	N	X0									
6	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	
7	1	0.0500	0.0595	0.0690	0.0785	0.0880	0.0975	0.1070	0.1165	0.1260	
8	2	0.0095	0.0133	0.0177	0.0227	0.0283	0.0343	0.0409	0.0480	0.0555	
9	3	0.0019	0.0031	0.0048	0.0070	0.0097	0.0129	0.0168	0.0213	0.0264	
10	4	0.0004	0.0007	0.0013	0.0022	0.0034	0.0050	0.0071	0.0097	0.0130	

# O Diagrama de Bifurcação

- Para alguns valores de  $R$  o sistema tem um atrator
- Para outros valores, tem dois
- ... a cada bifurcação, dobramos o número de atratores
- ... o que por fim nos leva ao caos!



**O Diagrama de bifurcação é um gráfico dos atratores em função do parâmetro de controle**

# Se divertindo com a Planilha

O que é interessante de se observar:

- Faça gráficos de  $x_n$  como função de  $n$  para vários valores de parâmetros de controle  $r$ .
  - Por exemplo varie  $r$  de 0.5 até 4 de 0.25 em 0.25. O que acontece? Deixe  $x_0$  fixo em 0.5.
- O número de iterações é importante a solução deve atingir a estabilidade (quando isso é possível) (digamos 500 no mínimo)
- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas contra o parâmetro de controle. Veja o que ocorre.

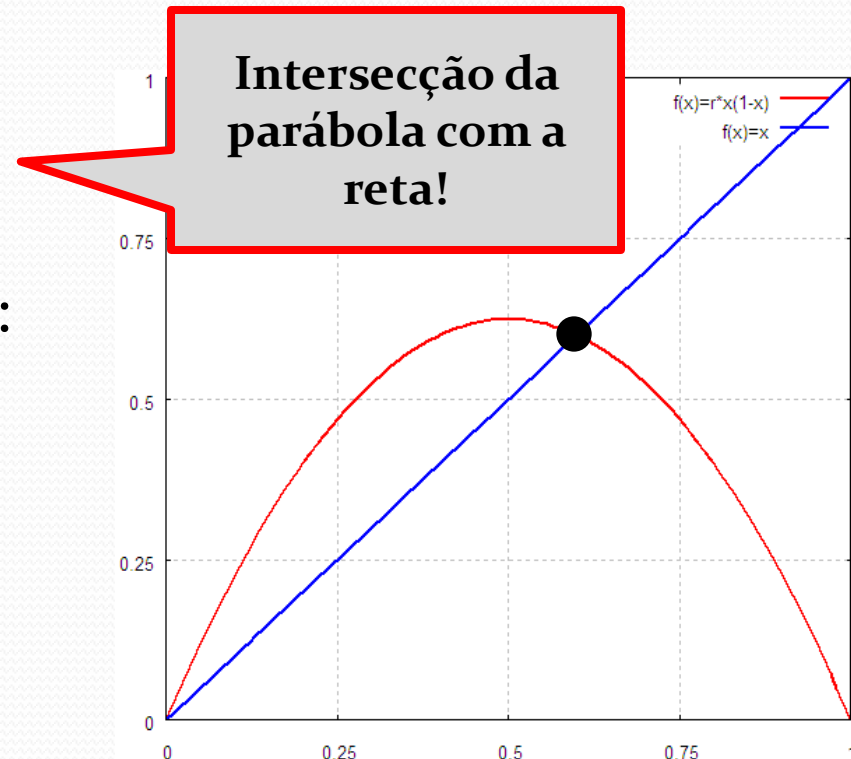
# Previendo os Atratores

- Há uma maneira de prever quais seriam os atratores?
  - Quando chega no atrator qualquer iteração fornece sempre o mesmo valor. Matematicamente:

$$x_{n+1} = x_n \Rightarrow rx_n(1-x_n) = x_n$$

- As soluções dessa equação são:

