

Circuitos indutivos e capacitivos: características

2012 Física Experimental 3 Aula 3: Lei de Faraday

Profa. Eloisa Szanto
eloisa@dfn.if.usp.br

Ramal: 7111

Pelletron

Prof. Henrique
Barbosa
hbarbosa@if.usp.br

Ramal: 6647

Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
nelson.carlin@dfn.if.usp.br

Ramal: 6820

Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br

Ramal: 7016

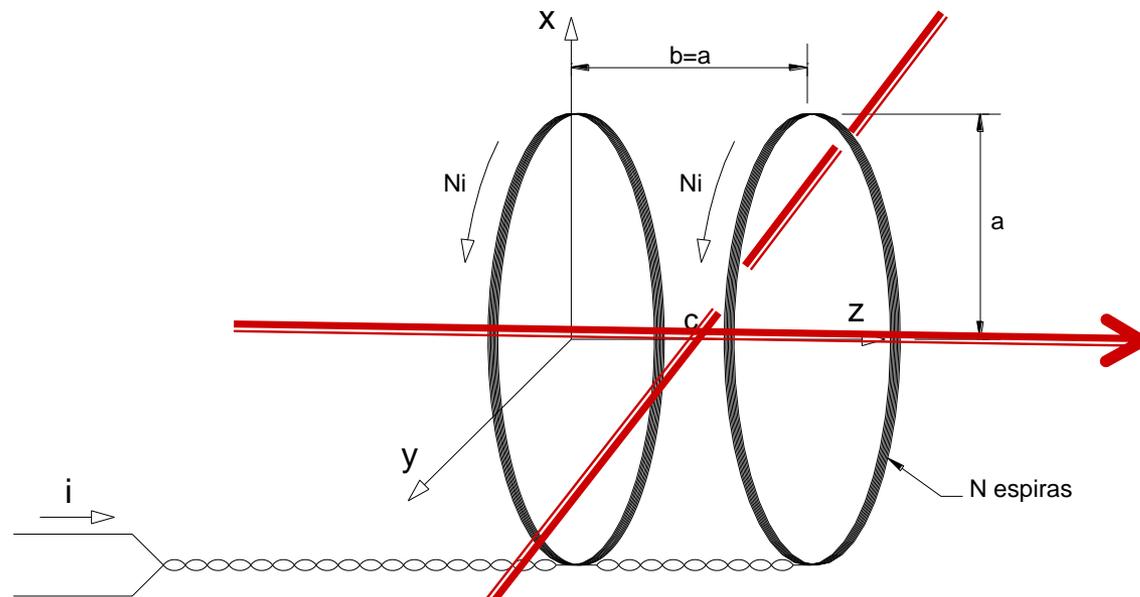
Basilio, sala 101

Lei de Faraday: Helmholtz

- Montar o circuito para gerar o campo da **Bobina de Helmholtz**
 - Anote as características geométricas da bobina
 - Aplicar corrente alternada (máximo 1,5 A)
 - Escolher frequência adequada
 - Lembre-se que quanto maior a frequência maior o sinal induzido
- Utilizando a bobina sonda calibrada, medir o campo gerado pela **bobina de Helmholtz** ao longo do eixo-**z** e do eixo paralelo ao diâmetro que passe pelo centro: de **1** em **1cm**
 - Não se limitem somente entre as bobinas. Meça fora delas também.
- Comparar (graficamente) o valor experimental com previsões teóricas e da simulação, para o campo ao longo de **z** e ao longo do eixo paralelo ao diâmetro
 - Explicitar a fórmula teórica utilizada para **B(z)**

