Física Experimental IV

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa
LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Profa. Eloisa Szanto
eloisa@dfn.if.usp.br
Ramal: 7111
Pelletron

Aula 1, Experiência 1
Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
nelson.carlin@dfn.if.usp.br
Ramal: 6820
Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br
Ramal: 7016
Basilio, sala 101

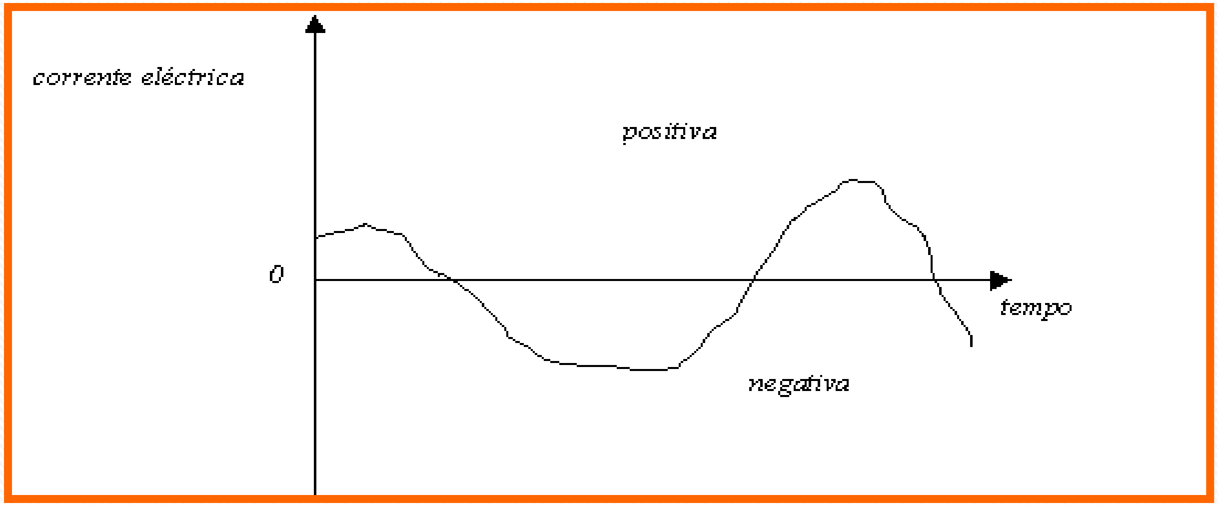
Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC
  - Circuito integrador e análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

Tensões e Correntes Alternadas

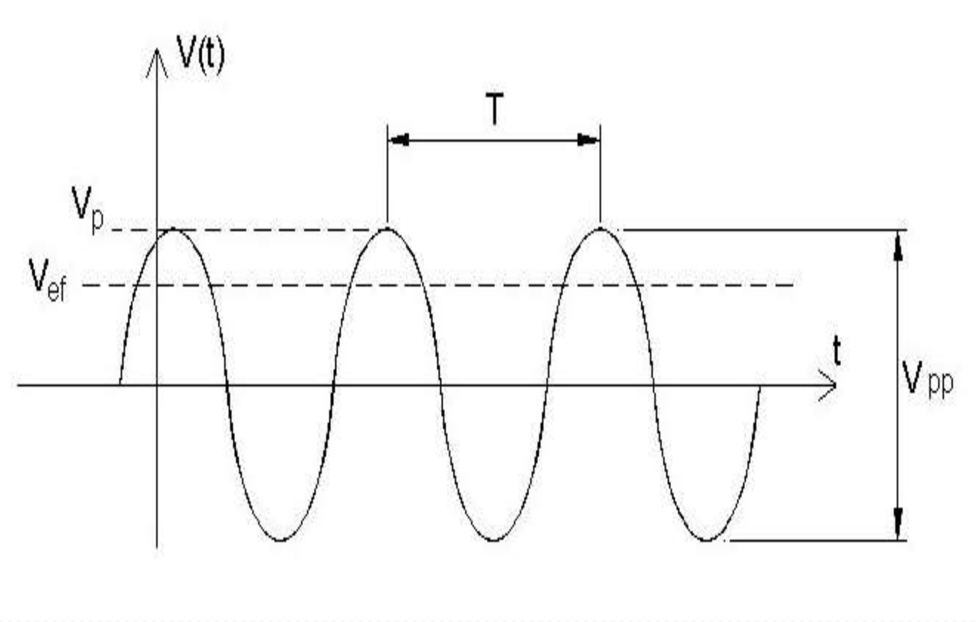
- Tensão alternada: qualquer tensão que varia no tempo



- Na prática trabalhamos com tensões harmônicas simples
    - Veremos no lab4 que **qualquer tensão dependente do tempo é uma superposição de tensões harmônicas simples**

Tensões Harmônicas Simples

- Aquelas descritas por uma função harmônica simples de freqüência bem definida, ou seja:



$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0)$$

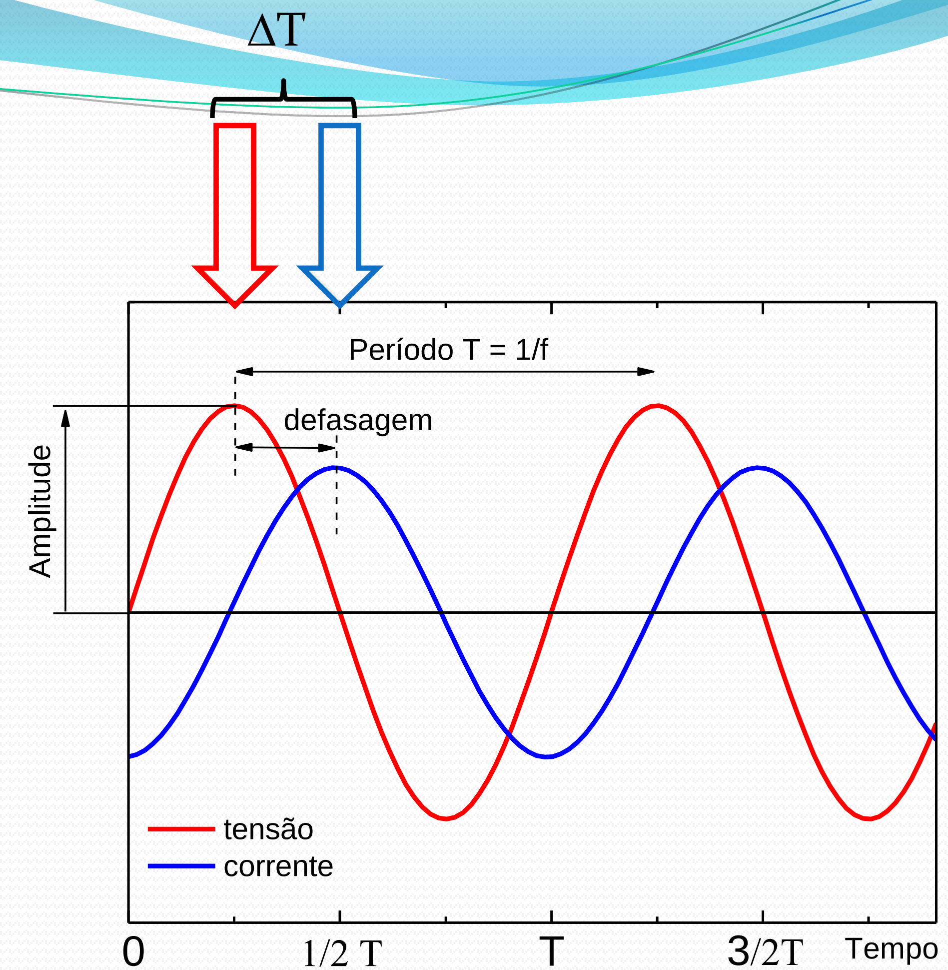
$$\omega = 2\pi f \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$V_{PP} = 2V_p \qquad V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

V_P é a tensão máxima ou tensão de pico ou amplitude, **ω** é a freqüência angular e **ϕ_o** é a fase da tensão alternada no instante **t=o**

A fase

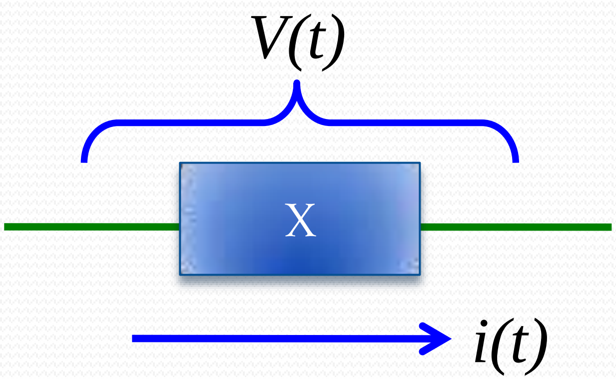
- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não estão necessariamente em fase:



$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

$$V(t) = V_P \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$

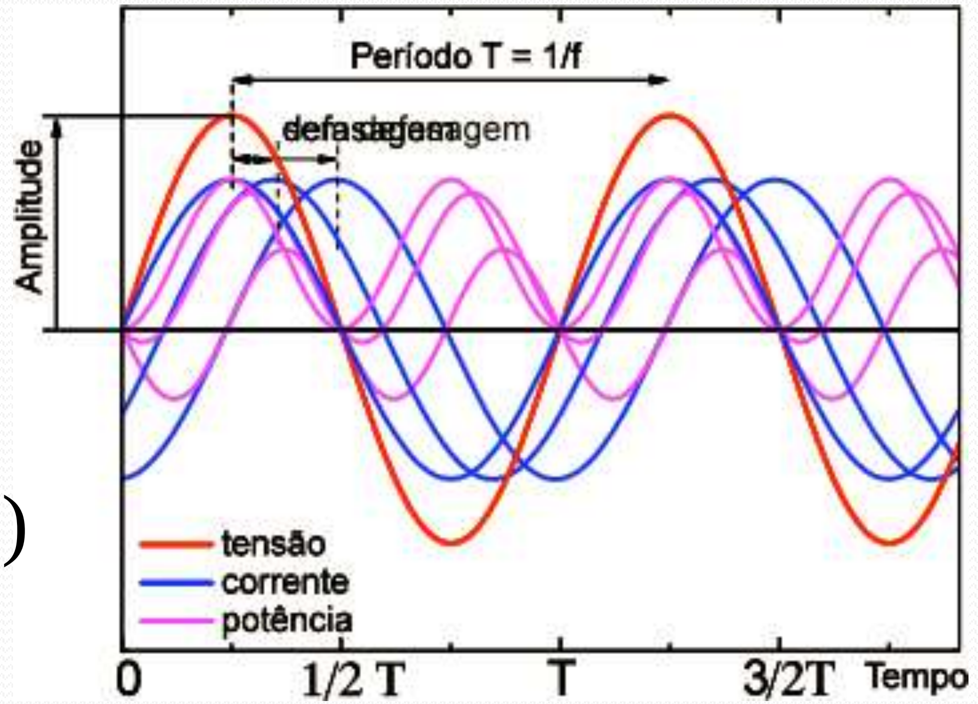


Potência Instantânea

- Instantaneamente:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = V_P i_0 \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t)$$



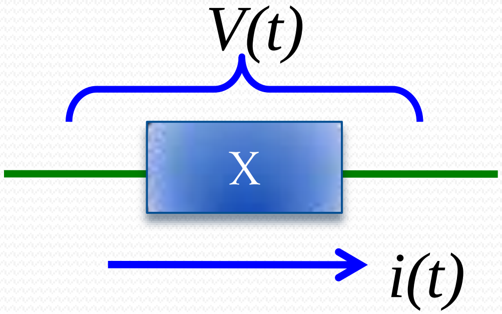
- Depende da fase entre corrente e tensão e pode ser negativa!