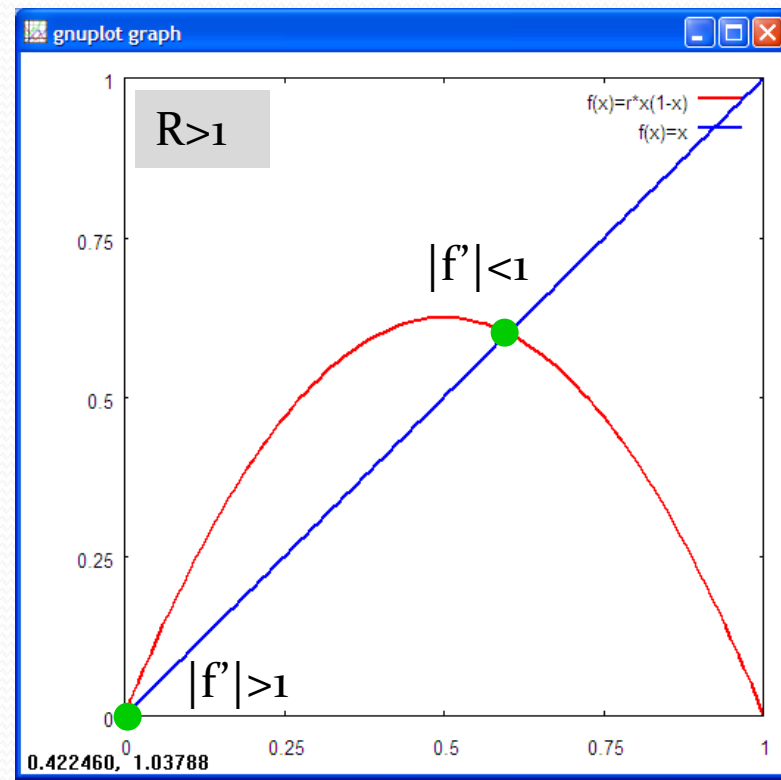
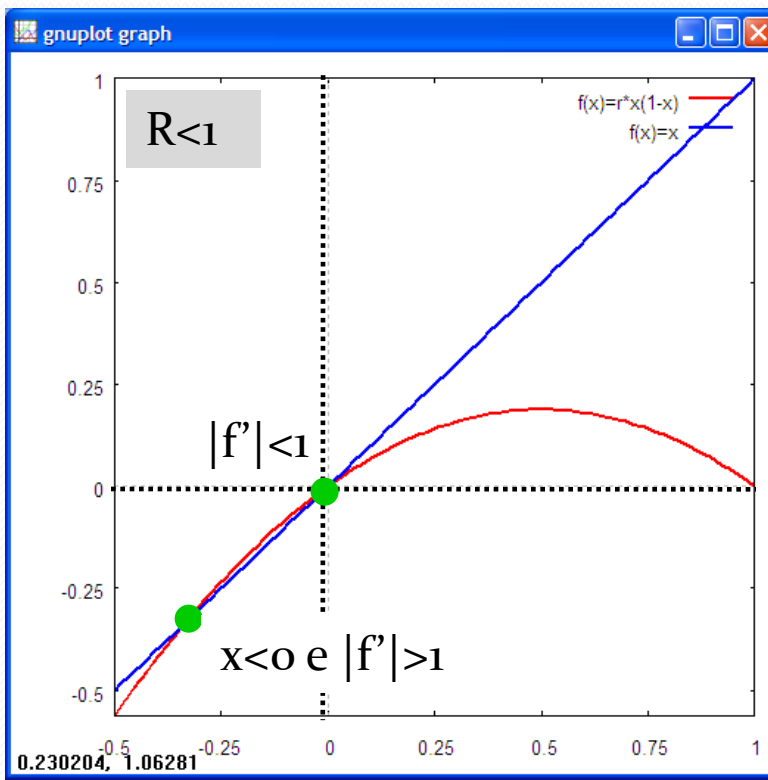
$$x_n = 0 \text{ e } x_n = (1 - 1/r)$$



- Será que ambas as soluções são atratores?

# Previendo Atratores

- Vimos no Applet que para  $r < 1$ ,  $x_n = 0$  é o atrator e  $x_n = (1 - 1/r)$  não é
- Vimos na planilha que para  $r > 1$ ,  $x_n = (1 - 1/r)$  é o atrator e  $x_n = 0$  não é.
- Onde ocorre essa troca? e qual a condição para ser um atrator?
- Não vamos provar matematicamente, mas a condição para ser um atrator é que **módulo da derivada  $f'(x_n)$  seja menor que 1** (ou seja que a parábola não esteja mais inclinada do que a reta)



# As Soluções de $x_{n+1}=x_n$

- A derivada é simplesmente:

$$f'(x_n)=r-2rx_n$$

- Caso  $x_n \rightarrow 0$

- $f'(0)=r$

- Para que seja um atrator  $|f'| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$