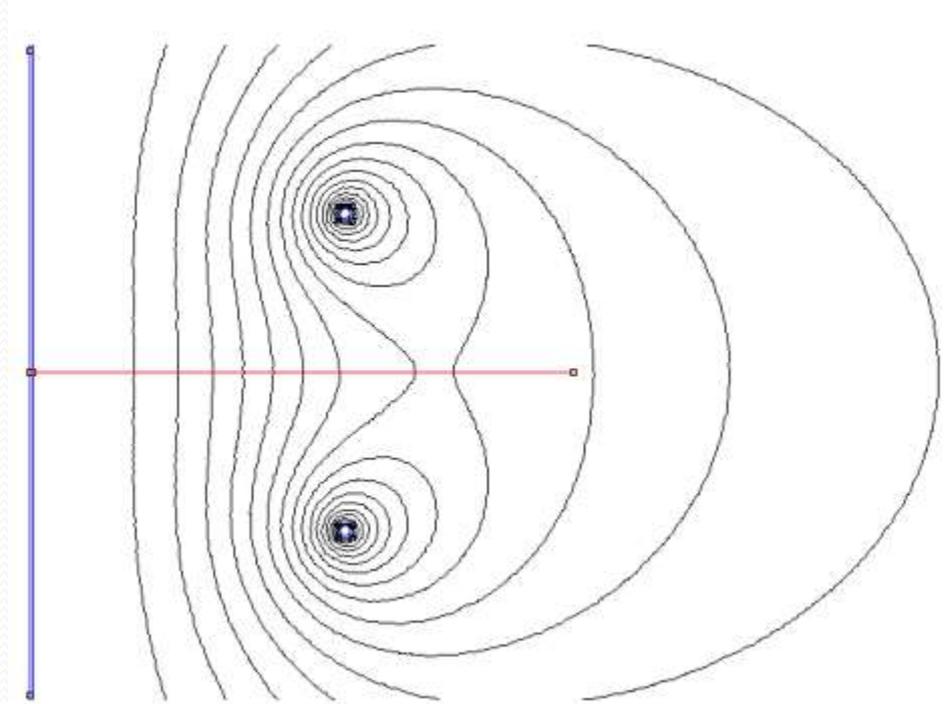
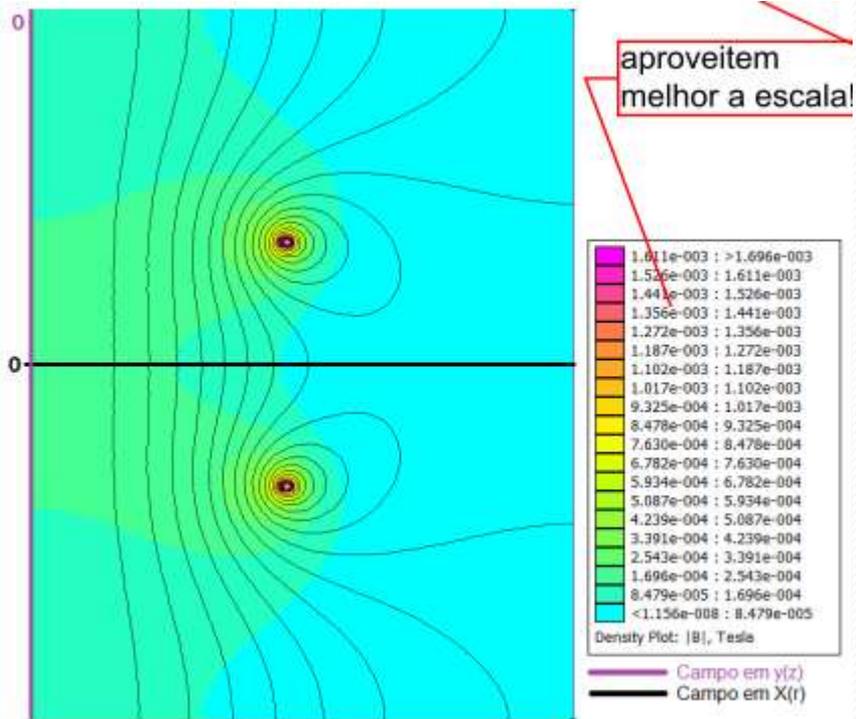
Lei de Faraday: Helmholtz

