

Física Experimental IV

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Profa. Eloisa Szanto
eloisa@dfn.if.usp.br
Ramal: 7111
Pelletron

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
nelson.carlin@dfn.if.usp.br
Ramal: 6820
Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br
Ramal: 7016
Basílio, sala 101

Aula 3, Experiência 1 Circuitos CA e Caos

Notícias da disciplina

Podem me procurar! me encontrando, estou sempre a disposição.

Prof. Henrique Barbosa

hbarbosa@if.usp.br

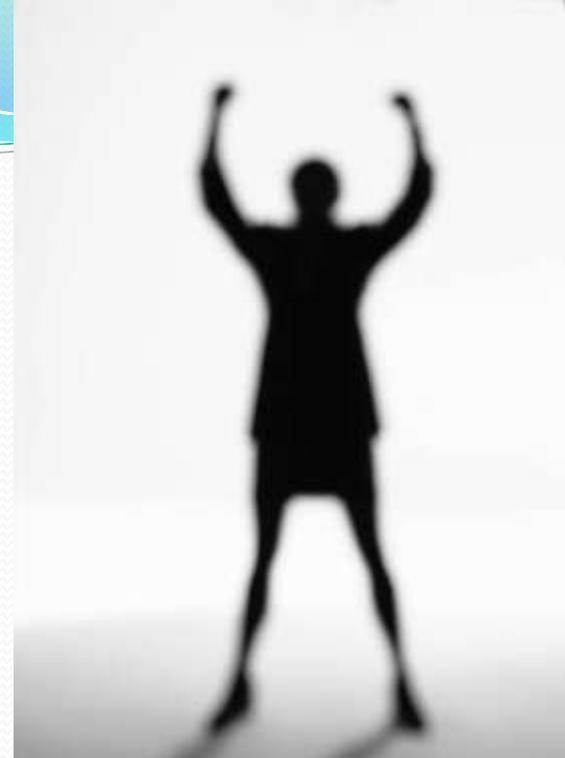
Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

<http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa>

Vejam as notas de aula e os manuais de preparação das sínteses e relatórios.

Usem a lista de discussão para tirar as dúvidas, pois pode ajudar outros alunos.



Notícias da disciplina

- As regras da disciplinas são conhecidas desde lab 3, estão disponíveis no site e serão aplicadas igualmente por todos os professores.
- Marcar horário no lab e não aparecer cancela uma presença pois:
 - Prejudica os outros alunos quando a sala esta cheia
 - Prejudica os professores e monitores quando a sala esta vazia
- **ATENÇÃO:** a nota da síntese depende da entrega dos pedidos **da síntese!** Os pedidos do relatório são comentados apenas para ajudar vocês! Os bonus vão na avaliação final do experimento.

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
 - Noções de CA, filtro RC
 - Circuito integrador e análise de Fourier
 - Ressonância de um circuito RLC simples
 - Funções caóticas: mapa logístico
 - Caos em circuito RLD

TAREFAS DA SEMANA PASSADA

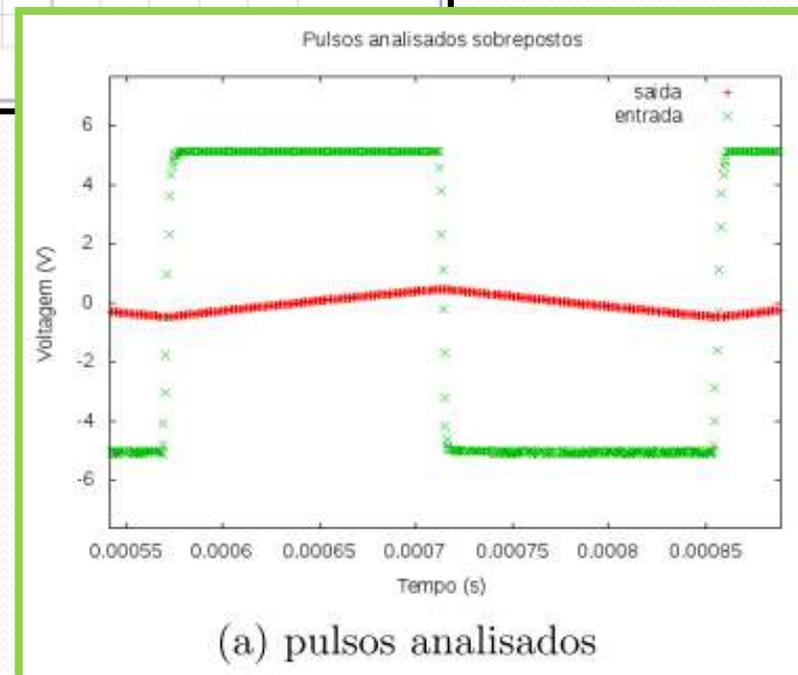
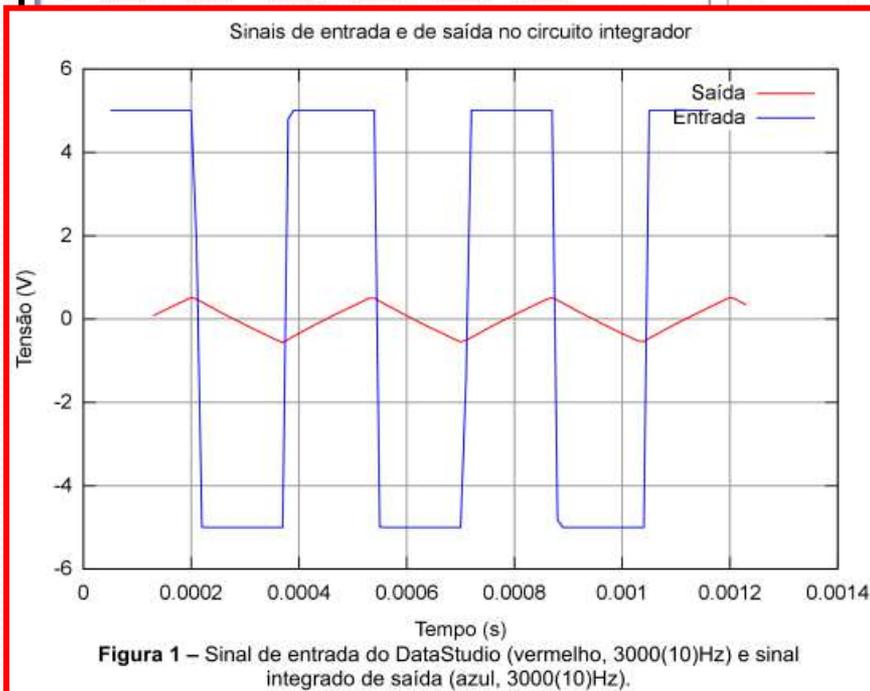
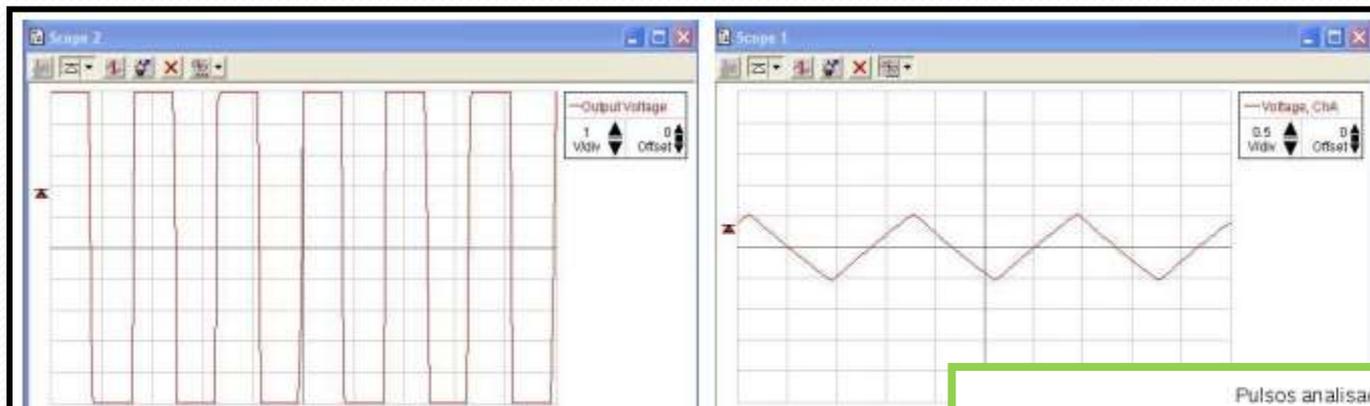


Tarefas 1 – Para Síntese

Usando o mesmo circuito da semana passada, mas agora com **uma onda quadrada na entrada e $f_c=200\text{hz}$** :

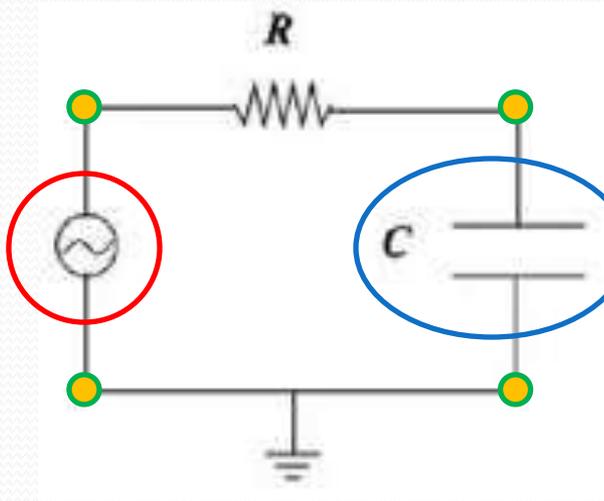
- Meça V_c e V_e no DataStudio e salve os dados para uma frequência tal que:
 - $\omega \gg \omega_c$ (~15 vezes maior)
- Mostre com os dados obtidos que o sinal de saída é proporcional à integral do sinal de entrada:
 - Neste caso, como a entrada é um sinal quadrado, significa que a saída será um triângulo, certo?
 - Mostre que as “inclinações” medidas e teóricas da onda triangular na saída são compatíveis

Entrada x Saída



Circuito RC (aula passada)

- Se pensarmos em termos de quadrupolos:

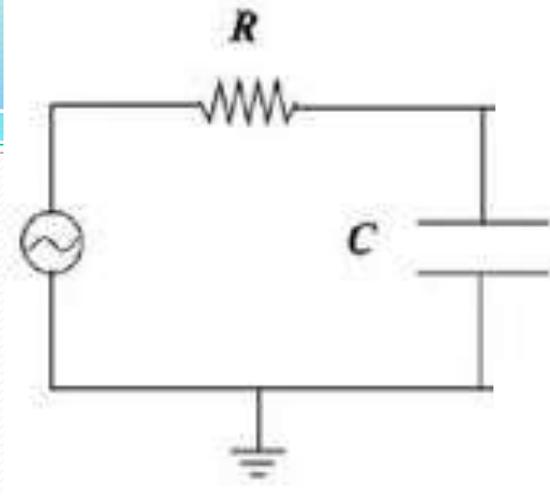


- Sinal de entrada = V_e
- Sinal de saída = V_s

$$\hat{V}_C(t) = \frac{\hat{V}_e}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \hat{G} = \frac{\hat{V}_{saída}}{\hat{V}_{entrada}} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

O ganho relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada... Ou seja, resume o funcionamento do quadripolo.

Circuito RC alta freq



Sabemos que:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$

Com:

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

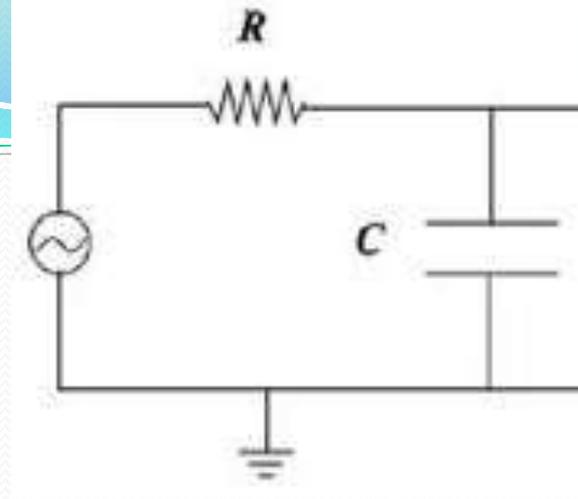
Se $\omega \gg \omega_c$, então:

$$G_0 \approx \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^2}} = \frac{\omega_c}{\omega} \quad \phi_G = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Ou seja:

$$\hat{G}(\omega \gg \omega_c) = \frac{1}{\omega RC} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega RC}$$

Circuito RC alta freq



- Então:
$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = \frac{1}{j\omega RC}$$

- Ou ainda:
$$\hat{V}_s = \frac{1}{j\omega RC} \hat{V}_e$$

- Contudo, temos que:

$$\hat{V}_e = V_e e^{j\omega t} \quad \int \hat{V}_e dt = \frac{1}{j\omega} V_e e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \hat{V}_e$$

- Assim:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

No limite que $\omega \gg \omega_c$, $G_0 \rightarrow 1/\omega RC$ e o circuito acima funciona como integrador da tensão de entrada

Da teoria....

Como:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

Então:

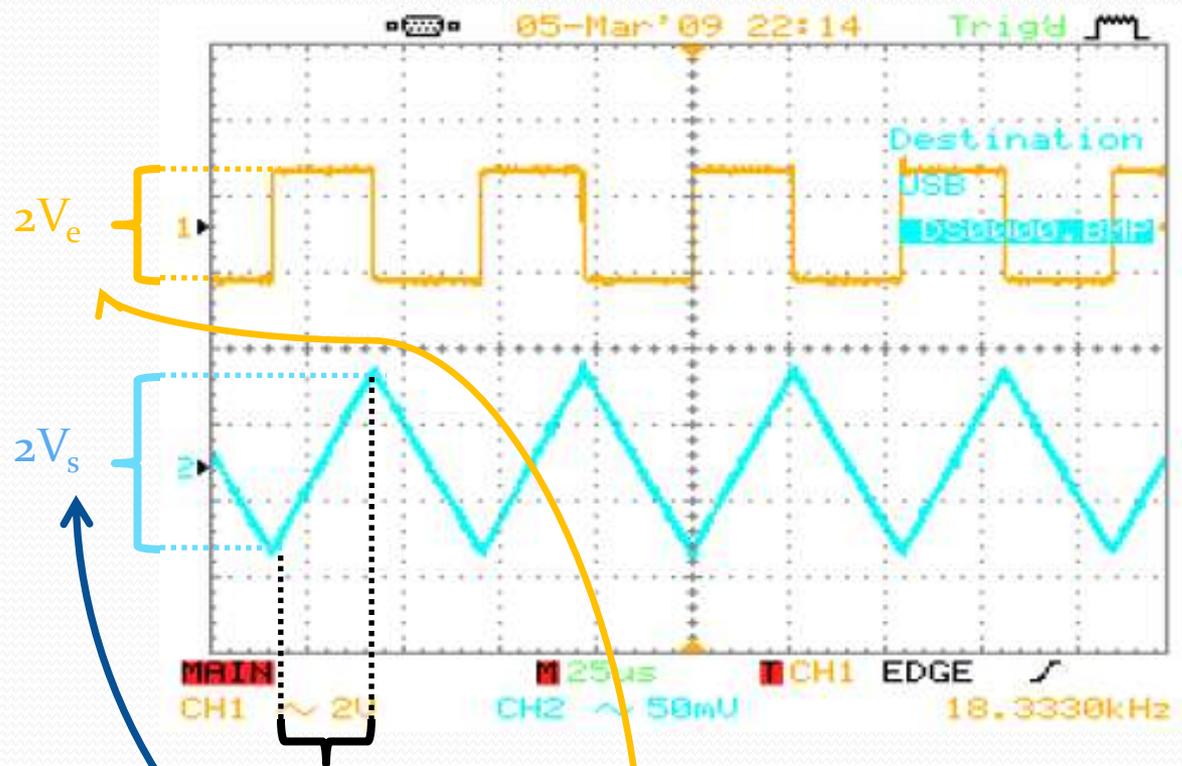
$$\frac{d\hat{V}_s}{dt} = \frac{1}{RC} \hat{V}_e$$

E como:

$$d\phi_s / dt = 0$$

Temos:

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{1}{RC} V_e \Rightarrow \text{inclinação} = \frac{2V_s}{T/2} = \frac{V_e}{RC}$$



Dedução quase completa

Vejam os o que acontece quando $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$, desprezando até termos quadráticos dessa razão:

$$G = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}} = \frac{\omega_c}{\omega} \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega_c}{\omega} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right] \approx \frac{\omega_c}{\omega} \quad \text{ok} \quad (2)$$

Por outro lado, no limite em que essa aproximação é válida, tem-se também $\frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow \infty$, portanto $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. Mais do que isso, α permanece aproximadamente constante em nossa aproximação:

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} = \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \approx \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right] \approx 0 \quad (3)$$

Como $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t)$ e $\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\omega t)$, conclui-se que, para $\omega \gg \omega_c$, os seguintes sinais de entrada são levados aos seguintes sinais de saída:

$$V_0 \cos(\omega t) \mapsto \omega_c \left[\frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) \right] \quad \text{e} \quad V_0 \sin(\omega t) \mapsto \omega_c \left[-\frac{V_0}{\omega} \cos(\omega t) \right] \quad (4)$$

Ora, percebe-se que as expressões entre colchetes, se derivadas, dão os sinais de entrada, em outras palavras, em ambos os casos acima:

$$\frac{d}{dt} V_s(t) = \omega_c V_e(t) \Rightarrow V_s(t) = V_{t_0} + \omega_c \int_{t_0}^t V_e(t') dt' \quad \text{ok} \quad (5)$$

Em resumo: o sinal de saída nada mais é do que a integral do sinal de entrada (multiplicada por ω_c), quando a entrada é uma função seno ou cosseno.