  Potência positiva é aquela consumida

  Potência negativa é aquela fornecida

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

Em um resistor ôhmico simples, a relação entre tensão e corrente é:



$$R = \frac{V_P}{i_P} = cte$$

$$i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

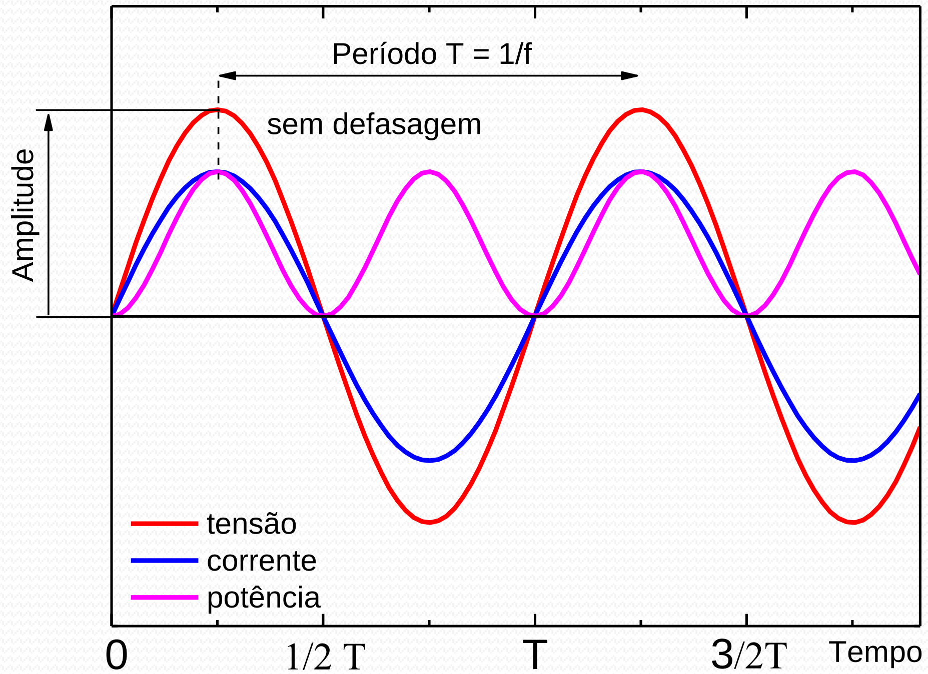
$$V(t) = R \cdot i(t) = R i_P \cos(\omega t)$$

A fase entre tensão e corrente é nula

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

- A potência instantânea é:

$$P(t) = V(t)\cdot i(t) \;\; = R\cdot i_0^2\cdot \cos^2(\omega t) \;\; > 0, \text{ sempre}$$



•A potência varia no tempo, mas é sempre positiva o que significa que o resistor sempre consome potência

Exemplo 2: Capacitor Ideal

Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Além disso, carga e corrente estão relacionados

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

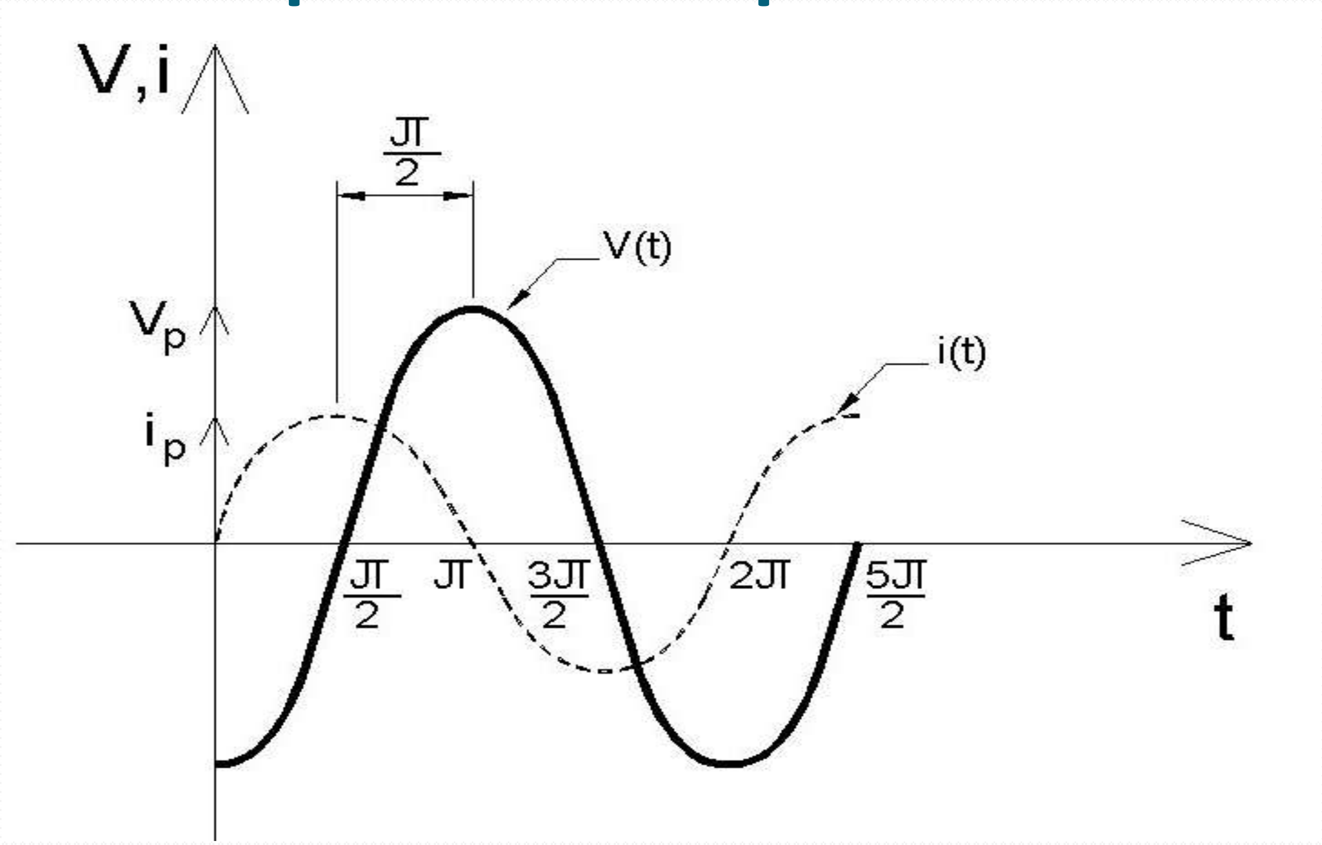
A fase não é nula!