- Mapeamento ao longo dos eixos:
 - **Z**
 - paralelo ao diâmetro



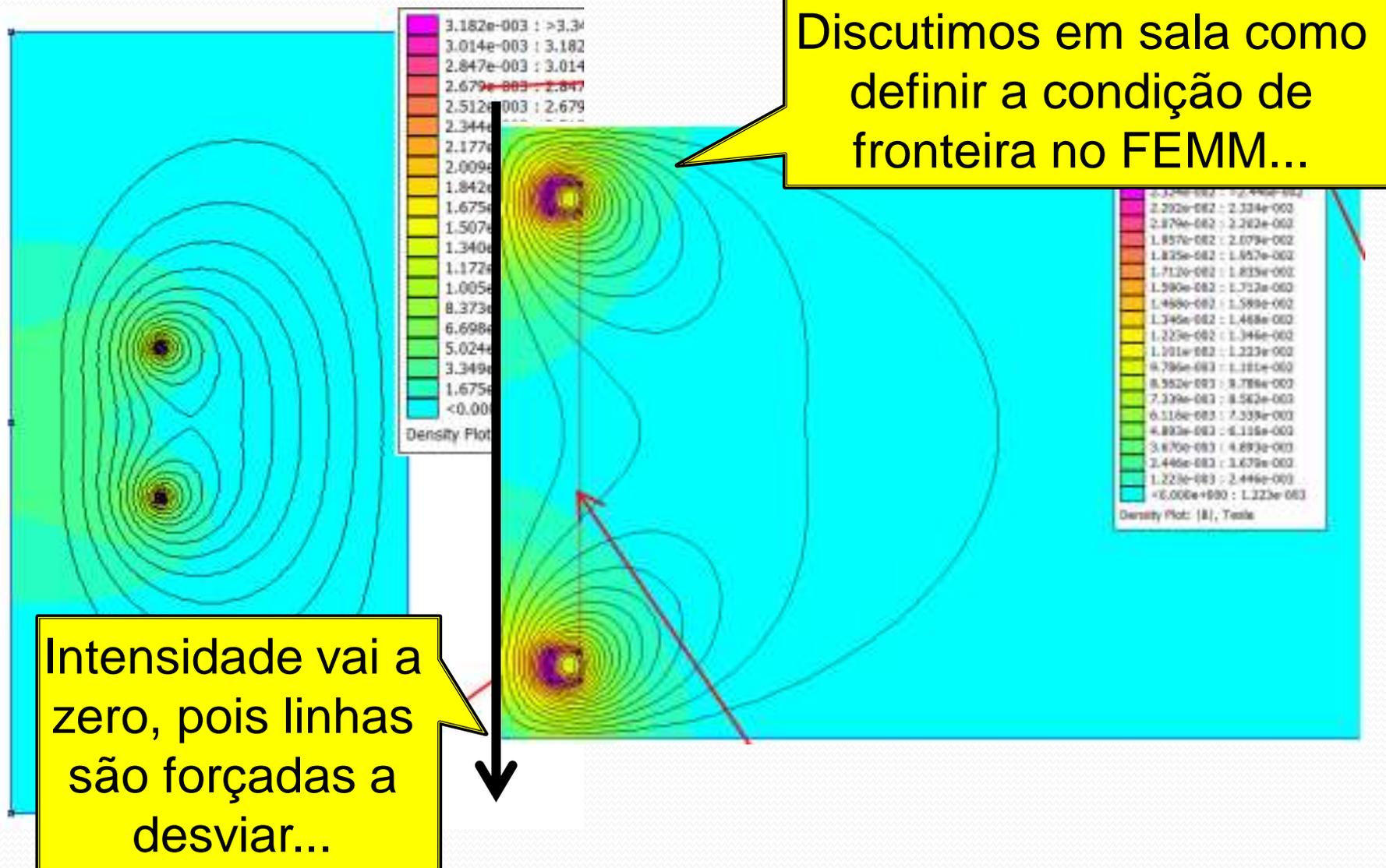
**Eixo paralelo a
um diâmetro**

Simulação correta



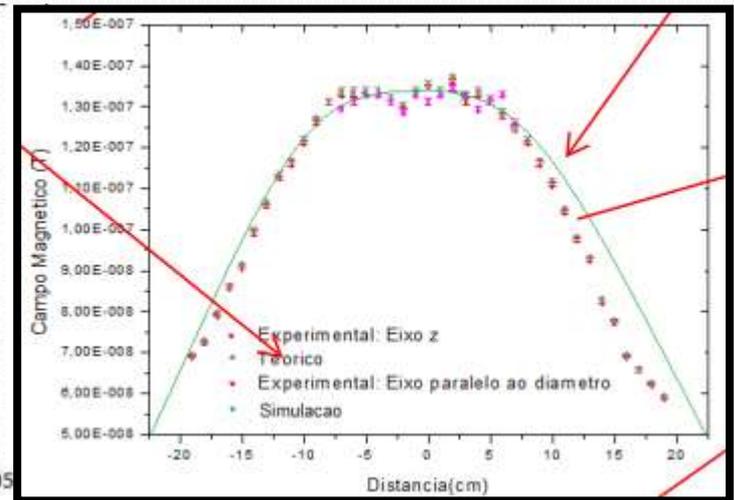