Para um sinal de entrada arbitrário (não exatamente arbitrário, mas sim fisicamente cabível), sabemos da teoria de Fourier ([2]) que pode-se escrever $V_e(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$, em que f é a transformada de Fourier do sinal de entrada e i a unidade imaginária. Eventualmente pode ser que ω assumam apenas valores discretos, do que a medida $d\omega$ é a de contagem, caso em que a integral reduz-se a uma série, mas isso em nada modifica a presente exposição.

Dedução mais simples – H05

Onde

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} e \quad \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

No caso de $\omega \gg \omega_c$, $G_0 \approx \frac{\omega}{\omega_c}$ e $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, logo

$$\hat{G} = \frac{1}{\omega RC} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i\omega RC} \quad \text{ok}$$

Contudo,

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = \frac{1}{i\omega RC} \Rightarrow \hat{V}_s = \frac{\hat{V}_e}{i\omega RC}$$

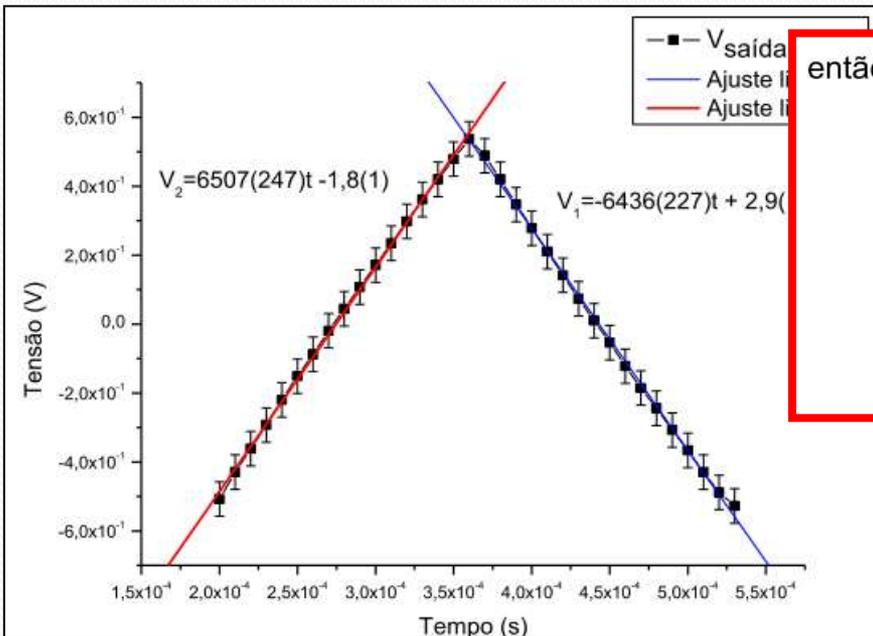
Se

$$\hat{V}_e = V_e e^{i\omega t} \Rightarrow \int \hat{V}_e dt = \frac{\hat{V}_e}{i\omega}$$

Conclui-se então

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt \quad \text{ok}$$

Inclinação do triângulo

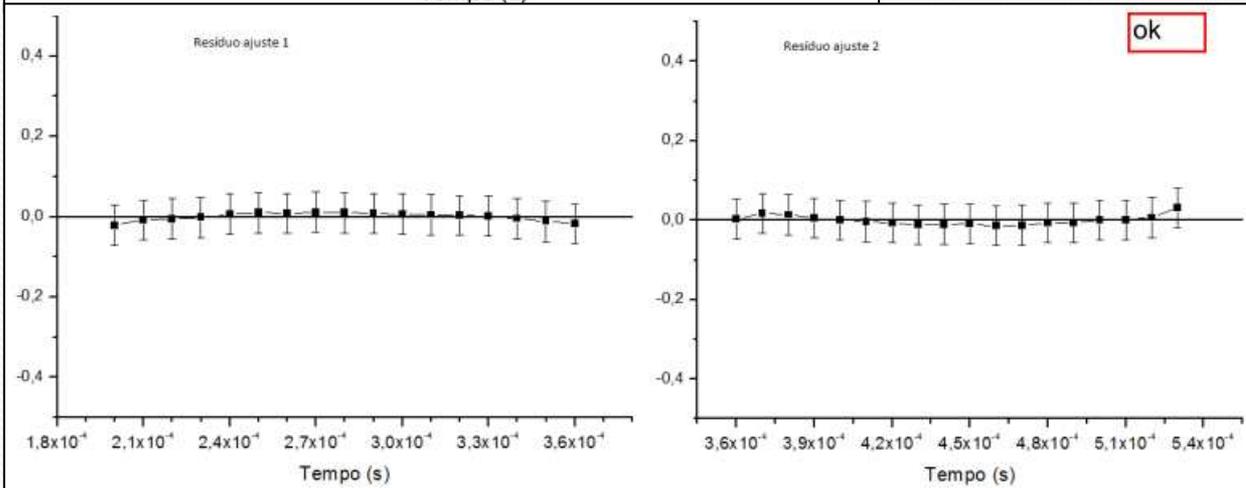


então a inclinação teórica da onda triangular é

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC} V_e$$

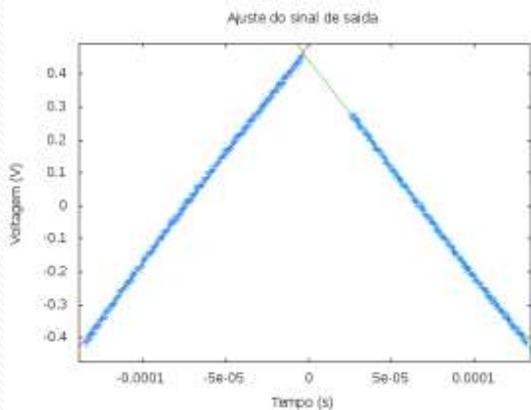
Depois a inclinação experimental foi medida da forma óbvia:

$$a = \frac{2V_s}{T/2}$$

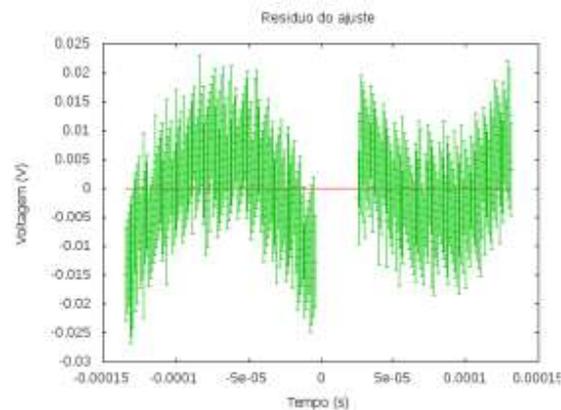


Freq não muito alta?

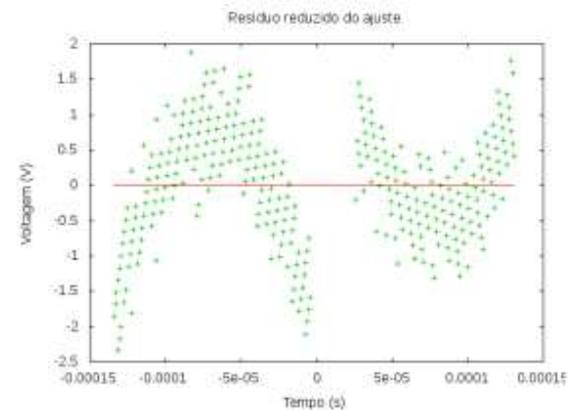
- Alguns grupos perceberam que o sinal de saída não era um triângulo perfeito:



(a) ajuste



(b) resíduos absolutos



(c) resíduos reduzidos

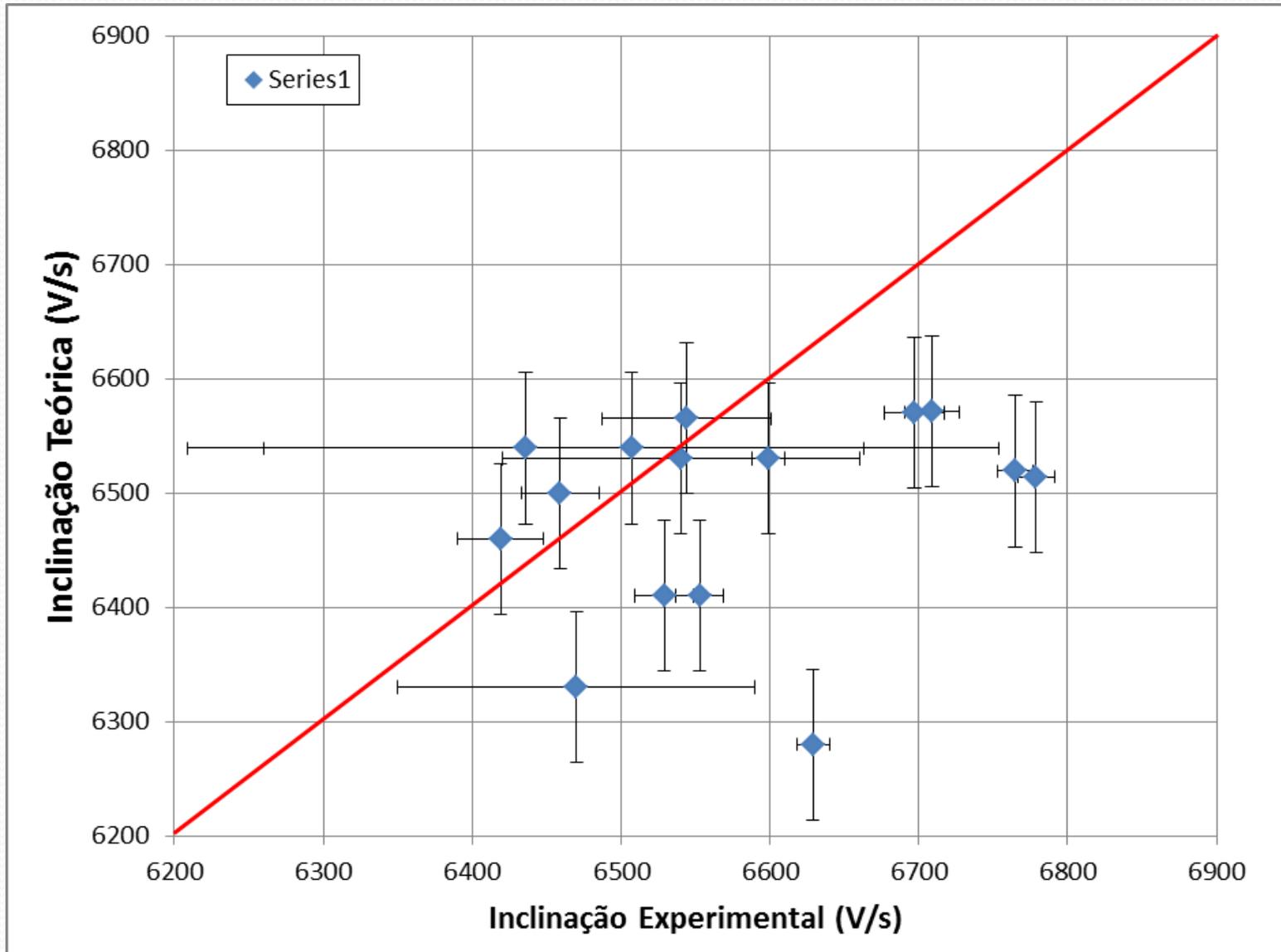
Entretanto, a Figura 2 permite ver claramente que, embora todos os pontos sejam compatíveis com o ajuste, embora existe uma clara tendência de serem os dados não uma reta, mas uma reta "abaulada". Isso, naturalmente, se deve ao fato da aproximação usada de altas frequências. **isso**

De fato, observamos que, para frequências mais baixas, o sinal de saída aparece como um triângulo com arestas arredondadas. Usando uma frequência muito mais alta, essa tendência deve desaparecer, portanto seria interessante repetir a análise para frequências expressivamente maiores que a usada.

Resultados dos vários grupos

	Inclinação experimental (V/s)	Inclinação teórica (V/s)
H01	6507 (247) e -6436 (227)	6539 (1)
H02	6470 (120)	6330 (400)
H03	6629 (11) e 6599 (11)	$6.28 (17) \times 10^2$ e $-6.53 (17) \times 10^2$
H04	6709 (18), -6765 (12), 6697 (20) e -6779 (12)	6571 (42), 6519 (41), 6570 (42) e 6514 (41)
H05	$6.54 (12) \times 10^3$	$6.53 (72) \times 10^3$
H06	$64,49(26)E2$, $-65,53(16)E2$, $64,19(29)E2$ e $-65,29(20)E2$	$65,0(4)E2$, $-64,1(4)E2$, $64,6(4)E2$ e $-64,1(4)E2$
H07	6544 (57)	6565 (66)
H08		
H09		

Experimental \approx Teórico



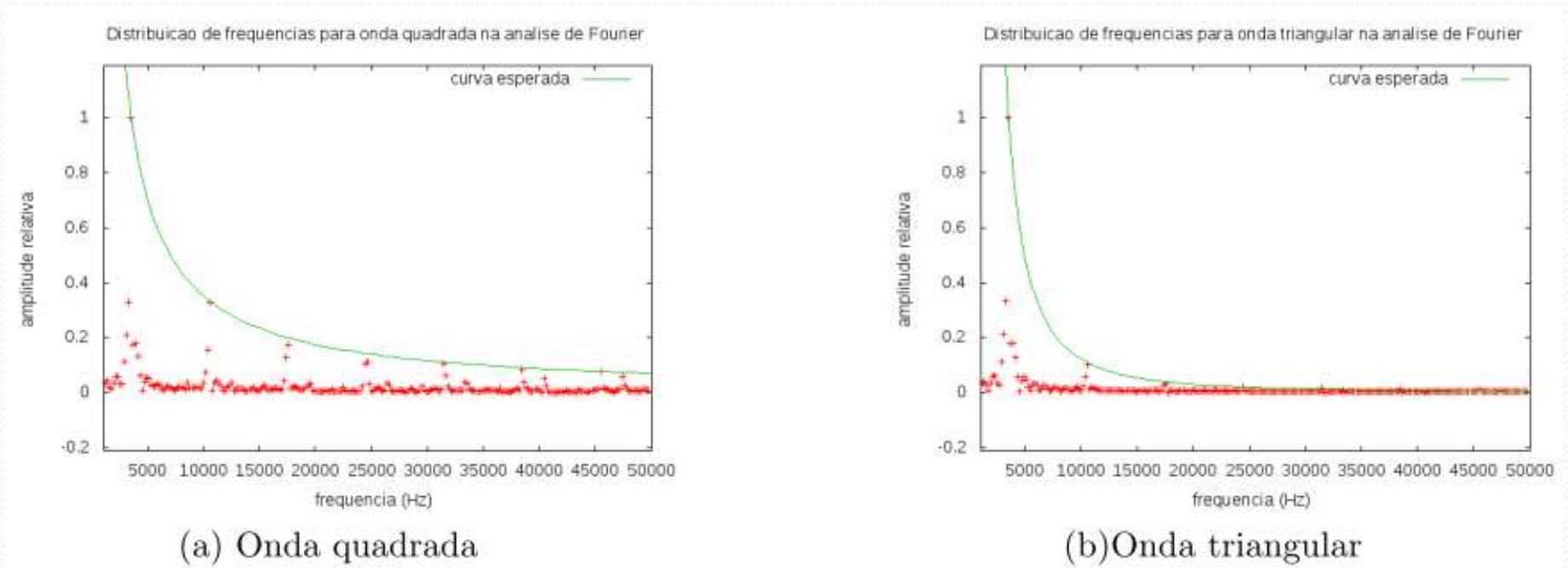
Tarefas 2 – Para Relatório

- Faça a análise de Fourier de uma **onda quadrada** no DataStudio. Fotografe e anote as amplitudes e frequências
 - ▣ Gráfico de **amplitude X frequência**.
 - ▣ Lembre que deve usar a onda quadrada fornecida pela fonte do DataStudio para analisar a onda quadrada usando a função fft do mesmo
- Faça a análise de Fourier de uma **onda triangular** no DataStudio. Fotografe e anote as amplitudes e frequências
 - ▣ Gráfico de **amplitude X frequência**.
- Compare ambas com a previsão teórica, quantitativamente. Comente.

$$Quad(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$
$$Trian(t) = V_0 \frac{8}{\pi^2} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{9} + \frac{\sin(5\omega t)}{25} + \dots \right]$$

H03

- Deviamos mesmo esperar reproduzir a curva? Ou apenas os picos?!?