- e como  $r > 0$  então:  $0 < r < 1$

- Caso  $x_n \rightarrow 1 - 1/r$

- $f'(1 - 1/r)=2-r$

- Para que seja atrator  $|f'| < 1 \Rightarrow |2-r| < 1 \Rightarrow 1 < r < 3$

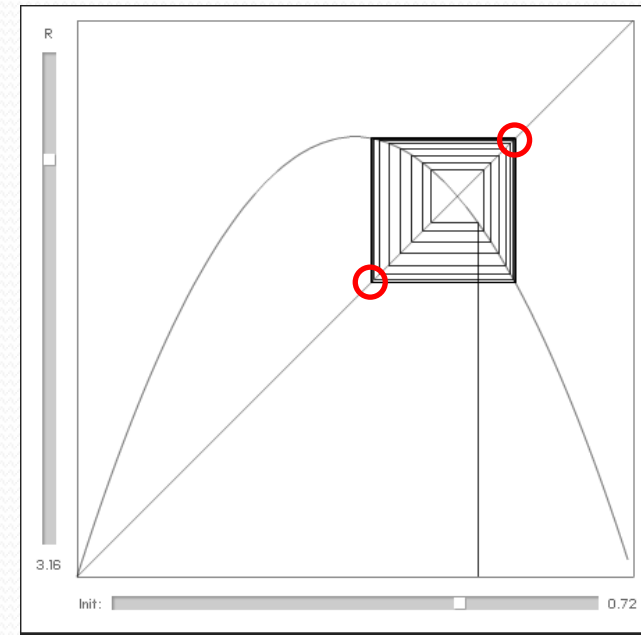
- **VERIFIQUEM** isso no applet!

# Previendo 2 Atratores

- Observamos na planilha e no applet que para determinados valores de  $r > 3$ , não tem **1** atrator, mas **2** atratores!
- Como prever isso? Basta usar a condição  $x_{n+2} = x_n$ , o que significa que a cada duas iterações repete-se um valor
- Vamos calcular:

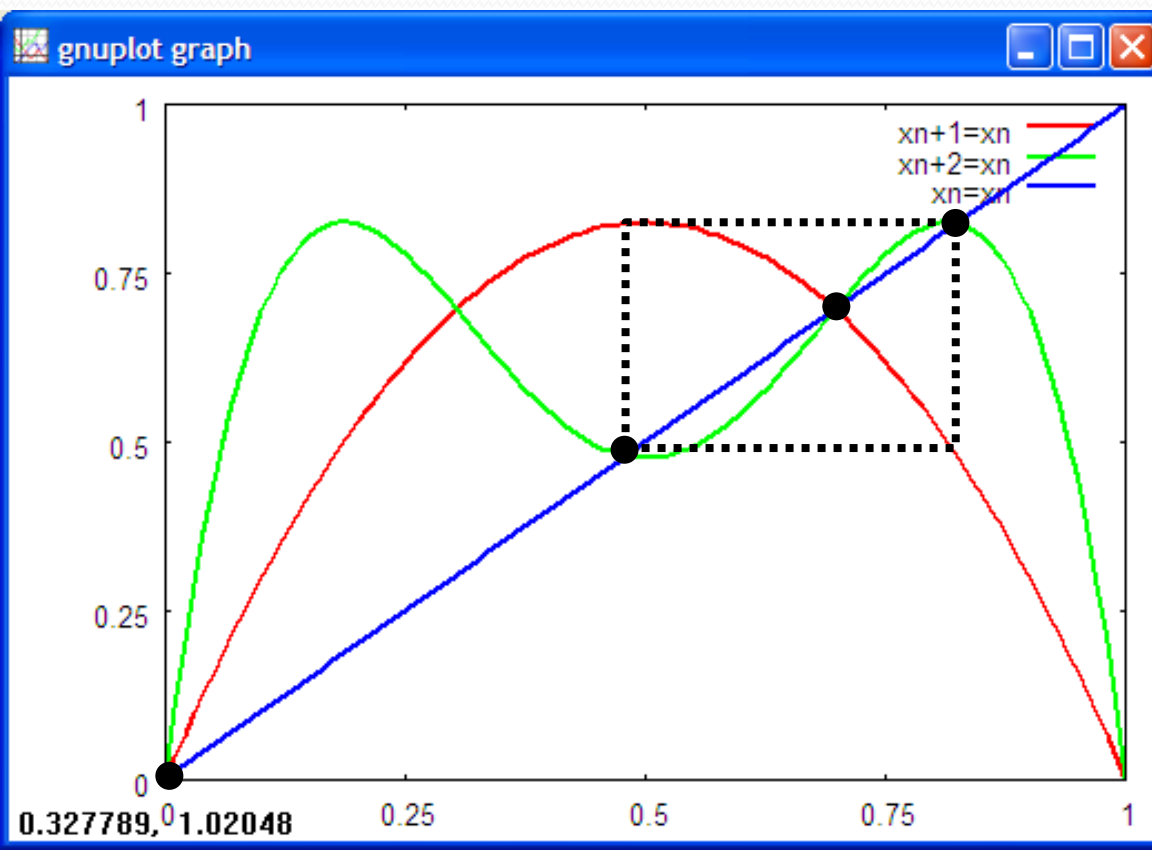
$$\begin{aligned}x_{n+2} &= rx_{n+1}(1 - x_{n+1}) \\ &= r[rx_n(1 - x_n)][1 - rx_n(1 - x_n)] = x_n\end{aligned}$$