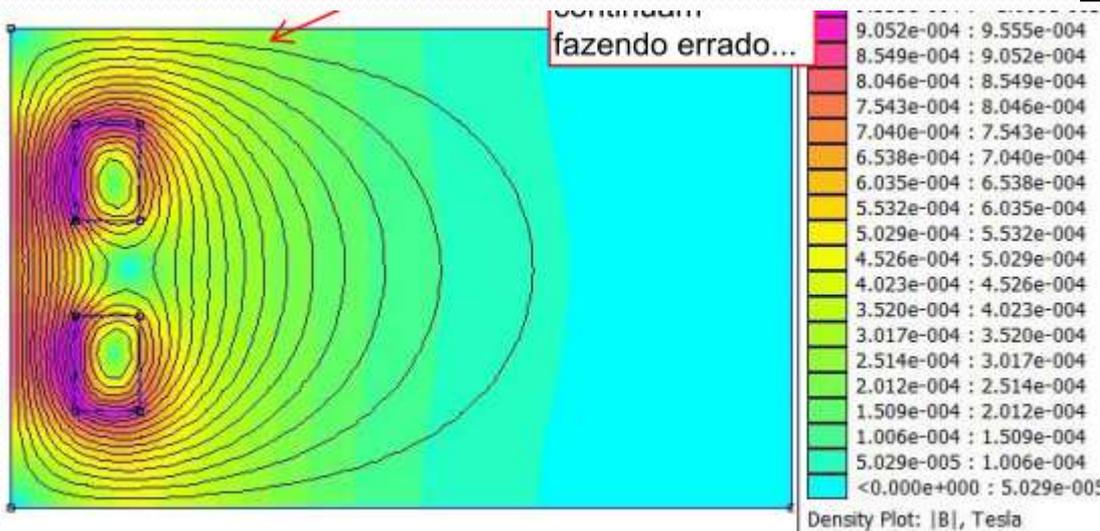
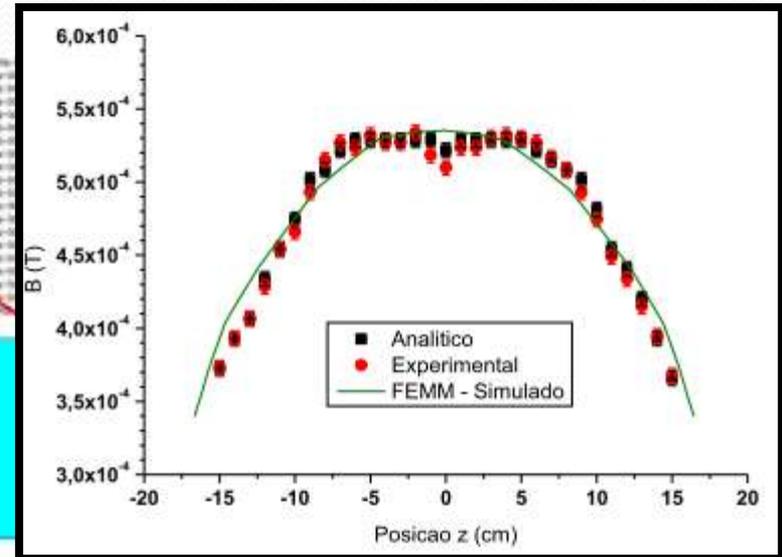
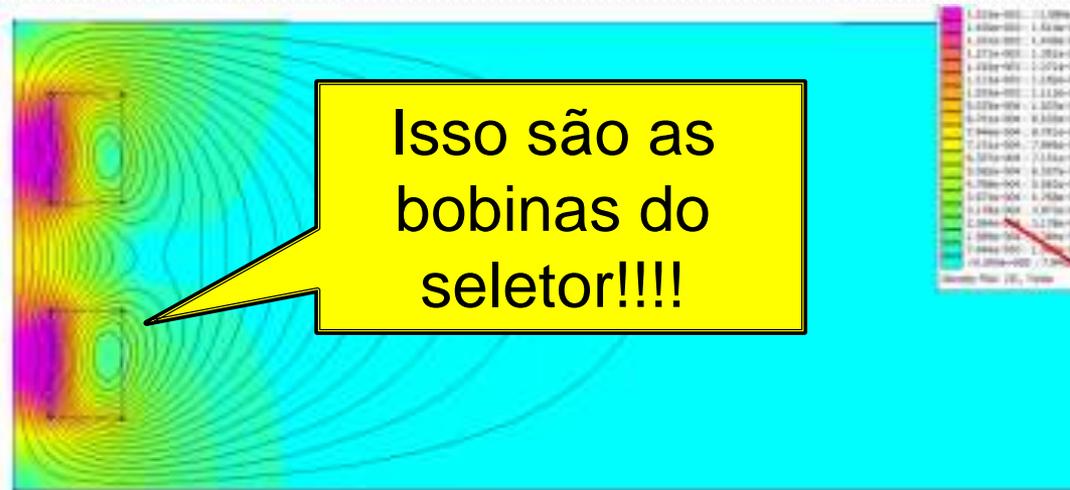
- Qual a intersecção da bobina de Helmholtz e um semi-plano com origem no eixo de simetria???