Portanto:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = -\omega C V_p \sin(\omega t) = \omega C V_p \cos(\omega t - \pi / 2)$$

Exemplo 2: Capacitor Ideal



a corrente está adiantada de π/2 em relação à tensão aplicada ao capacitor (Atenção: a defasagem de π/2 é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).

Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como:

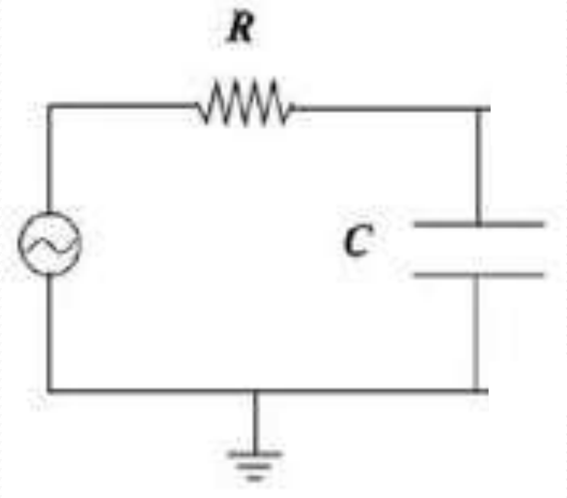
$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = \frac{i_0^2}{\omega C} \cos(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Em circuitos de corrente alternada, muitos elementos possuem fases não nulas entre corrente e tensão. Nestes casos, o formalismo trigonométrico torna-se bastante complexo e inconveniente.

Exemplo 3: circuito RC

- Capacitor e resistor em série a uma fonte de tensão



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \sum_{malha} V_i = 0$$

$$V_e(t) = V_R(t) + V_C(t) \Rightarrow V_e(t) = R\cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} \quad \text{sendo } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$V_e(t) = R\cdot\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \rightarrow V_e(t) = RC\cdot\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

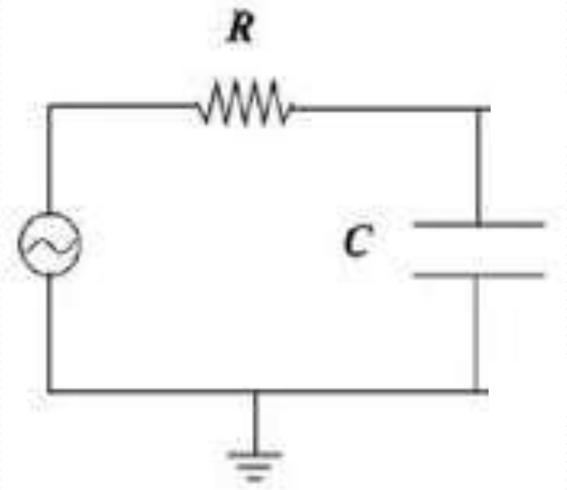
$$\boxed{V_e = \frac{1}{\omega_0}\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

Exemplo 3: circuito RC

- Se a tensão de entrada for harmônica

$$V_e(t) = V_e \cos\left(\omega t\right) \rightarrow V_e(t) = \mathrm{Re}[\hat{V}_e(t)]$$

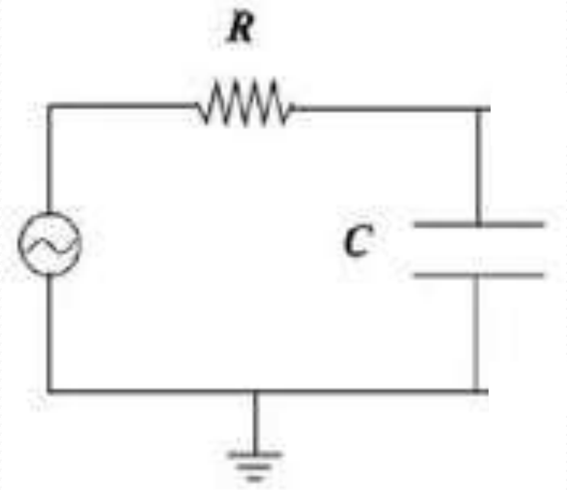
$$\text{com}\ \hat{V}_e(t) = V_e e^{j\omega t}$$



- Podemos resolver a e.d. Na sua forma complexa e tomar a parte real da solução

$$V_e(t) = \frac{1}{w_0}\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)\ \text{Þ}\ \boxed{\hat{V}_e(t) = \frac{1}{w_0}\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t)}$$

Exemplo 3: circuito RC



- A solução mais geral para a tensão no capacitor é

$$\hat{V}_C(t) = \hat{V}_C e^{j\omega t}$$

- Substituindo na e.d.

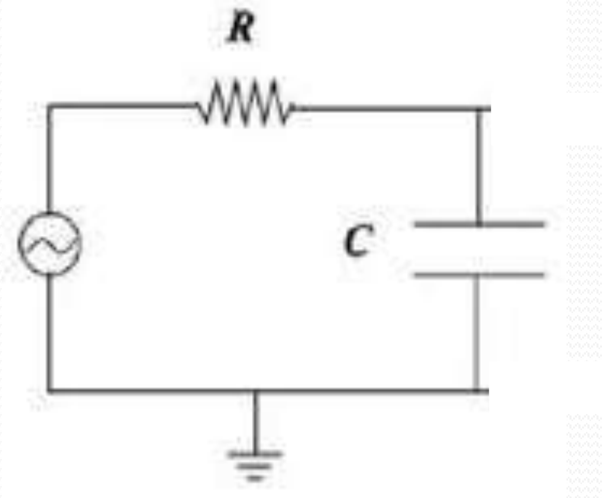
$$V_e e^{j\omega t} = j\frac{\omega}{\omega_0}\hat{V}_C e^{j\omega t} + \hat{V}_C e^{j\omega t} \Rightarrow \hat{V}_C = \frac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

ou seja $\boxed{\hat{V}_C(t) = \dfrac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} e^{j\omega t}}$

Exemplo 3: circuito RC

- Trabalhando um pouco essa solução

$$\hat{V}_C(t) = \frac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} e^{j\omega t}$$