Quantitativamente era esperado que encontrássemos para o pulso quadrado e para o triângular o espectro que é mostrado na figura 3 em verde, vemos que somente os picos batem com a previsão teórica. Isso pode ser devido ao ruído da interface, e também, do método de análise que o programa faz, que consiste em fixar os extremos de cada ciclo para poder executar a transformada, o que seria se graficássemos algo que lembraria um histograma.

Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

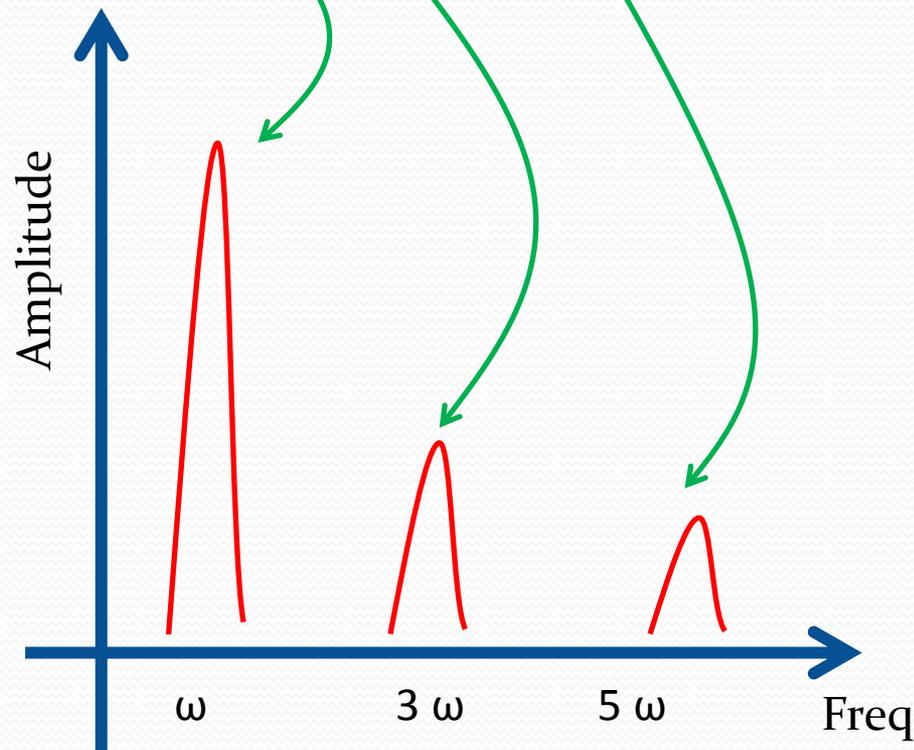
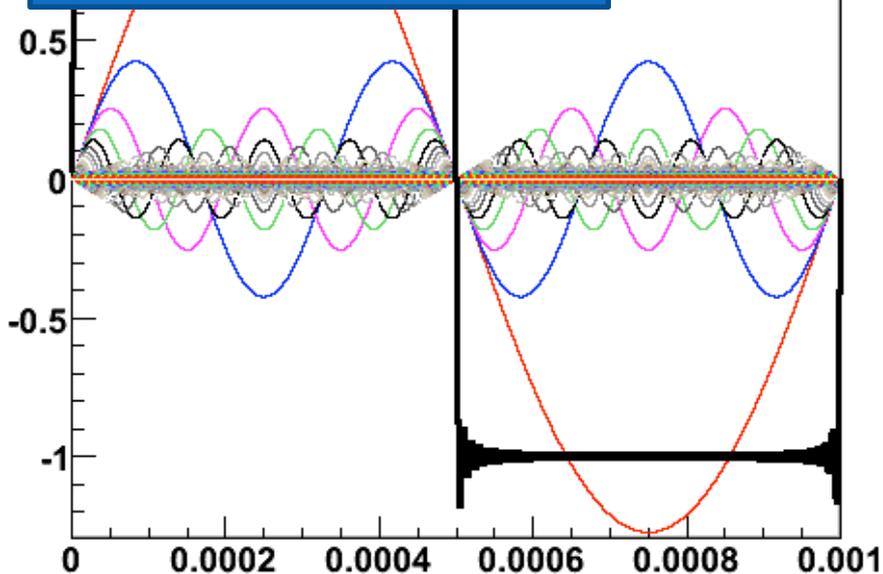
Cada frecuencia presente no sinal vai produzir uma delta na transformada de fourrier!

Sin
f (k
fo
R (Ohm) = 1.00e+02
C (uF) = 1.00e+00

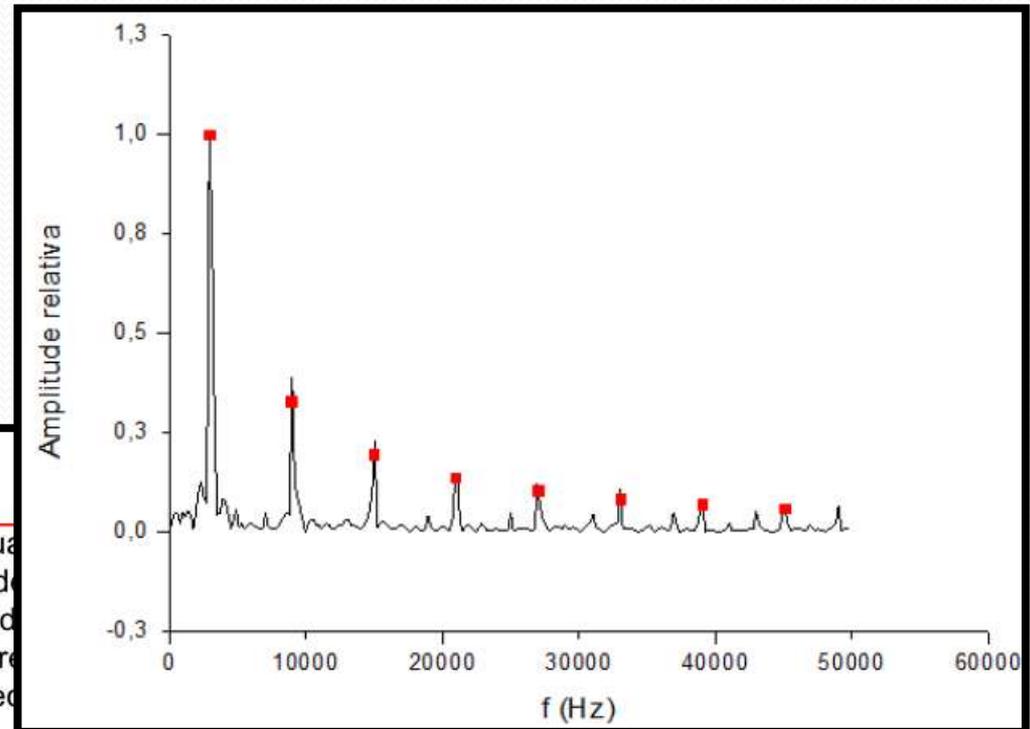
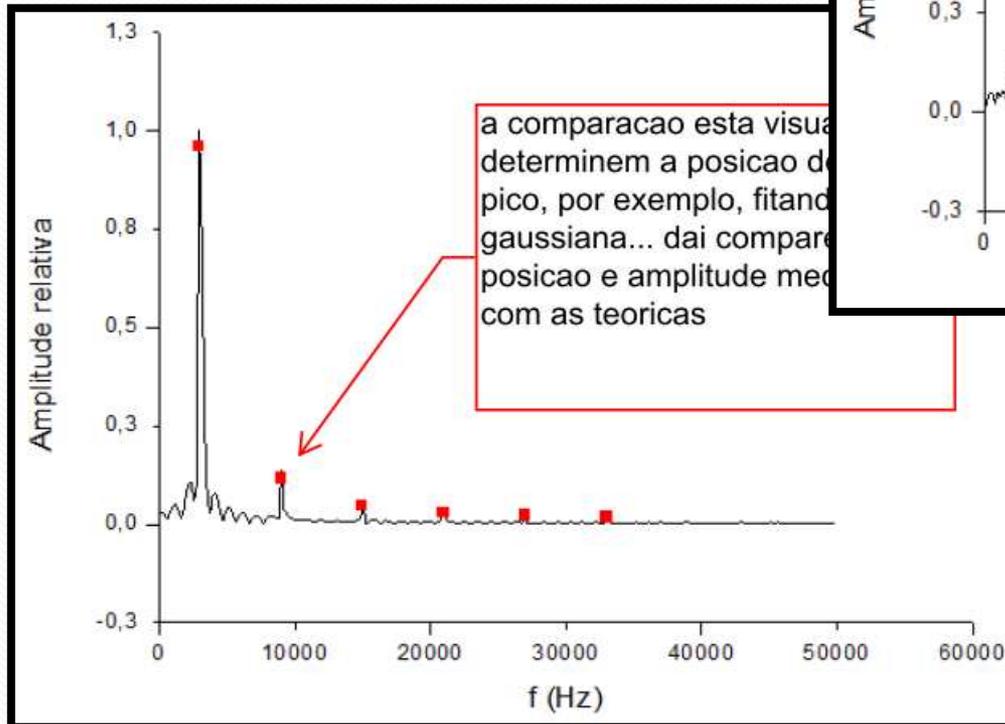
Freq ω

Freq 3ω

Freq 5ω



Outro grupo também fez



Tarefa 3 - EXTRA

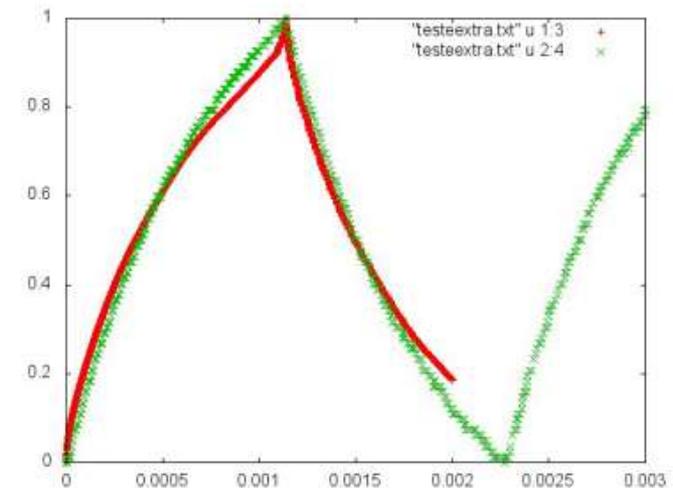
- Meça V_C e V_e também para:
 - $\omega \sim 2 \omega_c$
 - $\omega \ll \omega_c$ (~ 3 vezes)
- Com essas medidas e com a medida de $\omega \gg \omega_c$, mostrar numericamente que $V_C(t)$ pode ser obtido através da aplicação do ganho e da fase para cada frequência que compõe a onda quadrada de entrada
- Compare a sua previsão “teórica” com a medida experimental de $V_C(t)$.
 - Discuta o efeito da escolha do número de termos na série de Fourier no seu resultado

H03

Para essa parte, onde estudamos o comportamento tanto de V_e e de V_s , a montagem do circuito é idêntica a mencionada acima, mas com $R = 328(3) \Omega$ e $C = 2,34(6) \mu F$. Novamente o circuito foi alimentado com uma tensão de entrada quadrada com amplitude de aproximadamente 5V. Aqui, trabalhamos com frequências temporais de $440(5) Hz$ (aproximadamente $2\omega_c$) e de $70,2(7) Hz$ ($\frac{\omega_c}{3}$). [Incertezas determinadas com auxílio do osciloscópio] Com valores de V_e e de V_s , pode-se estudar a hipótese que aplicando o ganho e a fase na tensão de entrada (V_e), podemos obter V_s . Uma vez que, sem perda de generalidade, podemos dizer pelo teorema de Fourier, que V_e e de V_s podem ser representadas por somatórios, fazendo análise por um termo dessa relação:

$$V_e = 4 \frac{V_0}{k\pi} \text{sen}(k\omega t) \Rightarrow V_s = 4 \frac{V_0}{k\pi} G_{k\omega} \text{sen}(k\omega t + \phi_{k\omega})$$

$$G_{k\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \phi_{k\omega} = \tan^{-1} \left(\frac{k\omega}{\omega_c} \right)$$



(a) Série com 500 termos

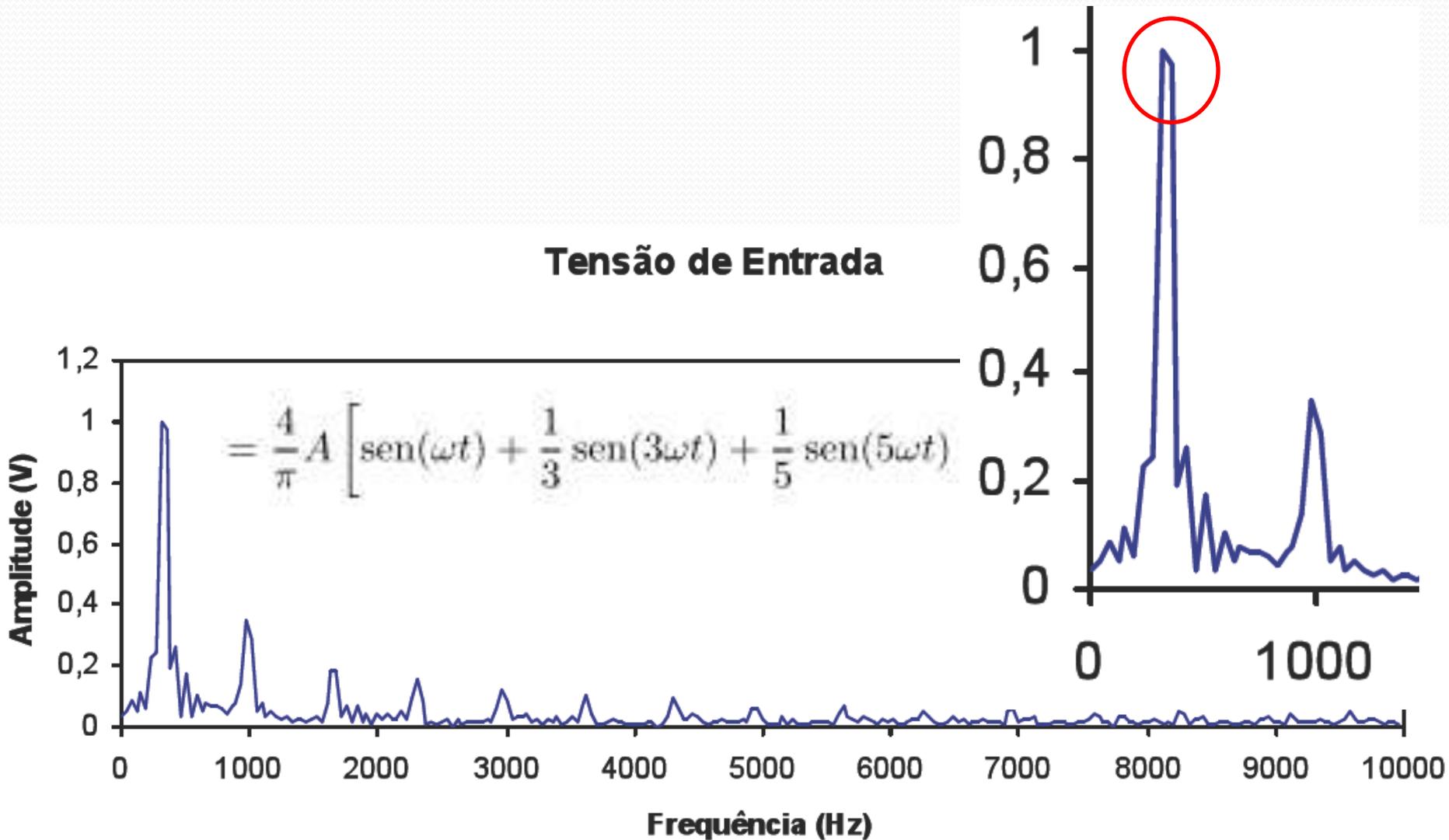
Com auxílio de um programa para o cálculo da série de Fourier, pode-se comparar a curva experimental e a regida pela série calculada ('teórica'). Para o valor de frequência angular de $440 Hz$, temos o resultado apresentado na figura 4. Vale lembrar, que para o cálculo da curva teórica foi usada a hipótese acima de que a tensão de saída provém da aplicação do ganho e da fase.