Problemas 1



Simulação errada batendo com observado?!?!

Isso são as bobinas do seletor!!!!



Geometria

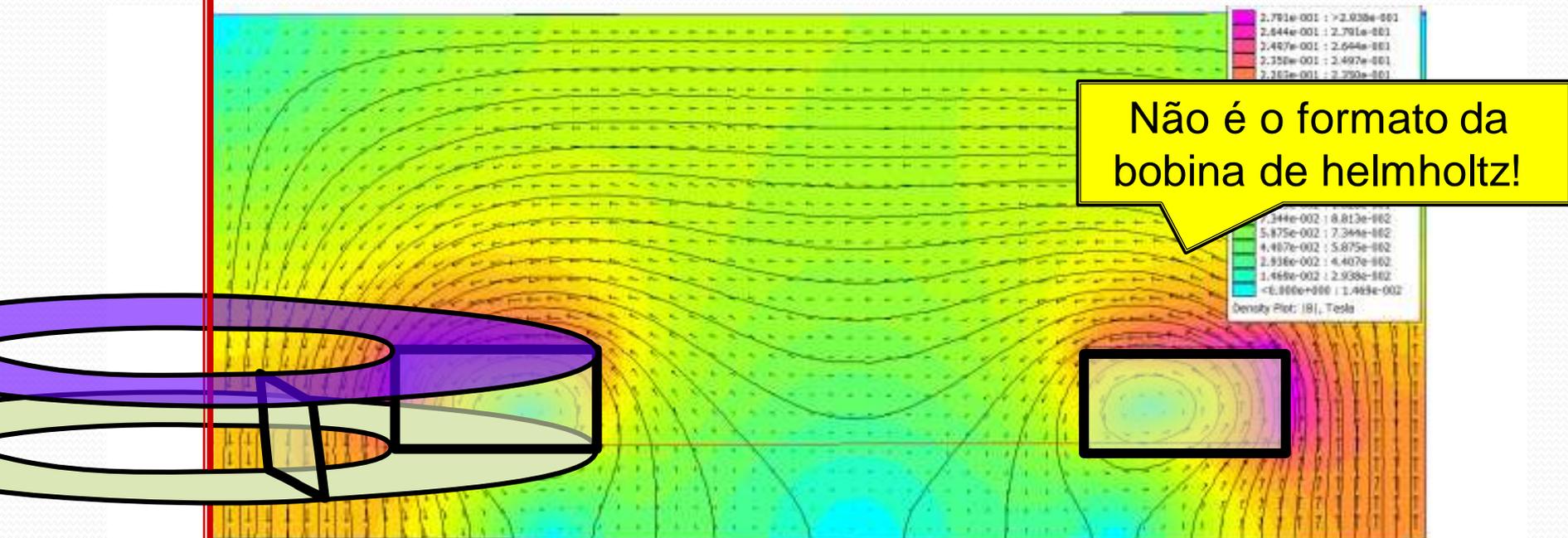


Figura 3: Campo magnético produzido por uma bobina de Helmholtz simulado pelo *FEMM*. A variação do campo magnético ao longo da linha vermelha na figura está representada na figura 2b.