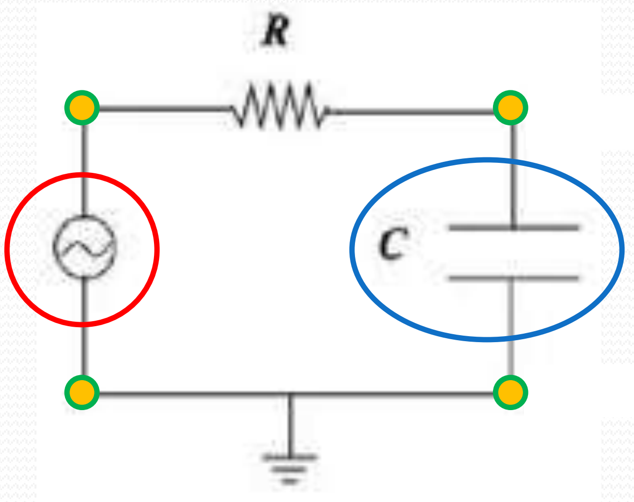
- Podemos escrever

$$\hat{V}_C(t) = V_C e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{com} \quad V_C = \frac{V_e}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

de modo que $\boxed{V_C(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_C(t)\right] = V_C \cos(\omega t + \varphi)}$

Exemplo 3: circuito RC

- Se pensarmos em termos de quadrupolos:



- Sinal de entrada = V_e
- Sinal de saída = V_s

$$\hat{V}_C(t) = \frac{\hat{V}_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \hat{G} = \frac{\hat{V}_{saida}}{\hat{V}_{entrada}} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

O ganho relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada... Ou seja, resume o funcionamento do quadrupolo.

Impedância de um elemento

- A solução da equação diferencial no espaço complexo e posterior uso da parte real como solução física do problema sugere a criação de um análogo à lei de Ohm nesse formalismo.

((Números Complexos))

$$\hat{C} = a + b\,j \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C} = C\,e^{j\alpha} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega\,e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas nesta notação são apenas multiplicações e divisões

Formalismo Complexo

- Este formalismo é construído de tal forma a facilitar todos os cálculos que envolvem tensões alternadas
- Vamos definir as tensões e correntes complexas como sendo:

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \qquad \Rightarrow \qquad V(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{V}(t)\right) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)} \qquad\qquad i(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{i}(t)\right) = i_0 \cos(\omega t + \phi_1)$$

Impedância Complexa e Real

A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t+\phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t+\phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0-\phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

Z_0 é a impedância REAL do elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a tensão e corrente causada pelo elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e Reatância

- Da definição de impedância complexa:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos escrever também que:

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

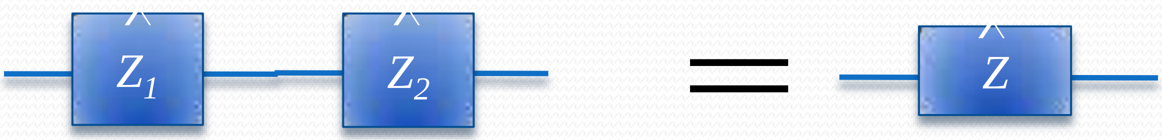
$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

- E reatância deste bipolo (X)

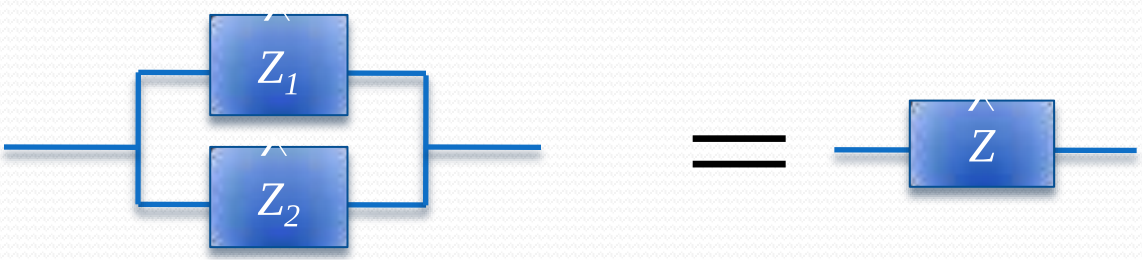
$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

- As grandes vantagens deste formalismo são:
  - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
    - Multiplicações e divisões de exponenciais
  - Associações de bipolos tornam-se simples
    - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas



$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$

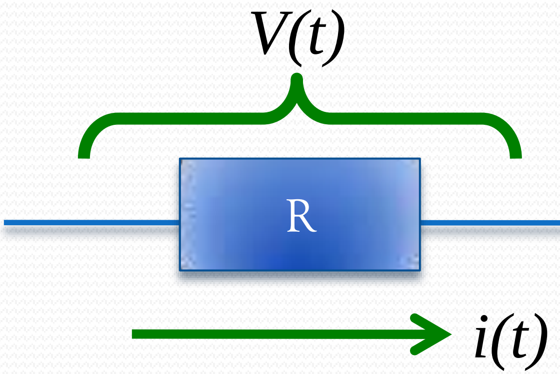


$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}$$

Aplicação 1: Resistor

- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Mas sabemos que $R = V/i$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

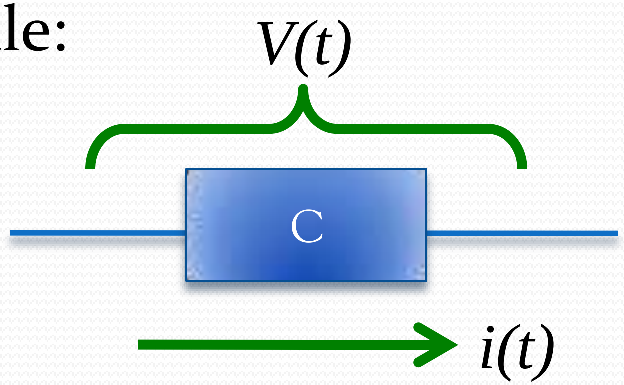
$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

Aplicação 2: Capacitor

- Sabemos (do começo da aula) que $$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$
- Se a corrente complexa for dada por: $$\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$$
- Fica fácil demonstrar que $$\hat{V}(t) = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$$
- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$