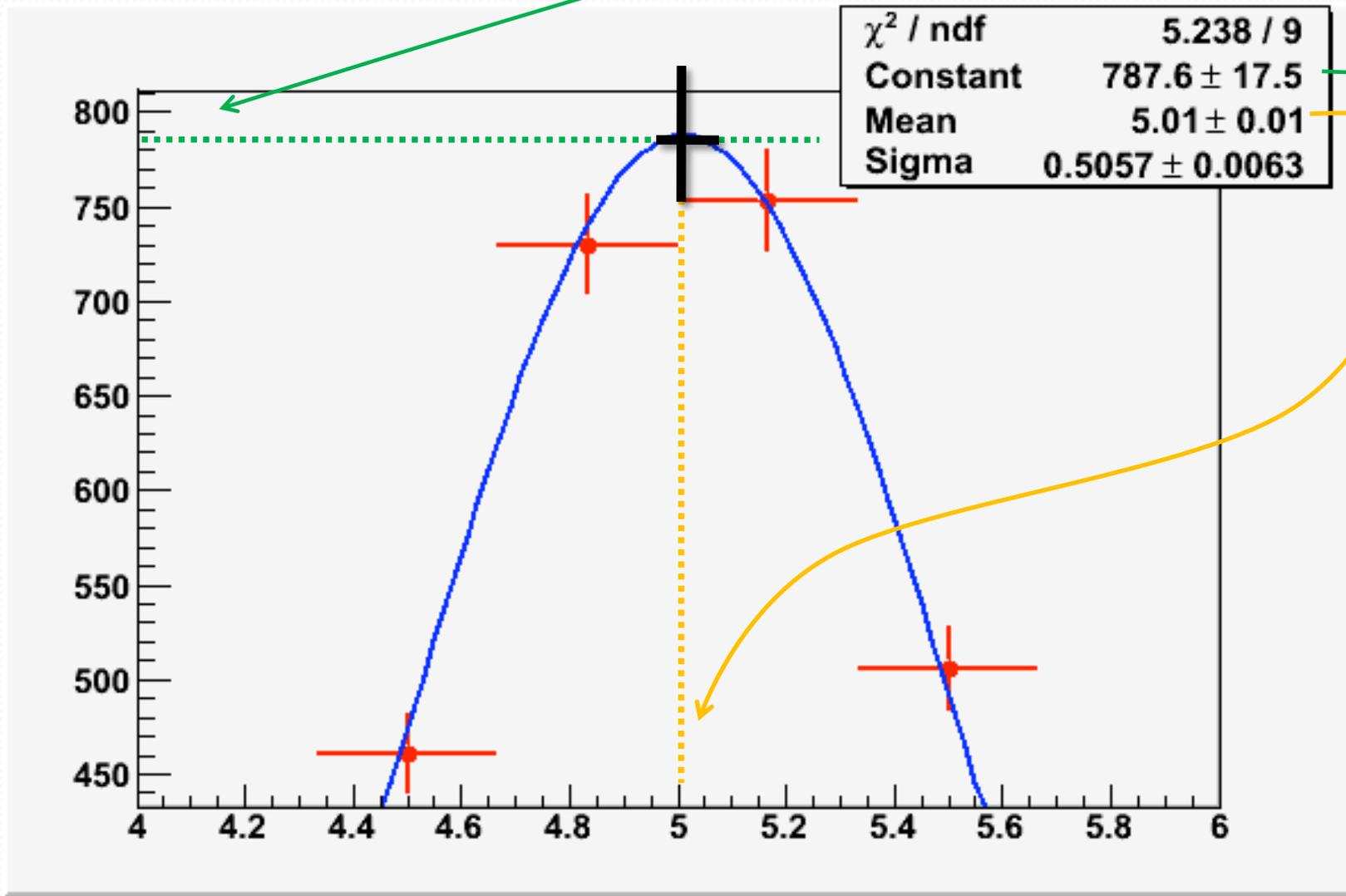
Discussão extra:

1. Pico e ruído da FFT

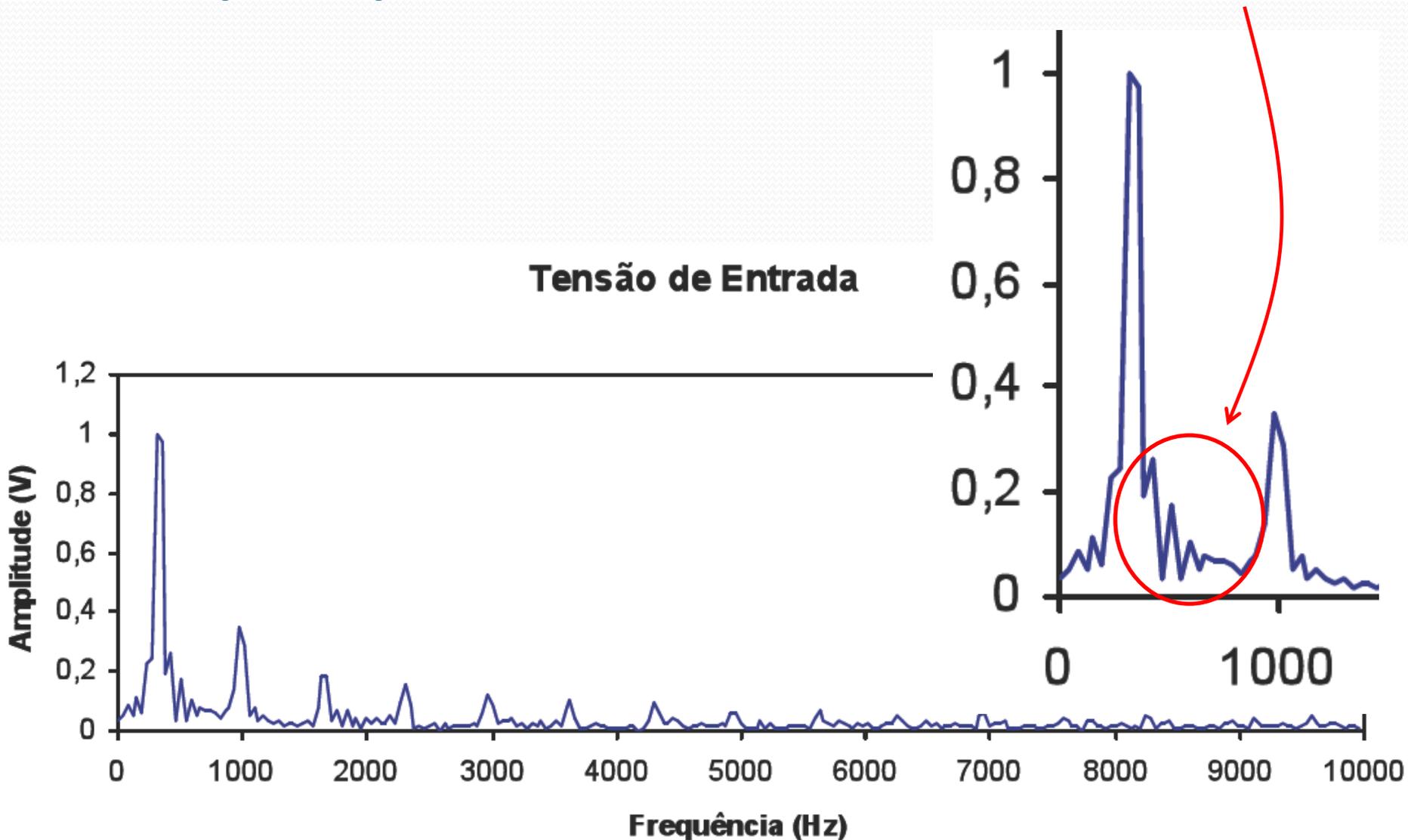
Onde está o pico?



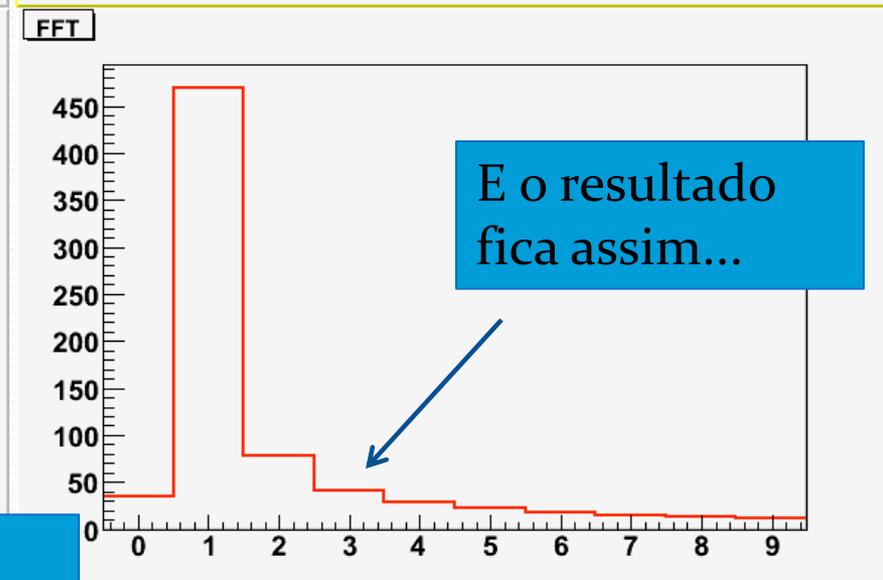
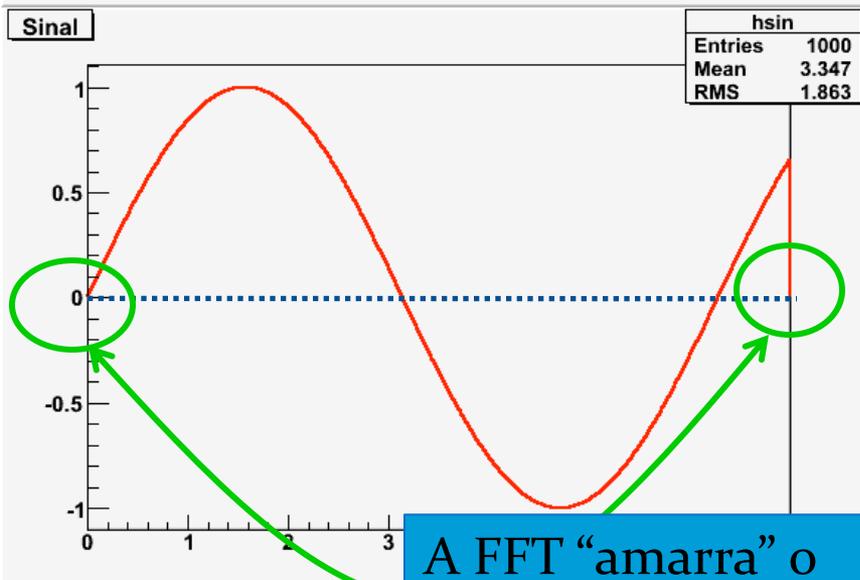
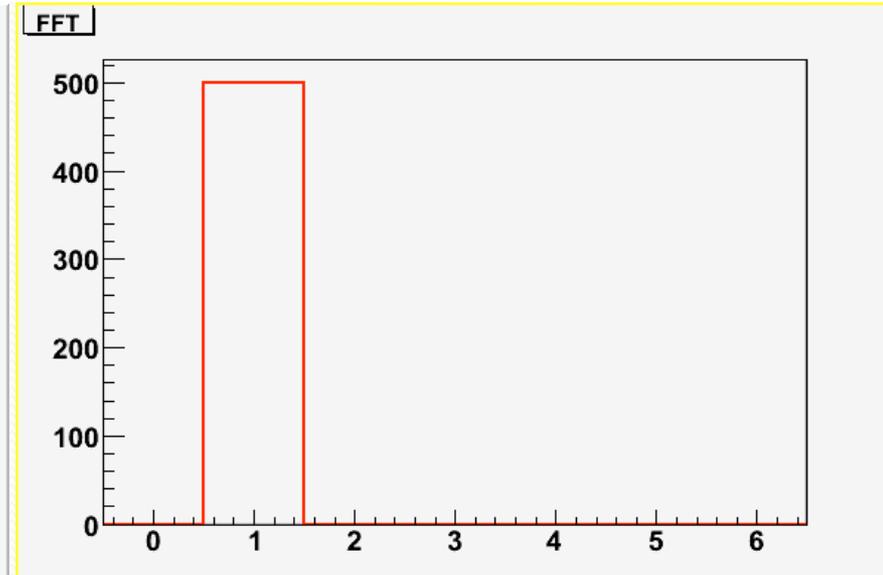
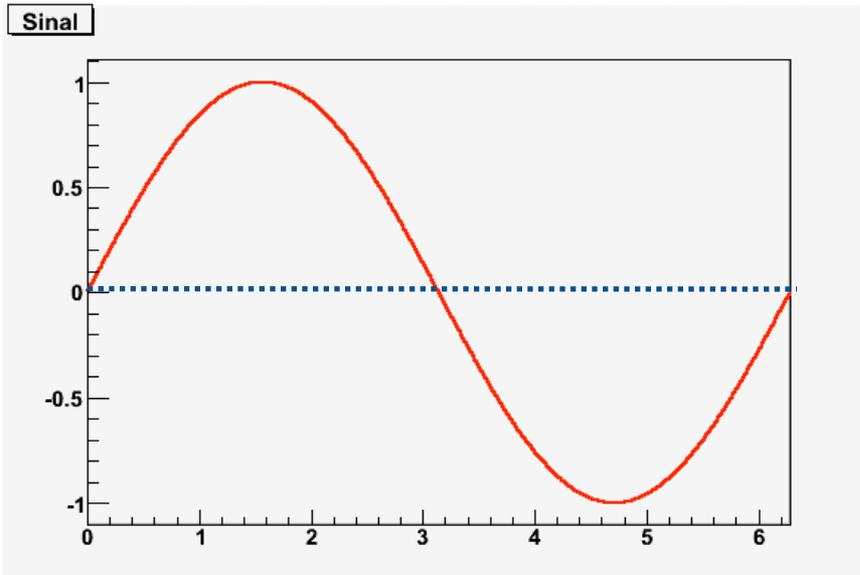
Como medir os picos?



Mas porque a FFT tem tanto ruído?



O Intervalo de Amostragem



E o resultado fica assim...

A FFT “amarra” o começo com o final



Discussão extra:

2. Medindo o ganho em 5min

FFT e Ganho

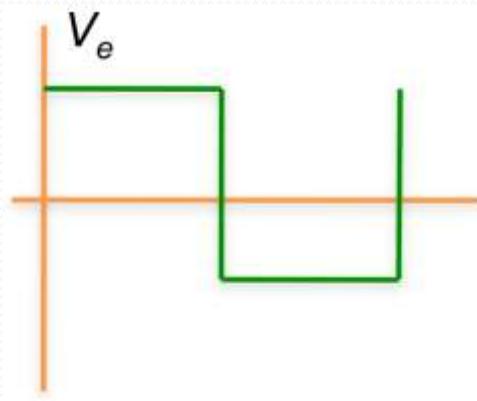
- A medida do Ganho x ω do circuito RC da primeira semana foi bastante cansativa
 - Ajustar frequência
 - Medir V_e
 - Medir V_c
 - Repetir procedimento para cada frequência
 - Pelo menos 1 hora de tomada de dados
- Que tal fazer a mesma medida sem precisar variar a frequência e em 5 minutos?

Sinal de entrada e saída



- O sinal de entrada é composto de várias frequências diferentes.
- Desde que o filtro seja um filtro de frequências, ou seja, $G=G(\omega)$, podemos medir $G(\omega)$ facilmente com a transformada de fourier de um sinal com várias frequências!