Geometria

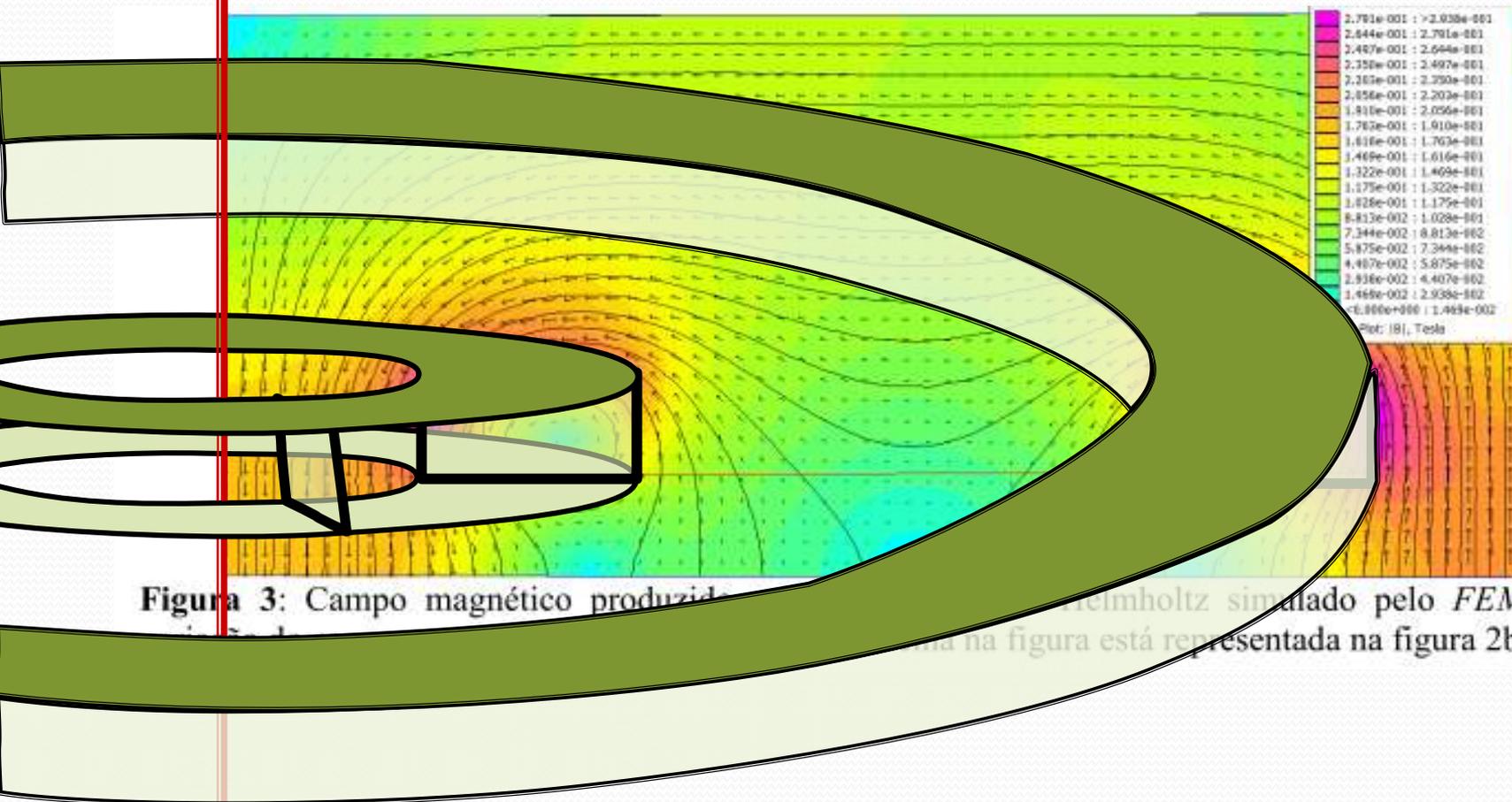
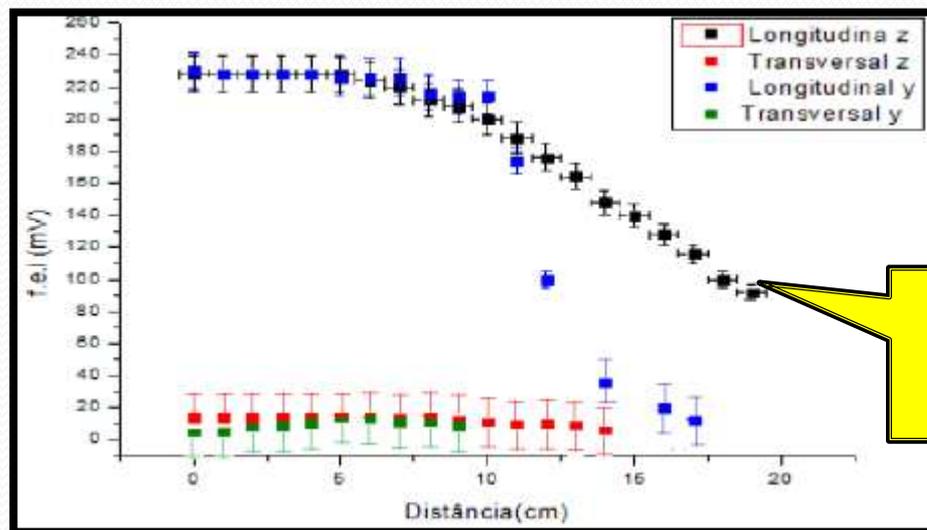