Aplicação 2: Capacitor

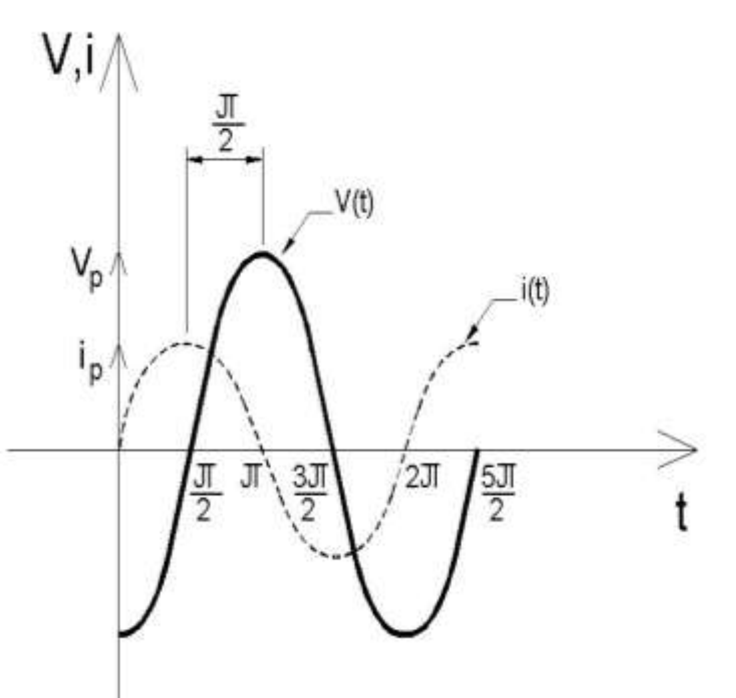
- Ou seja $$\hat{Z} = -\frac{j}{\omega C}$$

- Mas lembrando que: $$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

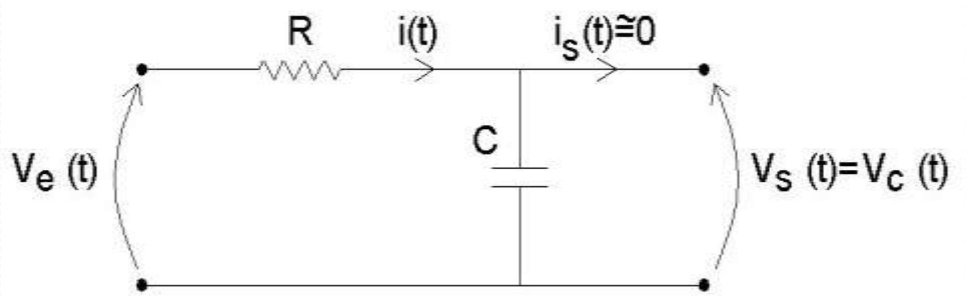
- Comparando as duas expressões temos que:

$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de π/2 em relação à corrente



Aplicação 3: circuito RC



- Seja o circuito ao lado:
- A tensão no capacitor é:

$$\hat{V}_C = \hat{i} \cdot \hat{Z}_C$$

- A tensão de entrada é:

$$\hat{V}_e = \hat{Z}_{total} \cdot \hat{i} \quad = (\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}$$

- E o "ganho" no circuito é dado por:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} \quad = \frac{\hat{Z}_C \cdot \hat{i}}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{(R - \frac{j}{\omega C})} \quad = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Mesma solução encontrada resolvendo a eq. diferencial....

MUITO MAIS FÁCIL!

((Ganho))

Qual a interpretação de um ganho complexo ??

$$\hat{G} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}} \qquad \hat{G} = G_0 e^{j\phi_G}$$

A parte real do ganho muda a amplitude do sinal:

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}^* \hat{G}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_C)^2}}$$

E a parte imaginária introduz uma fase

$$\phi_G = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[\hat{G}]}{\mathrm{Re}[\hat{G}]}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_e(t) &= V_e \cos(\omega t) \\ V_s(t) &= V_e G_0 \cos(\omega t + \phi_G) \end{aligned}}$$

Quadrupolo RC - Baixa frequência

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

- Portanto, o ganho real do quadripolo **RC**, <u>depende da freqüência</u> da tensão alternada a que ele está submetido. No caso em que essa <u>freqüência é baixa em relação a $\boldsymbol{\omega_c}$</u>:

  $\omega << \omega_C$

  o termo (ω^2/ω_C^2), fica muito pequeno se comparado à unidade → o ganho é praticamente <u>igual a **1.**</u>

Quadrupolo RC - Baixa frequência

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_C^2}\sim o}} \cong 1$$

- → **tensão de saída é praticamente igual à tensão de entrada Vs~=Vc.**

$$\omega << \omega_C \rightarrow G_0 \approx 1$$

Quadrupolo RC – Alta frequência

- Se a freqüência for alta, ou seja, $\omega >> \omega_C$, o termo ($\omega^2/\omega_C{}^2$) é tão grande, que o algarismo **1**, no denominador da fórmula pode ser desprezado e o ganho é praticamente igual à ω_C/ω. Esse número, porém, é muito pequeno o que significa que para **freqüências altas a tensão de saída é muito menor que a tensão de entrada.**

$$\omega >> \omega_C \quad \rightarrow G_0 \approx \omega_C/\omega \quad << 1$$

Quadrupolo RC – Alta frequência

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_C^2}}} << 1$$

$\sim(\omega/\omega_c)^2$

- Se a freqüência é alta: $\omega >> \omega_C$
  - o termo (ω^2/ω_C^2), fica muito grande se comparado à unidade → o ganho fica muito pequeno: é praticamente igual a **$\omega c/\omega$.**

$\omega >> \omega_C \rightarrow G_0 \approx \omega_C/\omega << 1$ freqüências altas a tensão de saída é muito menor que a tensão de entrada.