Exemplo: Sinal quadrado:



Cada frecuencia do sinal de entrada sera transformada de uma maneira diferente!

$$V_e = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t) + \\ \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t) + \\ \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t) + \\ \dots \end{cases}$$



$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_c)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}(-\omega / \omega_c)$$



$$V_s = \begin{cases} G_{\omega} \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t + \phi_{\omega}) + \\ G_{3\omega} \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega} \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t + \phi_{5\omega}) + \\ \dots \end{cases}$$

Exemplo: Sinal quadrado:

- Dividindo as amplitudes de Fourier da saída pela entrada, temos para o primeiro pico em ω_0

$$\text{em } \omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\text{Amplitude Fourier Saída 1o pico}}{\text{Amplitude Fourier Entrada 1o pico}} = \frac{G_{\omega_0} \frac{4V_0}{\pi}}{\frac{4V_0}{\pi}} = G(\omega_0)$$

$$V_e = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \\ \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \\ \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \\ \dots \end{cases} \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \Rightarrow V_s = \begin{cases} G_{\omega_0} \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega_0 t + \phi_{\omega}) + \\ G_{3\omega_0} \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega_0 t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega_0} \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega_0 t + \phi_{5\omega}) + \\ \dots \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}(-\omega/\omega_c)$$

Exemplo: Sinal quadrado

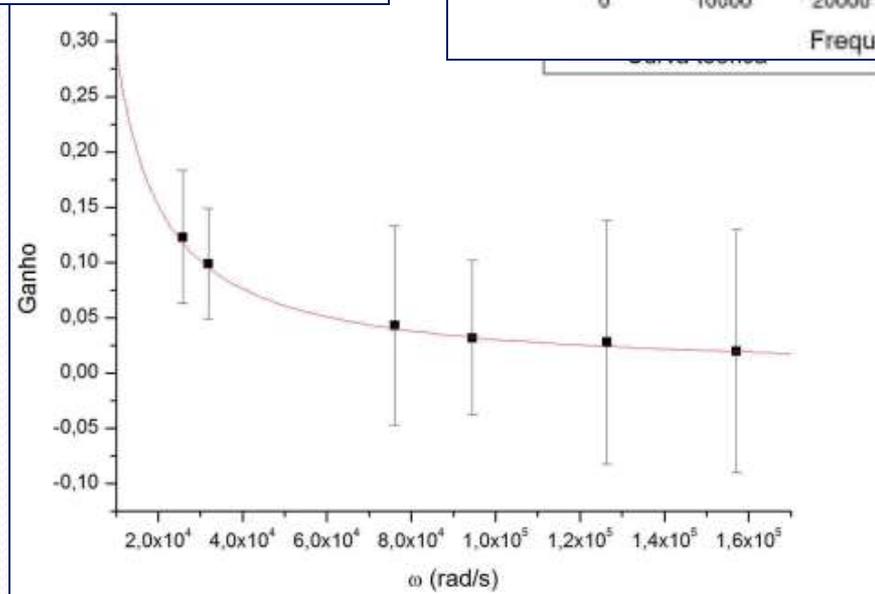
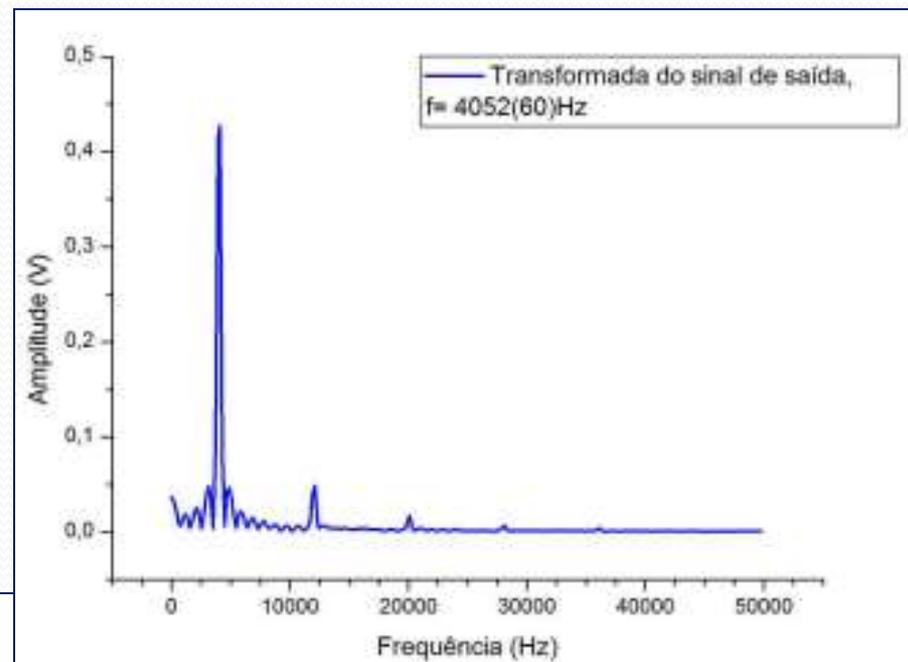
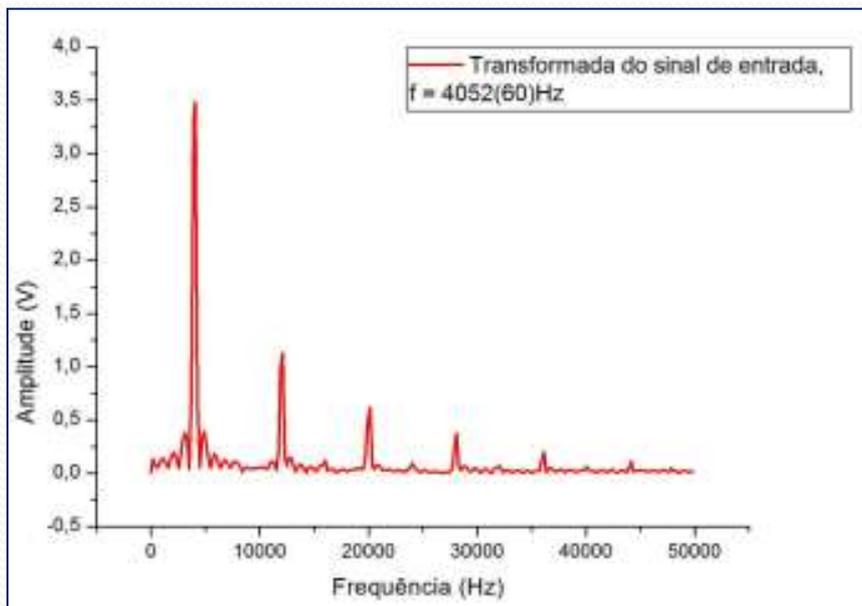
- O resultado é obviamente geral! E pode ser aplicado para obter o ganho (razão entre saída e entrada) para várias frequências de uma só vez.

$$\text{em } \omega = 3\omega_0 \Rightarrow \frac{\text{Amplitude Fourier Saida 1o pico}}{\text{Amplitude Fourier Entrada 1o pico}} = \frac{G_{3\omega_0} \frac{4V_0}{\pi}}{\frac{4V_0}{\pi}} = G(3\omega_0)$$

$$\text{em } \omega = 5\omega_0 \Rightarrow \frac{\text{Amplitude Fourier Saida 1o pico}}{\text{Amplitude Fourier Entrada 1o pico}} = \frac{G_{5\omega_0} \frac{4V_0}{\pi}}{\frac{4V_0}{\pi}} = G(5\omega_0)$$

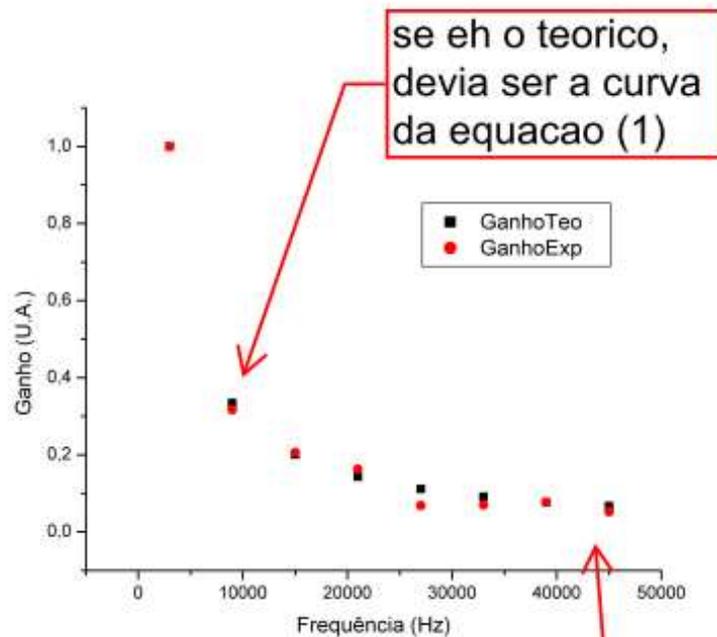


Exemplo de 2010

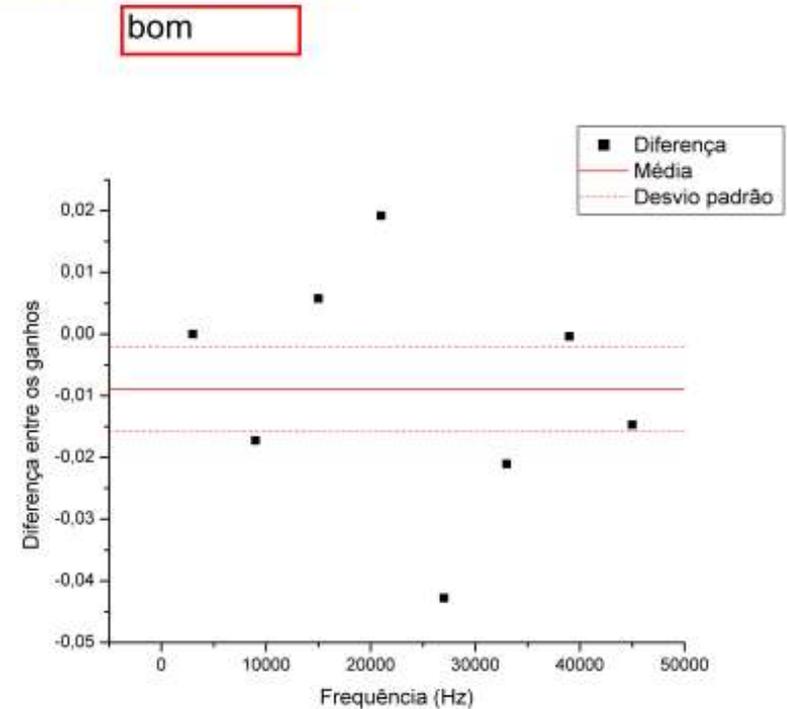


Resultado de 2012 – H09

e na relação entre os coeficientes de Fourier de cada frequência específica. Estes valores foram plotados, exibidos na figura 3.



(a) Ganhos teóricos e experimentais calculados



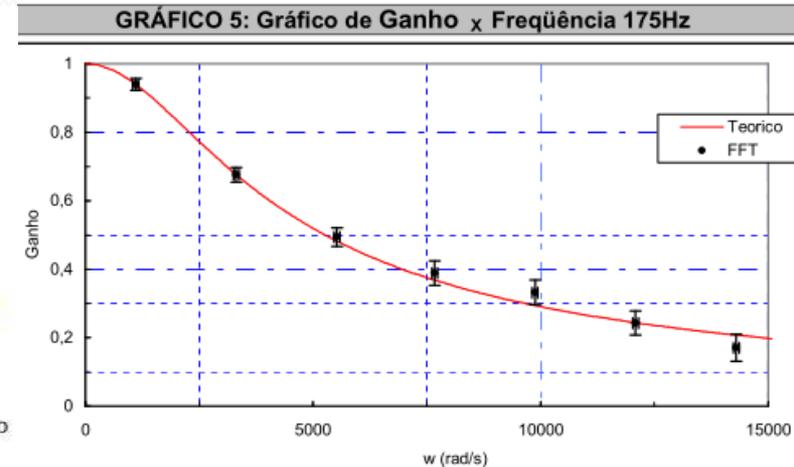
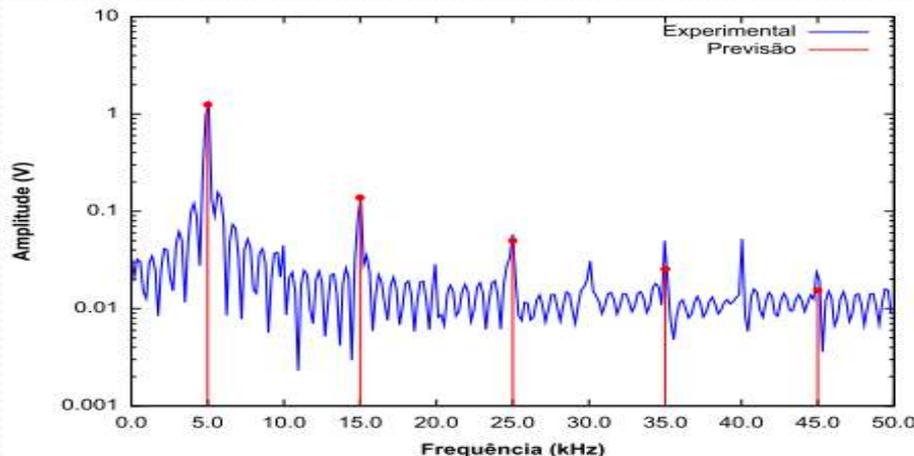
(b) Diferença entre os ganhos
 $\bar{x} = -0,009(7)$

incertezas?

Figura 3

Cuidados

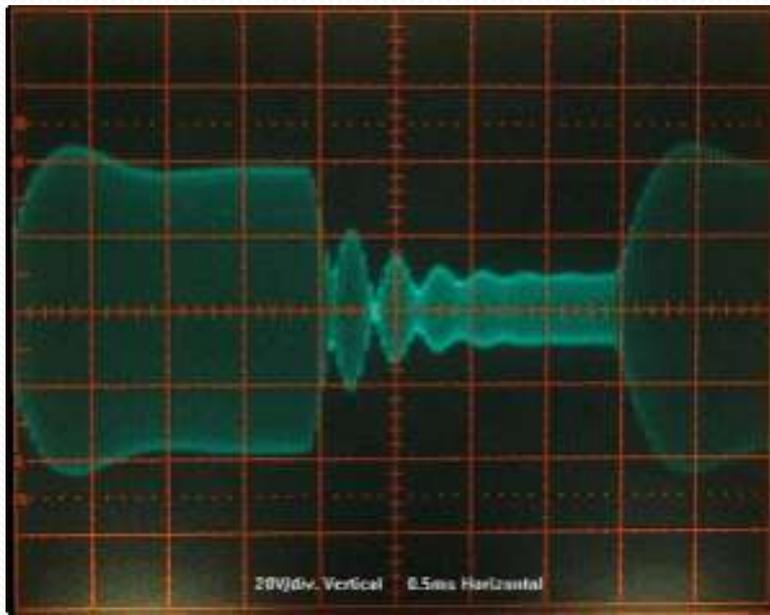
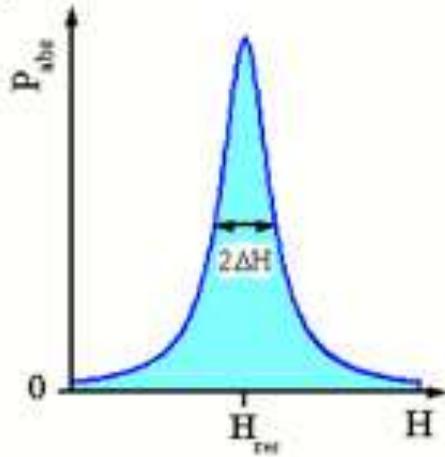
- Quando usamos a FFT, só determinamos em algumas frequências. Porque?
 - Medimos as frequências correspondentes aos picos, pois o ruído dos dois sinais não são correlacionados!
 - Qual a resolução em frequência que conseguimos com uma onda quadrada? É o próprio ω_0
 - Até quantos picos é possível medir?



Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
 - Noções de CA, filtro RC
 - Circuito integrador e análise de Fourier
 - Ressonância de um circuito RLC simples
 - Funções caóticas: mapa logístico
 - Caos em circuito RLD

Aula de hoje: Ressonância no RLC



O Indutor

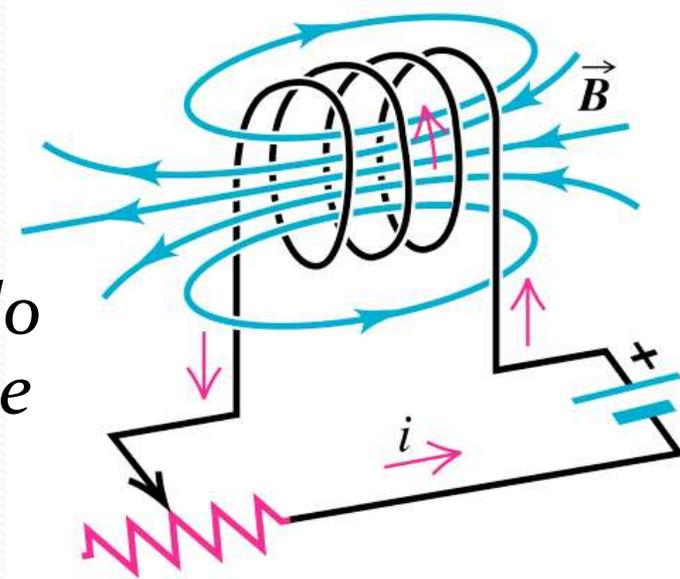
- Ao passar uma corrente elétrica por um indutor, um campo magnético é criado proporcional a corrente

$$B \propto i$$

- Se a corrente for variável no tempo, o campo também será! O que nos faz lembrar da lei de Faraday:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

A tensão elétrica ε_L nos terminais do indutor é proporcional à variação de fluxo magnético através dele.