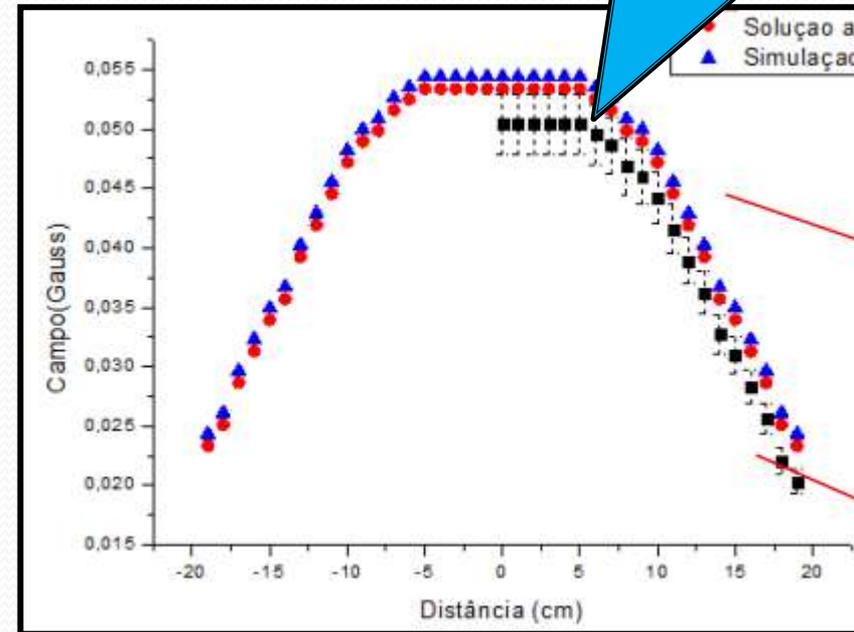
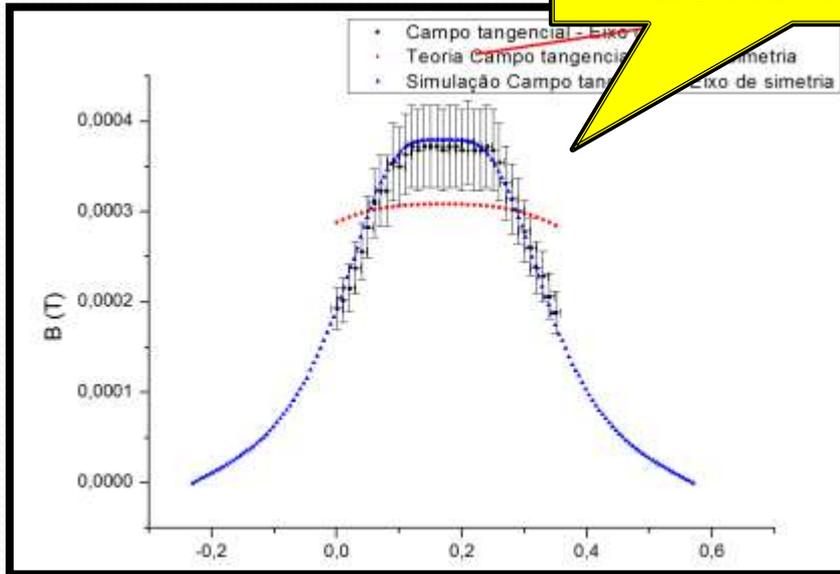