Quadruplo RC - Resumo

- Resumindo: para

$$\left.\begin{array}{l} \omega \ll \omega_C \rightarrow G_0 \approx 1 \\ \\ \omega \gg \omega_C \rightarrow G_0 \approx (\omega_C/\omega) \ll 1 \end{array}\right\}$$

só passam as freq baixas comparadas a ω_C

- O dispositivo está selecionando freqüências!

ele é um filtro passa-baixa

Medidas da Semana

- Do ganho complexo se extrai o real:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$

Sendo: $$\omega_C = \frac{1}{RC}$$

R e C podem ser medidos e há valores nominais

$$G_0 = \frac{V_S^0}{V_e^0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}$$

$$\phi_G = \omega \cdot \Delta T_{S-e} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

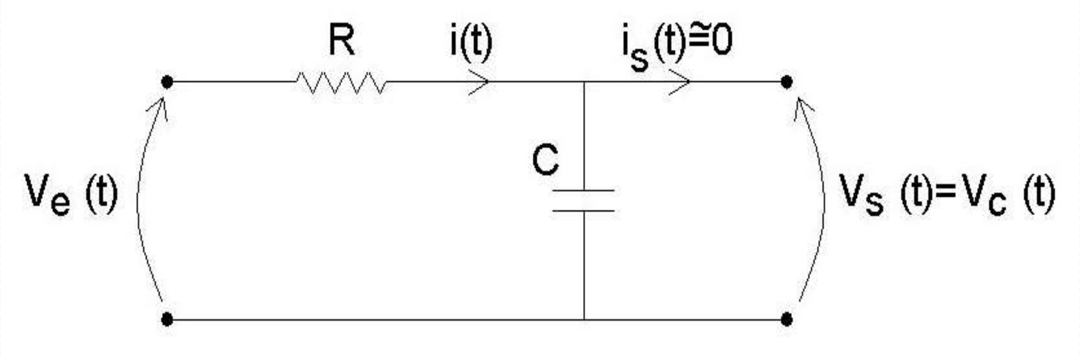
Tensões são medidas c/ osciloscópio

A freqüência também

Intervalo de tempo entre duas tensões também é mensurável

Para esta aula

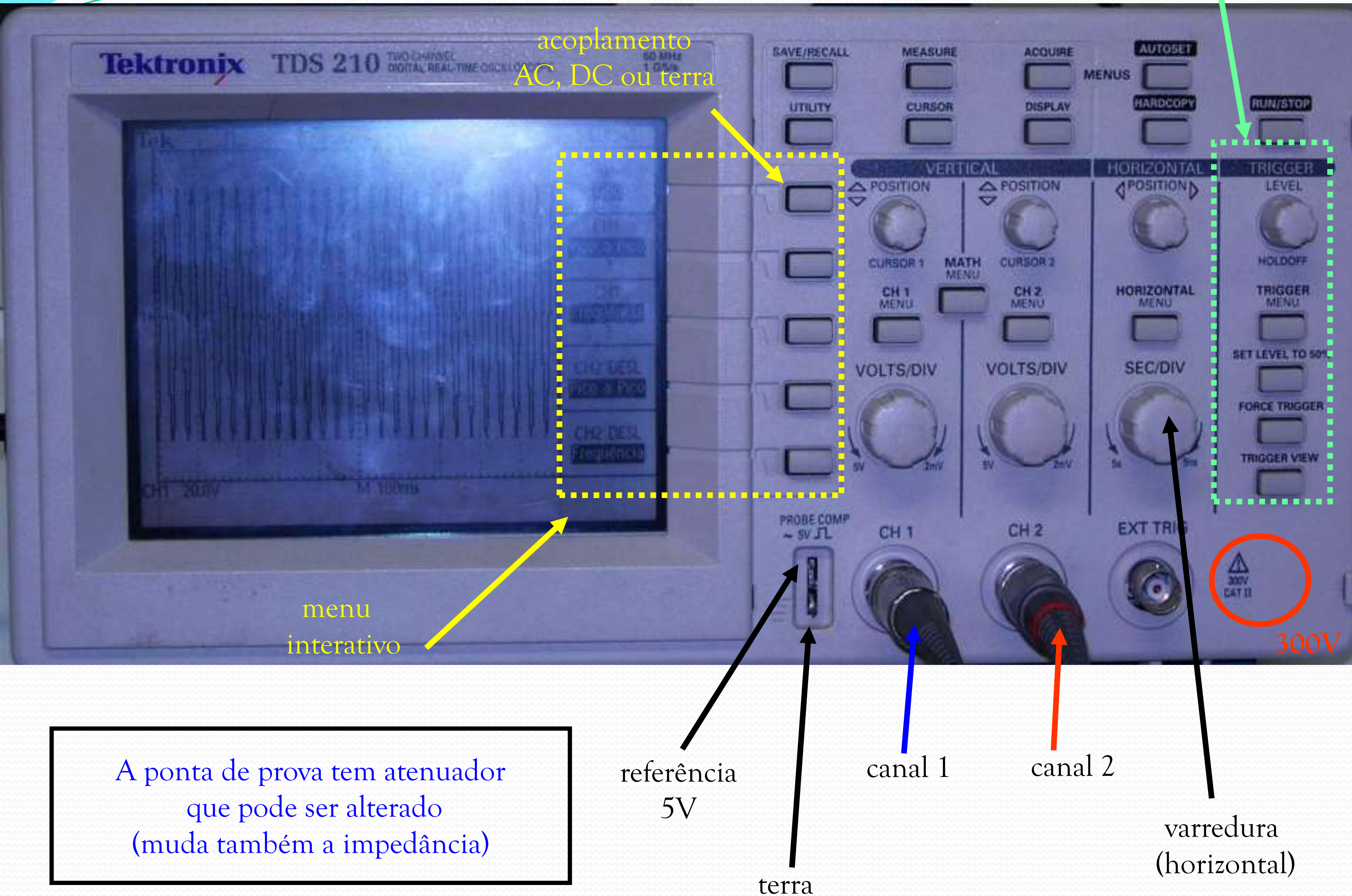
- Vamos estudar o filtro **RC**:



- **Objetivos:**
  - Obter experimentalmente o ganho (G_0 e Φ_G) em função da freqüência (ω) e comparar com a previsão teórica.