O Indutor

- Como a única coisa que varia é a corrente:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -cte\frac{di(t)}{dt}$$

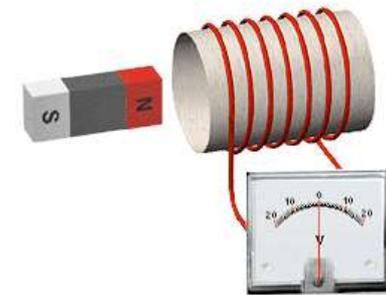
- Vamos chamar a constante de **L**, ou indutância, e a força eletromotriz induzida, ε_L , que é a queda de tensão no indutor, será V_L :

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

L é a indutância, medida em Henry (H)

- Em notação complexa, a corrente passando pelo indutor é:

$$\hat{i} = i_L e^{j\omega t}$$



Indutor – Notação Complexa

- E a tensão será então:

$$V_L = L \frac{di}{dt} = j\omega L i_L e^{j\omega t}$$

- Assim a impedância é dada por:

$$\hat{Z}_L = \frac{\hat{V}_L(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{j\omega L i_L e^{j\omega t}}{i_L e^{j\omega t}} = j\omega L$$

Reatância indutiva

- Ou, usando a fórmula de Euler:

$$\hat{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

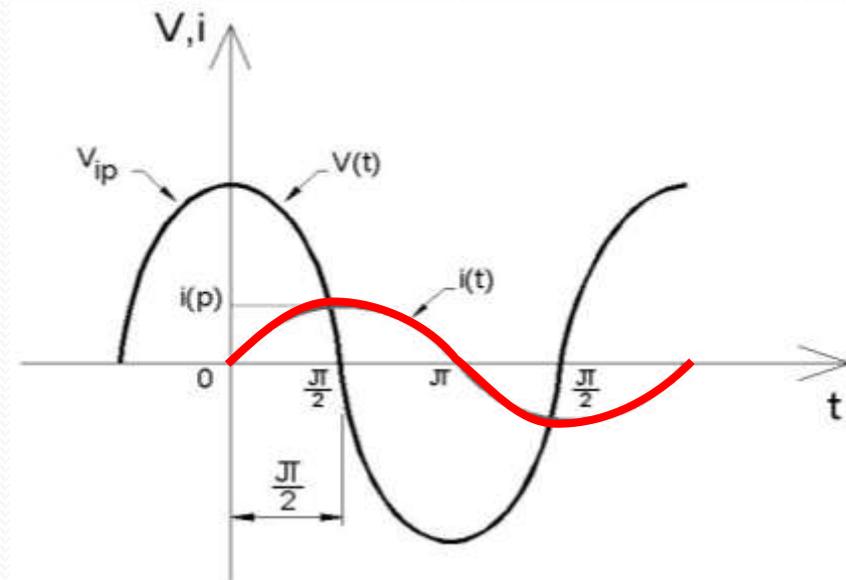
Portanto a tensão está adiantada de $\pi/2$ em relação a corrente

A fase da tensão

Corrente: $\hat{i}(t) = i_L e^{j\omega t}$

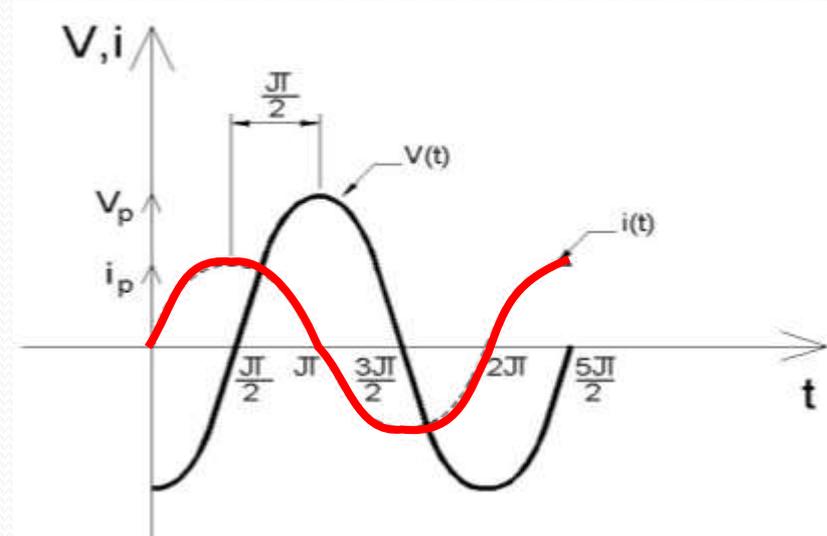
- Indutor:

$$\begin{aligned}\hat{V}_L(t) &= \hat{Z}_L \hat{i}(t) && \text{adiantada} \\ &= \omega L i_L \exp \left[j \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]\end{aligned}$$



- Como era no capacitor?

$$\begin{aligned}\hat{V}_C(t) &= \hat{Z}_C \hat{i}(t) && \text{atrasada} \\ &= \frac{1}{\omega C} i_C \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

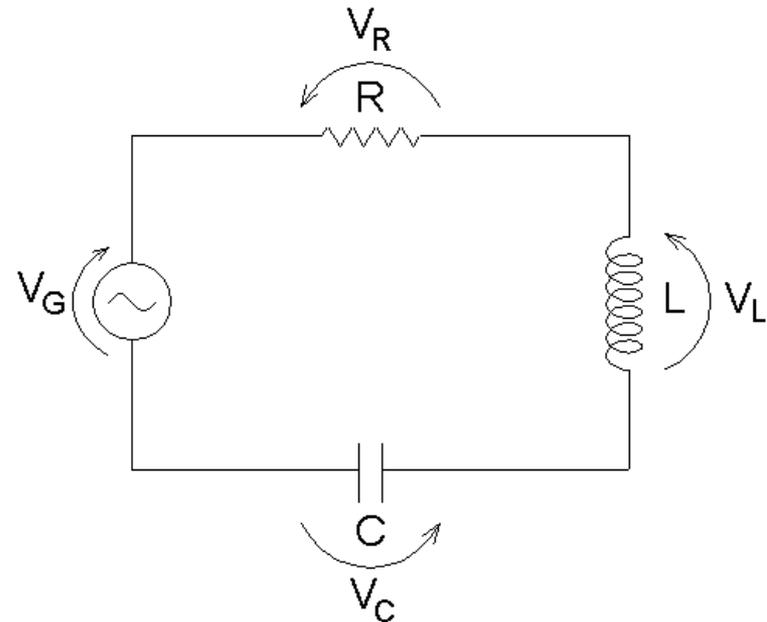


Circuito RLC

- Já sabíamos tudo sobre capacitores
- Agora sabemos tudo sobre indutores

O próximo passo é obvio... Vamos juntar tudo!

Dado um sinal de entrada $V_g(t)$, qual a tensão em cada um dos elementos e qual a corrente no circuito?



Circuito RLC

A equação básica é:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = V_G(t)$$

No indutor temos:

$$V_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$$

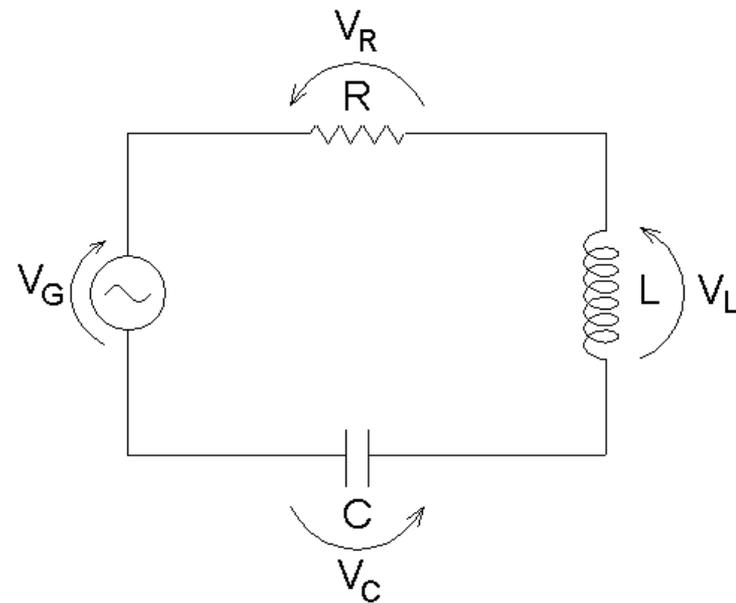
No resistor temos:

$$V_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$$

No capacitor temos:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$V_G(t) = V_0 \cos(\omega t)$$



A Equação do Circuito RLC

Substituindo tudo na equação se obtém:

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = V_o \cos(\omega t)$$

A solução para $q(t)$ é a solução geral da homogênea mais uma solução particular da equação acima.

- Solução da homogênea
 - comportamento transitório do circuito (quando ele é ligado ou desligado): oscilador harmônico amortecido
- Solução particular
 - comportamento em regime estacionário, depois que o comportamento transitório desaparece: oscilador forçado

A dedução pode ser encontrada no capítulo 2 de Mecânica de K. R. Symon e nas notas de aula do curso FAP-212, aulas 4 e 5.

Caminho mais fácil...

- Como é um **circuito em série** a impedância complexa total do circuito é a soma das impedâncias complexas de cada elemento:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- A **impedância real** será:

$$Z = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- E a **fase** será:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{Im}[\hat{Z}]}{\operatorname{Re}[\hat{Z}]} = \omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}$$

$$\hat{Z} = Ze^{j\phi}$$

A Corrente no Circuito RLC

- Sendo a tensão de entrada: $\hat{V}_G = V_G e^{j\omega t}$
- A corrente pode ser escrito como:

$$\hat{i} = \frac{\hat{V}_G}{\hat{Z}} = i_0 e^{j(\omega t - \phi_i)}$$

- Portanto:

$$\hat{i} = \frac{V_G e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V_G}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

A fase da corrente (ϕ_i) vem da impedância total (ϕ).

Tensões Nos Elementos

- Agora o problema está resolvido, pois como a corrente é a mesma em todo o circuito, podemos calcular a tensão no:

- Resistor:

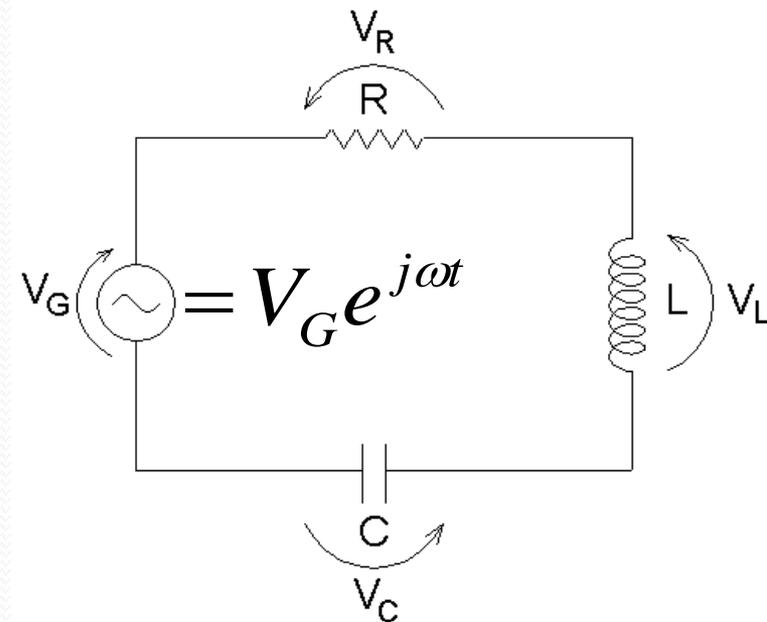
$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

- Capacitor

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

- Indutor:

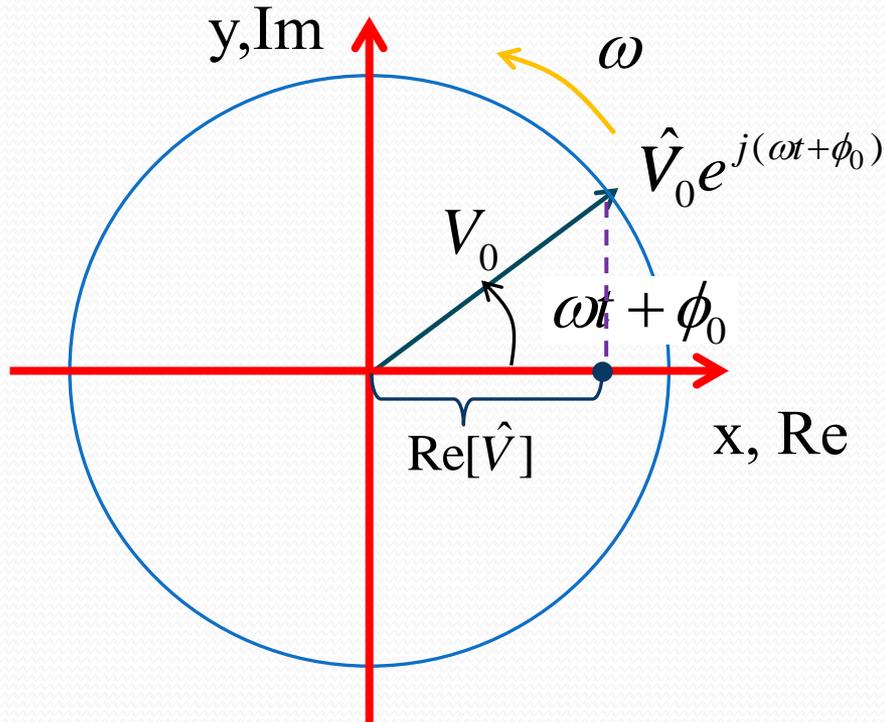
$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$



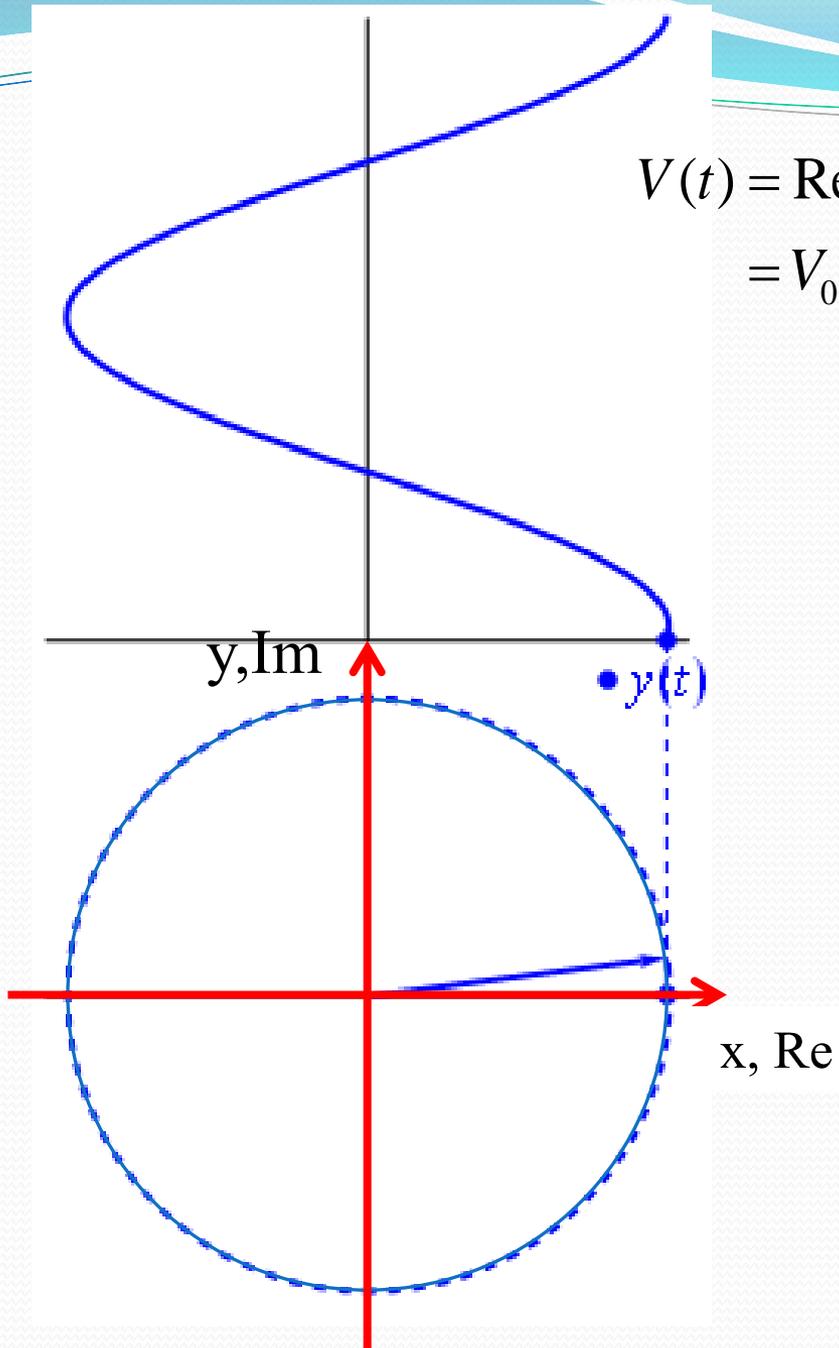
Fasores e Correntes Alternadas

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V(t) &= \text{Re}(\hat{V}(t)) \\ &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

- Mas o que esta acontecendo realmente?
 - O número complexo $V(t)$ muda de posição no plano complexo com o passar do tempo (mov. Circular uniforme).