- Ou seja, agora os atratores estão na intersecção da reta com um polinômio de 4º grau.



# As Soluções de $X_{n+2}=X_n$

- No gráfico vemos um exemplo das soluções. Duas delas coincidem com as anteriores, mas neste caso ambas tem  $|f'| > 1$  e não servem.
- As outras duas soluções são:



$$x_n = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Aplicando a condição para a existência de atratores:

$$|f'(x_n)| < 1,$$

- chega-se à conclusão que

$$3 < r < (1 + \sqrt{6})$$

- vocês podem verificar isso com o applet.



# Tarefas 1 – para síntese

## A convergência para os atratores:

- Fazer os gráficos de  $x_n$  como função de  $n$  para vários valores de parâmetros de controle. Deixando  $x_0$  fixo em **0.5**, faça:
  - Três valores de  $r$  para  $0 < r < 1$  (no mesmo gráfico)
  - Três valores de  $r$  para  $1 < r < 3$  (idem)
  - Dois valores de  $r$  para  $3 < r < 1 + \text{raiz}(6)$  (idem)
  - **Atenção: que intervalo de  $n$  é interessante mostrar para cada um deste gráficos? Precisa mostrar até  $n=1000$ ? Queremos ver os regimes transientes e estacionários.**

# Tarefas 2 – para síntese

## Sensibilidade a condição inicial:

- Fazer gráficos de  $x_n$  como função de  $n$  para os regimes **com e sem caos** partindo de **2** condições iniciais muito próximas:  
 $x_0=0.5$ ,  $x_0=0.500001$ 
  - **Atenção:** Queremos ver a separação das soluções!!

## Diagrama de bifurcação:

- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas (os valores lá no final da tabela) em função do parâmetro de controle.
  - **Atenção:** O número de iterações é importante pois a solução deve atingir a estabilidade (quando existe). No mínimo **1000** iterações.
- Determine a posição da 1º, 2º e 3º bifurcação e calcule a constante de **Constante de Feigenbaum** (com incerteza)

# Tarefas 3 - Relatório

- Leiam os artigos:
  - Li and Yorke, *Period Three Implies Chaos*, American Mathematical Monthly, v. 82, n. 10 (1975) 985-992
  - Robert M. May, *Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos*, J. Theor. Biol., v. 51 (1975 ) 511-524
- Escolham um deles e façam um resumo curto de não mais de uma página.
- Os artigos estão na página da disciplina

# Tarefas 4 - EXTRAS

- Você viu que o sistema tem 1 atrator diferente de 0 quando  $1 < r < 3$ . Demonstre porque os valores  $X_n$ :
  - convergem suavemente para a solução única, para  $1 < r < 2$
  - oscilam em direção a solução única para  $2 < r < 3$
- Você calculou a constante de Feigenbaum usando as intersecções 1º, 2º e 3º. Calcule também usando:
  - 2º, 3º e 4º
  - 3º, 4º e 5º
  - Etc...
- Faça um gráfico da constante encontrada versus intersecções usadas, mostrando que ela converge para o valor esperado.

# Dicas

- A planilha que calcula as 1000 iterações, está no Desktop dos computadores do laboratório, com o nome “**Caos**”.
- E há uma outra que calcula os atratores (as intersecções das parábolas  $x_{n+1} \times x_n$  em função de  $x_0$  e de  $r$ ) chamada “**Função Logística**”.
- Vocês podem levar dessas planilhas para casa, mas tem que cumprir a presença no laboratório. Aproveitem para discutir com os colegas e tirar dúvidas com os monitores e professores.