Para isto é preciso conhecer **R** e ***C***.
Não confiar nos valores nominais

Osciloscópio



A ponta de prova tem atenuador
que pode ser alterado
(muda também a impedância)

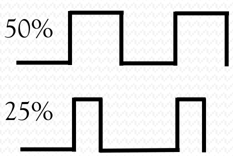
Gerador de audio

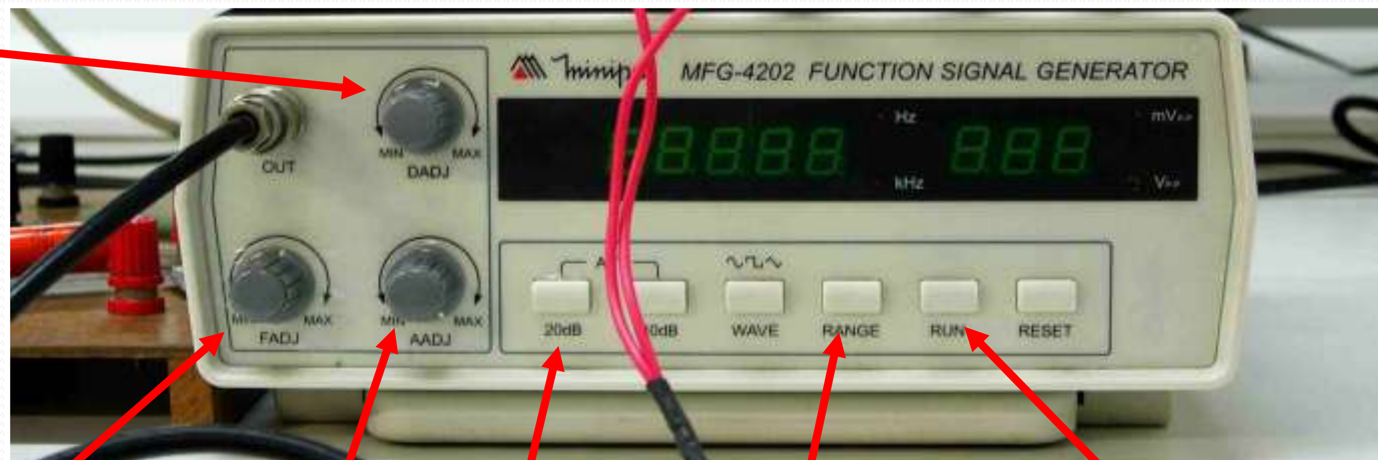
IMPORTANTE!

RESISTOR

CAPACITOR

Duty cycle
ADJust





Frequency
ADJust

Amplitude
ADJust

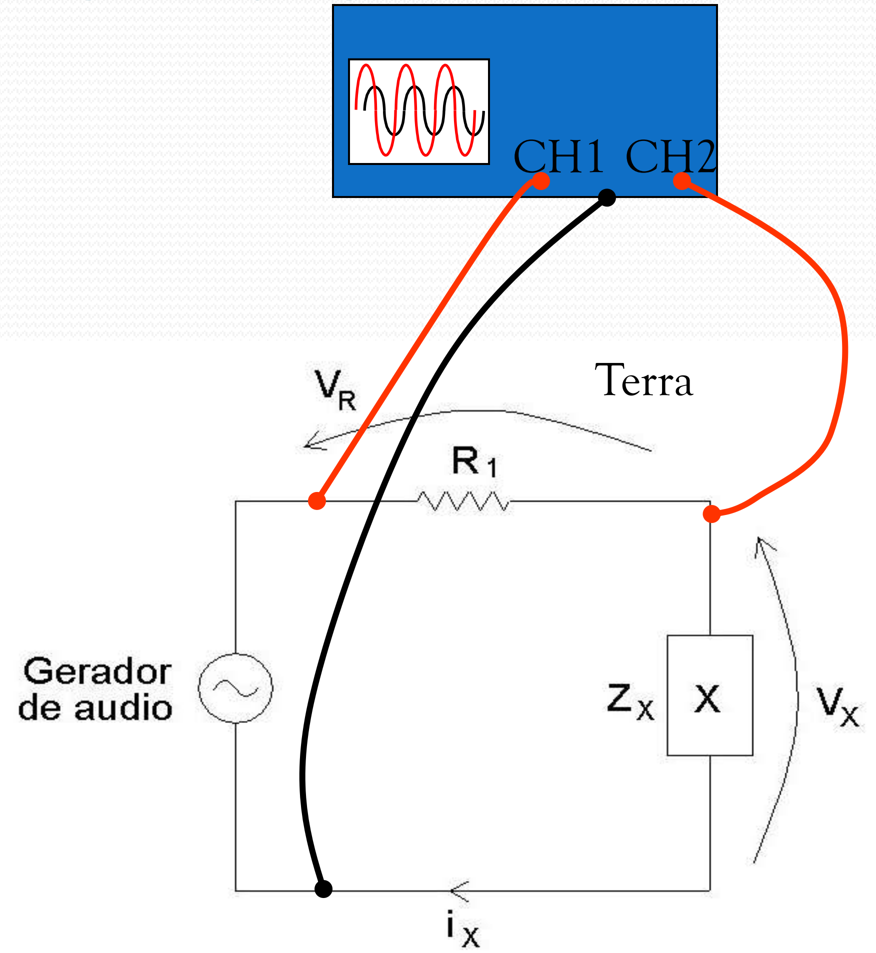
intervalo de
frequências

Executa
parâmetro

atenuador

Cuidados Experimentais

- Instrumentos de medida:
  - Osciloscópio
    - Canal 1: Ve
    - Canal 2: Vc
  - Cuidado com ruídos
    - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído
  - Não confundir freqüência temporal (f) com freqüência angular (ω)



Tarefas 1 – Para a Síntese

Montar um circuito RC com freqüência de corte ~1000Hz, por exemplo com 330Ω e 0.47μF. Usando um **sinal de entrada senoidal** e $V_{saida}=V_C$ fazer:

- Gráfico de G_0 em função de ω
  - Comparar com a curva teórica
  - Fazer os ajustes necessários e tratamento estatístico,
    - ou seja, ajuste não linear por mínimos quadrados e determinação da frequência de corte experimental
- Lembre-se de medir valores $\omega << \omega_c$ até $\omega >> \omega_c$ para poder fazer um bom ajuste.
  - **Vejam tutorial no site do prof. Henrique!**

Tarefas 2 – Para o Relatório

Montar um circuito RC com freqüência de corte ~1000Hz, por exemplo com 330Ω e 0.47μF. Usando um **sinal de entrada senoidal** e $V_{saida}=V_C$ fazer:

- Gráfico de ϕ_G em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
  - Fazer ajustes necessários e tratamento estatístico
- Faça as medidas esta semana! Mas estes resultados/análise serão cobrados apenas no relatório.