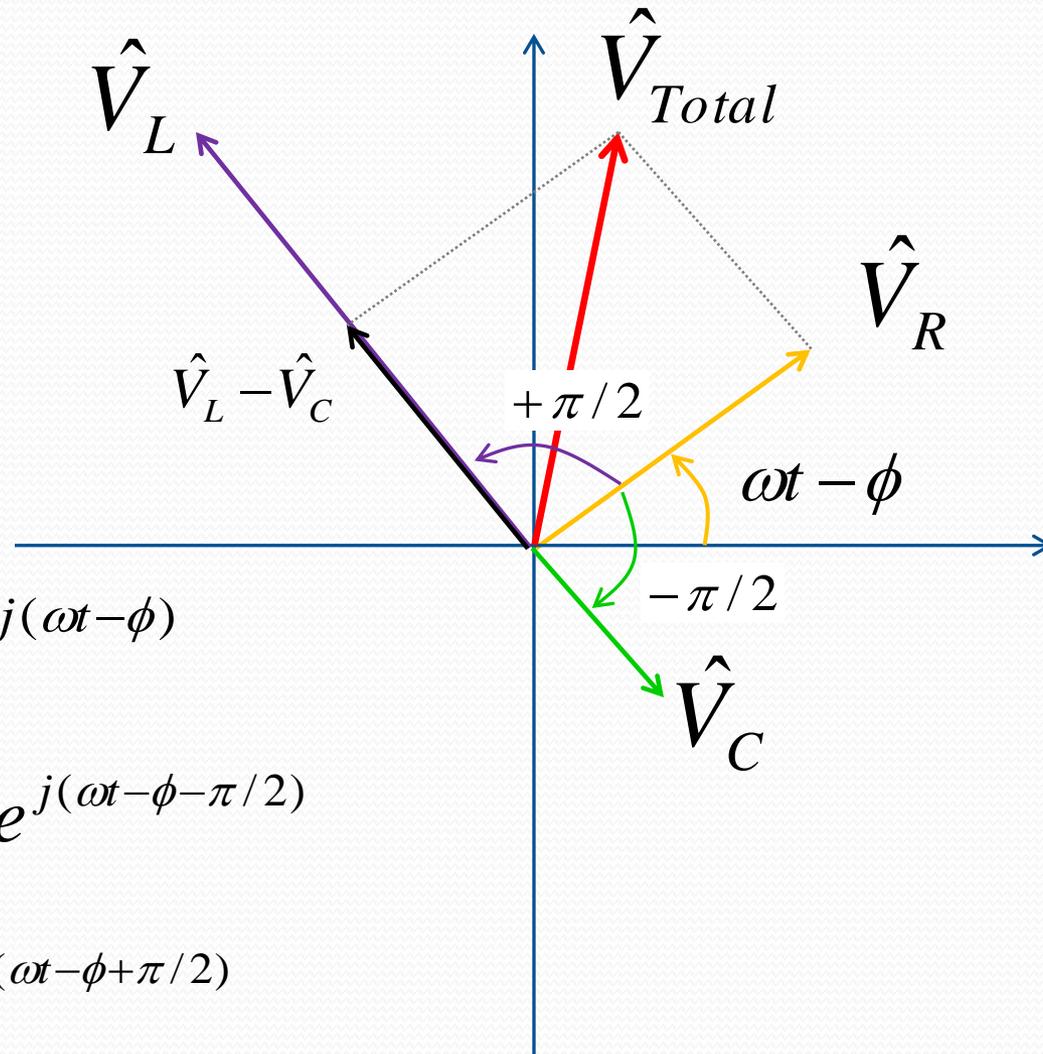


$$V(t) = \text{Re}(\hat{V}(t))$$
$$= V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$



Fasores e o Circuito RLC

- Mas e o capacitor e o indutor??



$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$

Ressonância em Corrente

- Algo passou quase despercebido.
 - A amplitude da corrente (e de todas as tensões) depende de uma maneira bastante peculiar da frequência.

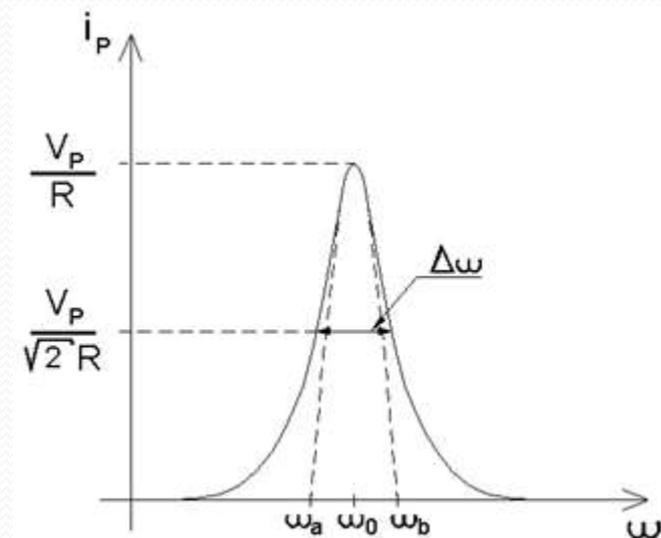
$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- A corrente é máxima quando:

$$\frac{di_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ e } \phi = 0$$

- O circuito RLC é ressonante!



Ressonância em Carga

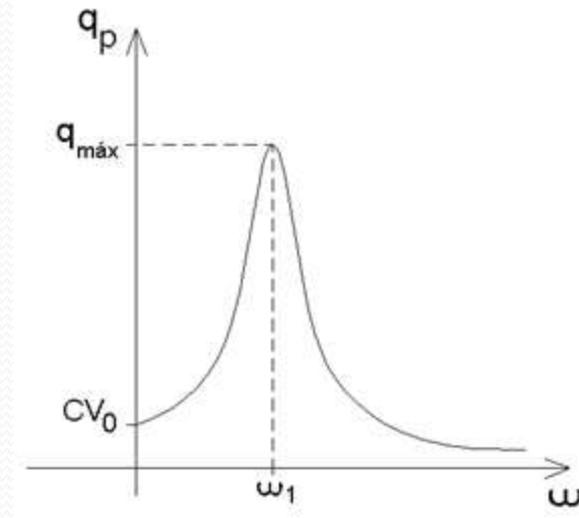
- Para a carga (tensão no capacitor) é diferente:

$$V_{C0} = \frac{i_0}{\omega C} = \frac{V_G}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- A tensão é máxima quando, $dV_{C0} / d\omega = 0$, portanto:

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] = 0$$

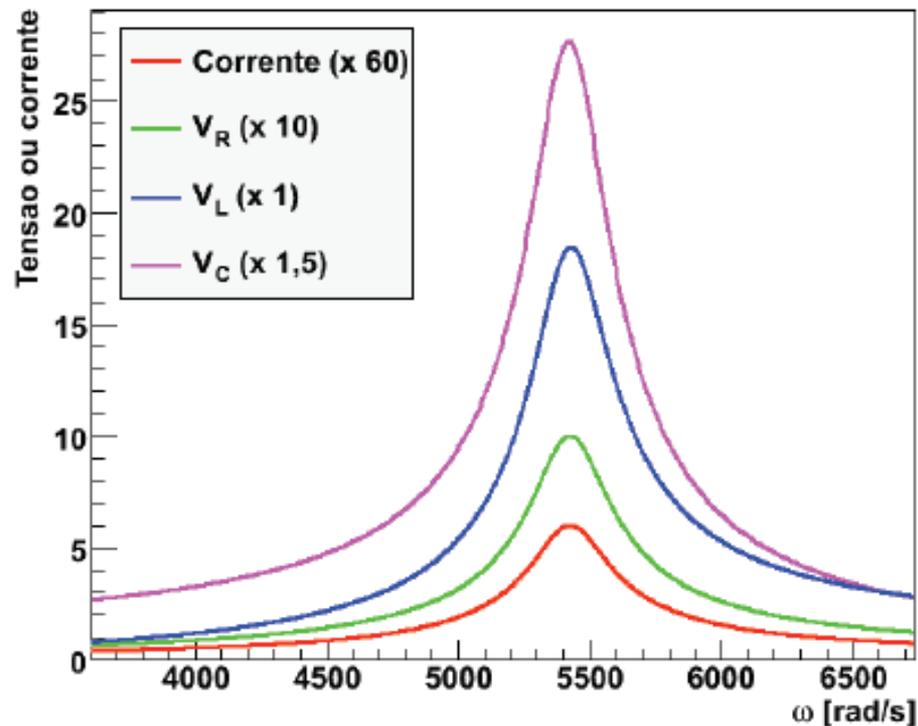
$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0 - \frac{R^2}{2L^2}}$$



- O capacitor tem carga para $\omega=0$
- As freq. de ressonância são diferentes!
- Pergunta: podemos medir essa diferença?

Ressonância: Circuito RLC

- As tensões e correntes têm um máximo num valor definido \Rightarrow Ressonância



- O que define a posição são as constantes (R, L e C)
- A posição dos máximos não são necessariamente a mesma para todos os sinais (verifiquem o valor para a tensão no indutor)
- Mas o que define a altura e a largura dessas curvas?

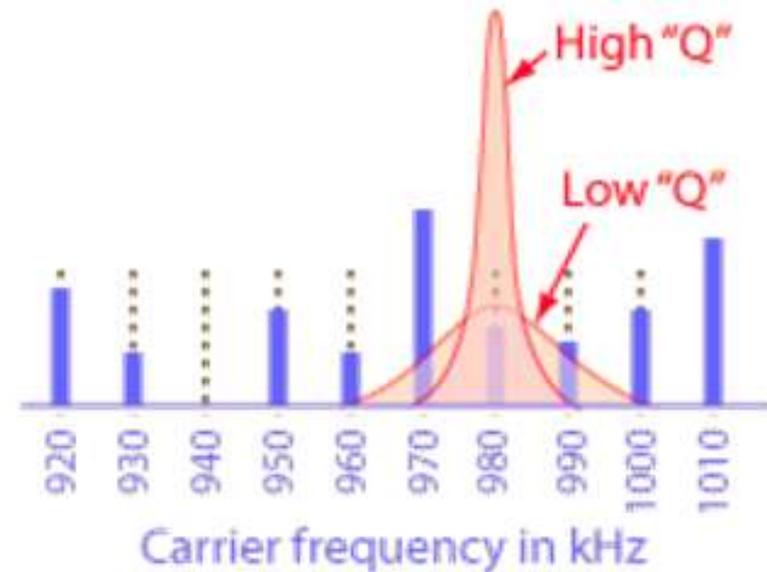
Fator de Qualidade

- Um rádio AM usa um circuitos ressonantes RLC para selecionar a estação.
- A seleção tem que conseguir separar estações vizinhas, sem perder o sinal da estação que se quer ouvir.
- Os engenheiros definiram o fator de qualidade:

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = 2\pi \left[\frac{U}{\Delta U} \right]_{\text{ressonância}}$$

U = Energia armazenada por ciclo

ΔU = Energia dissipada por ciclo



Fator de Qualidade

- Fator de qualidade do circuito:

$$Q = 2\pi \left[\frac{U}{\Delta U} \right]_{res} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \text{Largura em}$$

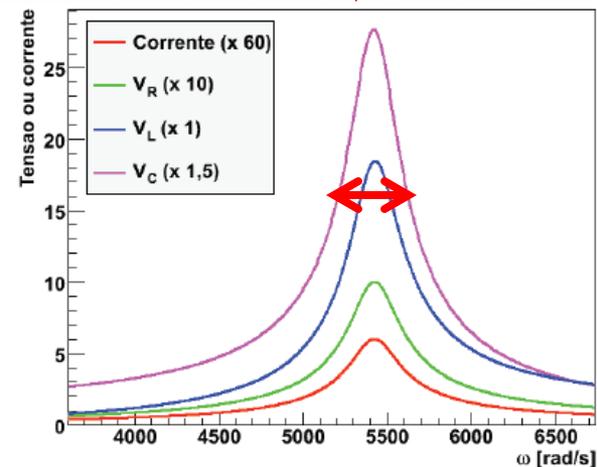
$$\begin{cases} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \text{ (curva } i \times \omega) \\ \frac{P_0}{2} \text{ (curva Pot} \times \omega) \end{cases}$$

- U é a energia armazenada no circuito na condição de ressonância:

$$U = \frac{1}{2} Li_0^2 = \frac{1}{2} CV_{C0}^2$$

- ΔU é a energia dissipada pelo circuito durante um período de oscilação:

$$\Delta U = \bar{P}T = \frac{1}{2} Ri_0^2 T$$



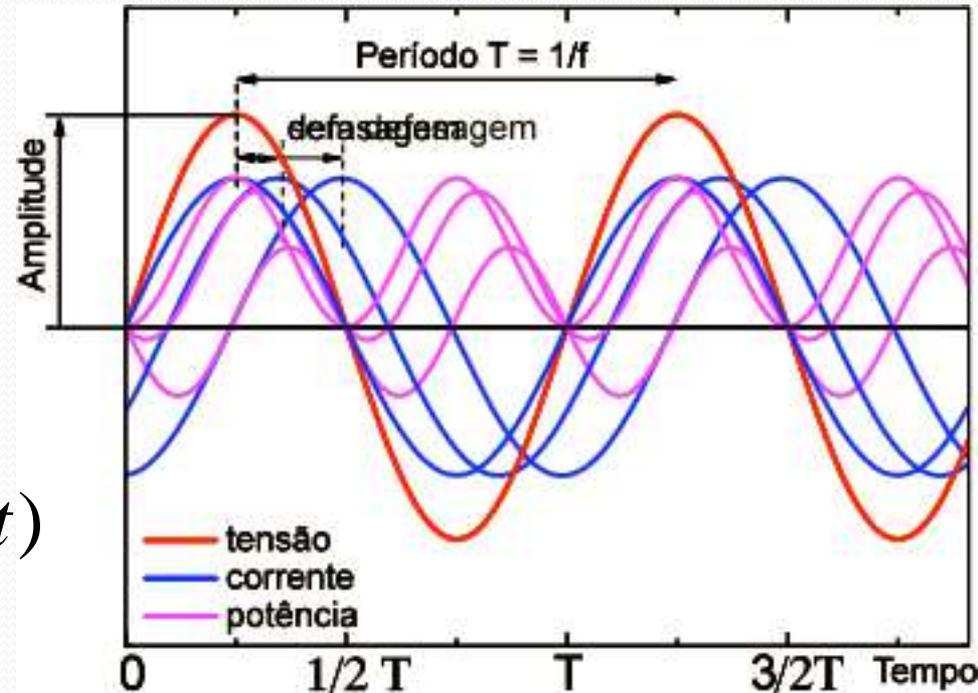
Potência Instantânea

- Instantaneamente:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = V_P i_0$$

$$\cos(\omega t - \phi) \cos(\omega t)$$



- Depende da fase entre corrente e tensão e pode ser negativa!

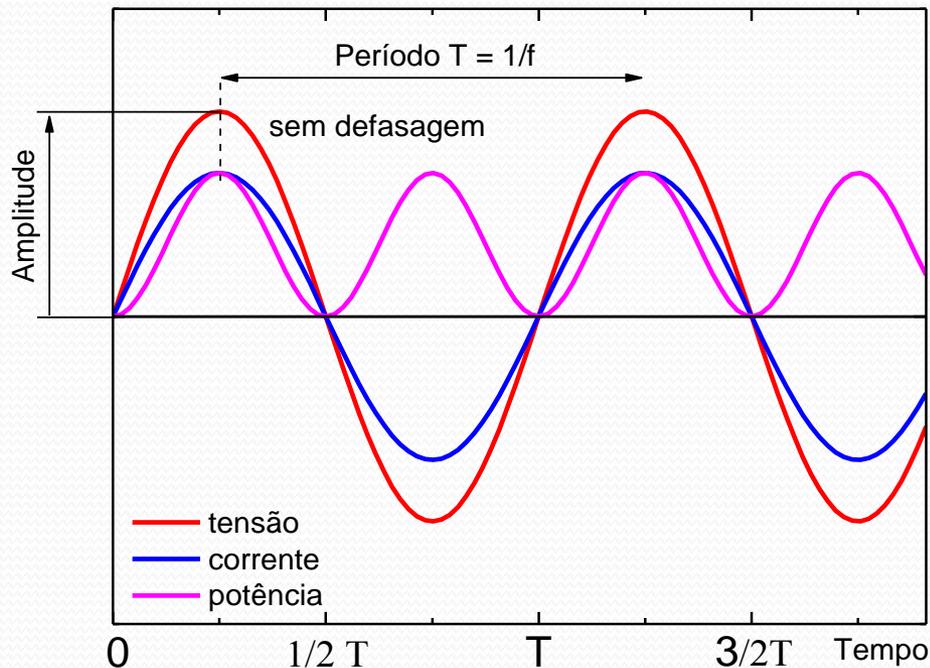
Potência positiva é aquela consumida

Potência negativa é aquela fornecida

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

- A potência instantânea é:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = R \cdot i_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) > 0, \text{ sempre}$$

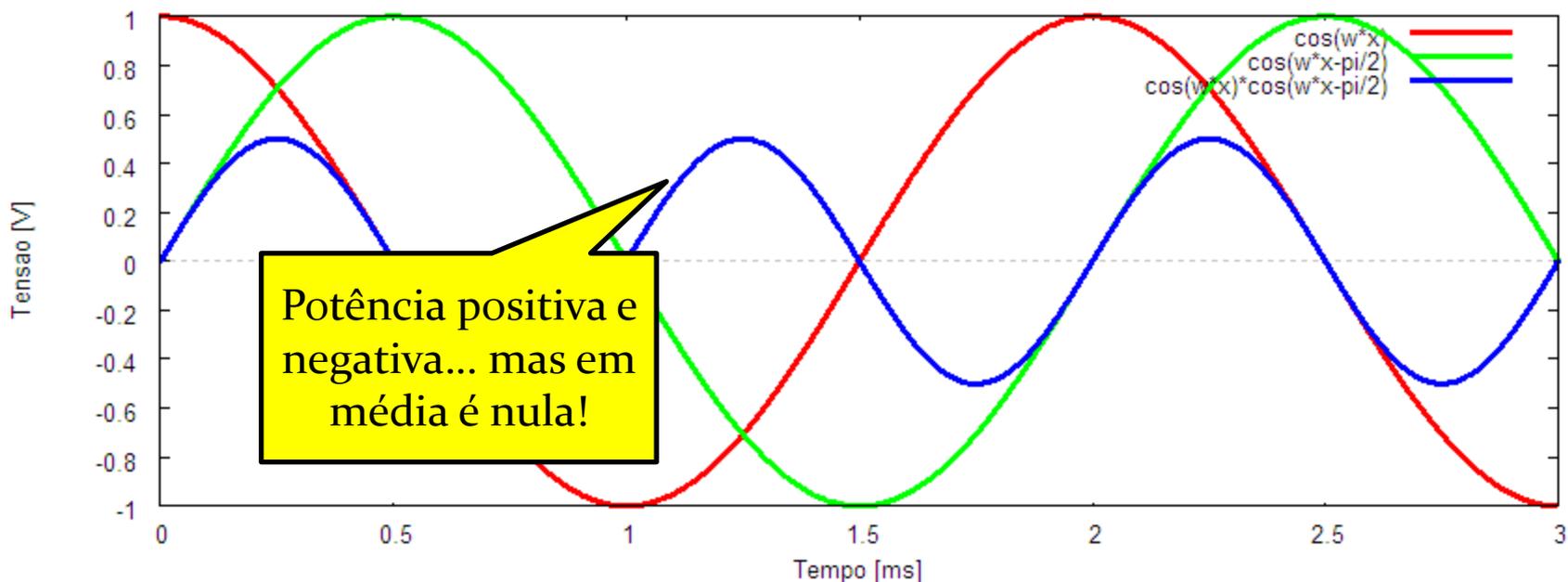


- A potência varia no tempo, mas é sempre positiva o que significa que **o resistor sempre consome potência**

Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como:

$$P(t) = i_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

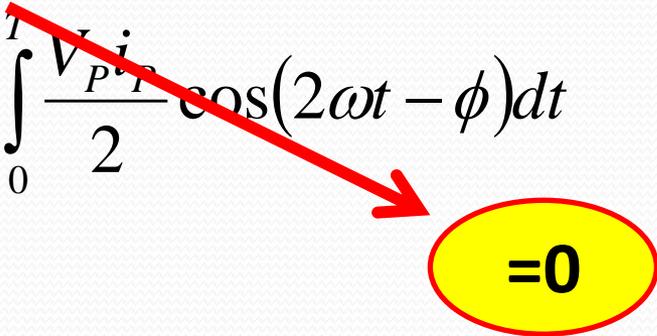


Potência

- No caso de correntes alternadas, o que vai interessar saber é a potência média dissipada num ciclo, em cada um dos elementos

$$\begin{aligned}P(t) &= V_P \cos(\omega t) \cdot i_P \cos(\omega t - \phi) \\ &= V_P i_P \frac{1}{2} (\cos(2\omega t - \phi) + \cos(\phi))\end{aligned}$$

- Assim:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(\phi) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t - \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} V_P i_P \cos \phi\end{aligned}$$


Ressonância em Energia

- ▶ Portanto a potência média absorvida pelo circuito **RLC** (veja também a apostila de **Corrente Alternada**) pode ser escrita como:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{G0} i_0 \cos \phi = \frac{V_{G0}^2}{2Z_0} \cos \phi$$

- ▶ Na condição de ressonância, $\phi=0$ e $Z_0=R$, portanto, a potência média **por ciclo** vai ser **máxima**:

$$\bar{P} = \frac{V_{G0}^2}{2R}$$

O máximo da potência ocorre para a mesma frequência em que ocorre a ressonância para a corrente.

A ressonância de corrente é também chamada de ressonância de energia.

Resumindo:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_P i_P \cos \phi$$

- Para o resistor: $\phi=0$

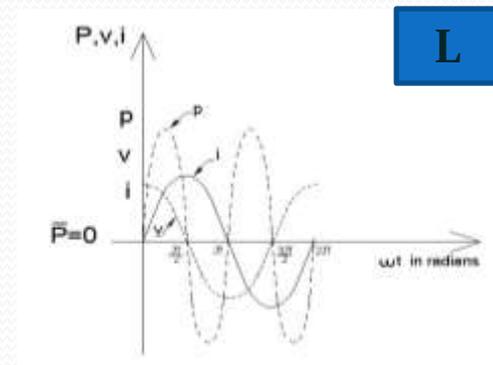
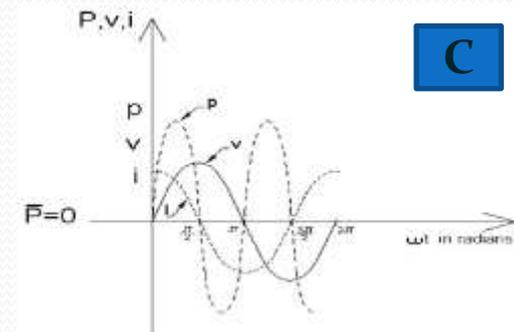
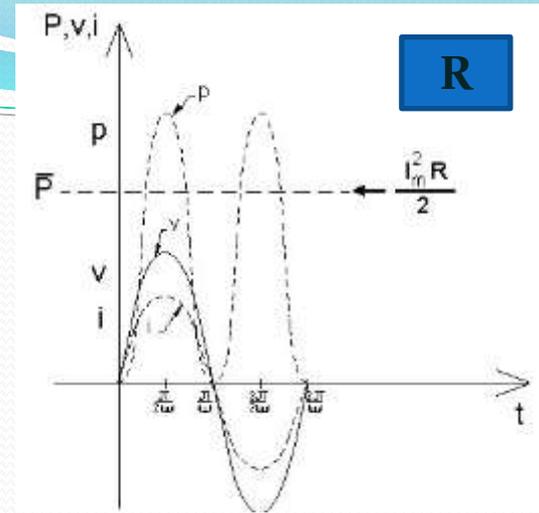
$$\bar{P}_R = R \frac{i_P^2}{2}$$

- Para o capacitor ideal: $\phi=-\pi/2$

$$\bar{P}_C = 0$$

- Para o indutor ideal: $\phi = \pi/2$

$$\bar{P}_L = 0$$



Ressonância RLC

- **Resumindo:**

- Somente a resistência dissipa potência, capacitores e indutores puros não dissipam potência num período:
 - O que eles retiram do circuito na metade do período, eles devolvem na outra metade
- Existem capacitores e indutores puros ou ideais?
 - Se o capacitor é ideal vocês verificaram
 - E o indutor, o que acham?
- Há outras resistências, além do resistor no circuito?
 - E o gerador?

Resistência Total

- Você pode verificar isso!
 - Na condição de ressonância de corrente, $\omega = \omega_0$ e:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow R$$

$$\text{tg } \phi_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \frac{1}{R} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Se $\phi_0 = 0$, corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo

- Portanto:

$$V_{G0} = R i_0$$

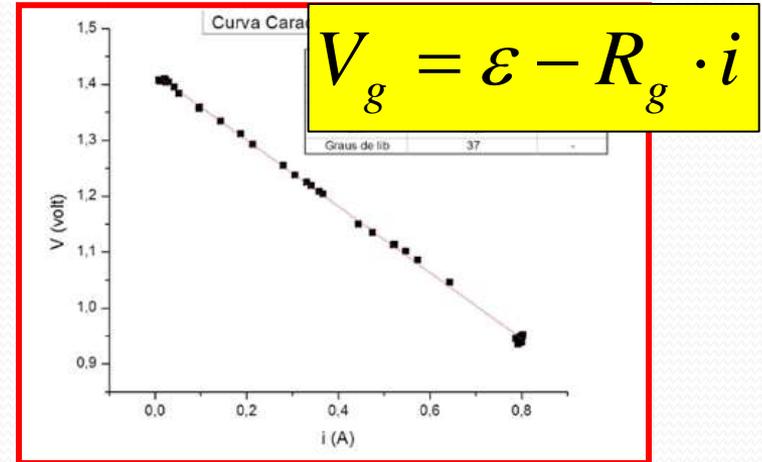
V_{G0} é a tensão de pico aplicada pelo gerador e i_0 é a corrente de pico no circuito

- Ou seja, se medir V_{G0} e i_0 na ressonância você descobre qual é a resistência total, **R**, do circuito → Quanto vale R ??

Resistência do Gerador

- No nosso modelo teórico, a tensão que o gerador aplica no circuito é:

$$\hat{V}_g(t) = V_g e^{-j\omega t}$$



- Portanto a amplitude V_g é constante, e não depende da potência ou corrente entregue ao circuito! **É um gerador ideal!!!**
 - Qual o modelo teórico apropriado para um gerador real?
 - Essa resistência tem que ser levada em conta!

$$R = R_1 + R_{\text{BOB}} + R_G$$

Resistência do Gerador

- Mas se o gerador tem resistência interna, então a tensão de pico aplicada no circuito real, não é a força eletromotriz ε_0 que ele fornece, é:

$$V_G = \varepsilon_G - R_G i_0$$

- Você não conhece R_G e precisa medir ε_0 . Como??
 - Medindo com uma resistência tão grande que $R_G i_0$ fique desprezível em relação a ε_0 !
 - Que instrumento você pode usar para medir esta “tensão em aberto” do gerador?

Tarefas 1 – para Síntese

- Medir a curva de ressonância ($i \times \omega$) com $R=10 \Omega$, $C=0.47\mu\text{F}$, $L=$ bobina de 1000 espiras
 - **Não altere a força eletromotriz do gerador durante as medidas (e verifique que ela se mantém constante!).**
- Faça o gráfico para a curva de corrente ($i \times \omega$)
 - Colocar também curvas teórica e ajustada
- A partir do ajuste, determine o valor experimental da frequência de ressonância e compare com o valor previsto
- A partir do ajuste, determine R , L e C e compare com os valores nominais.
 - Há discrepâncias? Explique porque.

Tarefas 2 – para Relatório

- Meça $V_C \times t$ e $V_L \times t$ para a frequência de ressonância
 - Faça um gráfico de $V_C \times V_L$ na frequência de ressonância (modo XY do osciloscópio)
 - O que você esperaria obter caso os seus componentes fossem ideais?
 - O indutor é ideal? Você pode fazer um modelo simples para o indutor caso ele não seja ideal?
 - Da análise desse gráfico, obtenha os parâmetros físicos (valores e incertezas) das grandezas usadas no seu modelo.
- Ainda na ressonância, verifique a diferença de fase entre V_C e V_L .
 - O que era esperado? A diferença pode ser explicado pelo seu modelo não-ideal?

Tarefas 3 – EXTRAS

- Na análise de $V_L \times V_C$ na ressonância você se questionou apenas se o indutor não seria ideal.
 - E o capacitor é ideal? Você se questionou a respeito?
 - Você tem evidências experimentais de que o capacitor é próximo ao ideal? Quais (quantitativo)?
- Estime o valor da resistência interna do gerador a partir das medidas, ajustes e modelos não-ideias
 - Discuta a incerteza nesta medida, já que ela será obtida como um resíduo. Como você poderia diminuir esta incerteza?

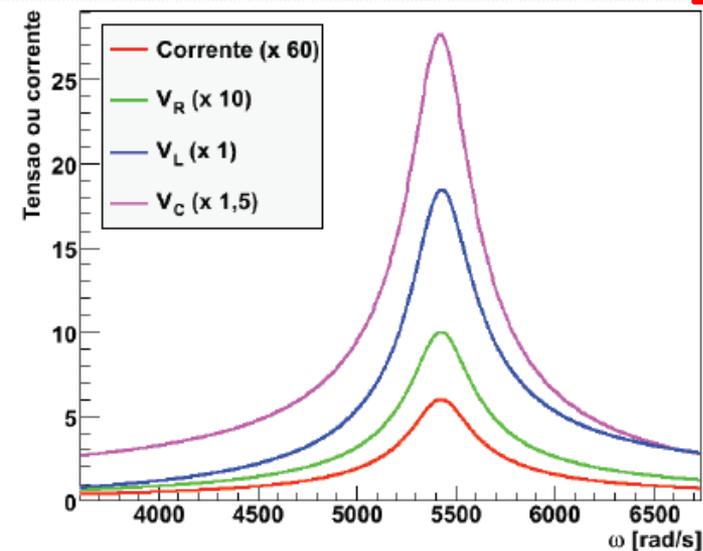
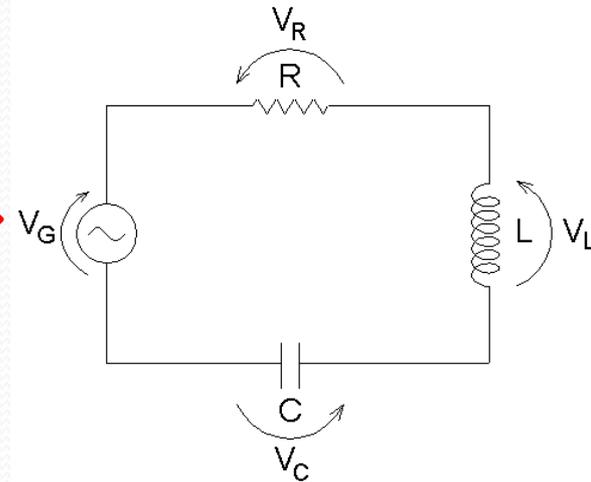
Cuidados



Usar o abaixador de impedâncias do gerador de áudio!

Será que o gerador pode ser considerado ideal? Como saber se é? O que muda na teoria se não for?

O que vão medir?
Onde colocar o terra?



Lembre-se de medir um número de pontos que permita obter curvas bem definidas