Figura 3: Campo magnético produzido por uma bobina de corrente contínua simulado pelo FEMM. A geometria da bobina na figura está representada na figura 2b.

Ex em X

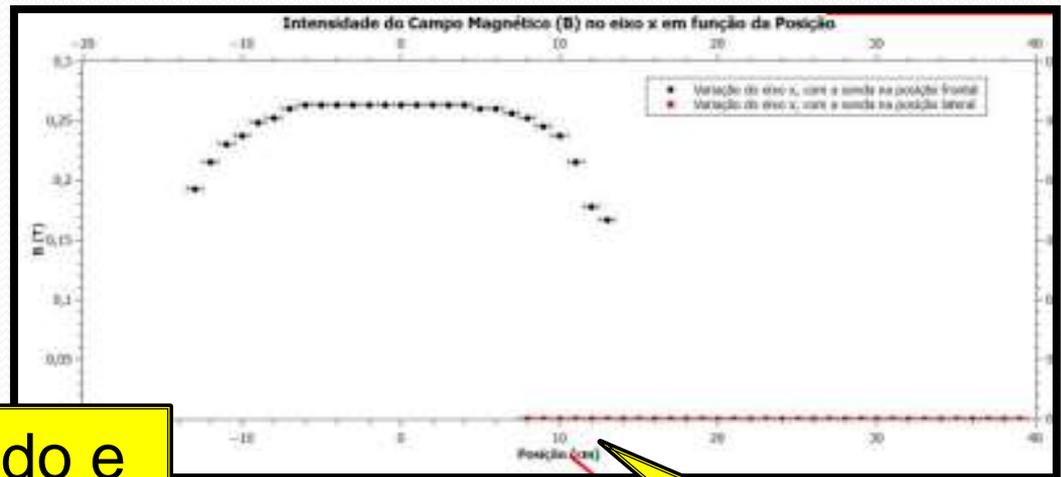
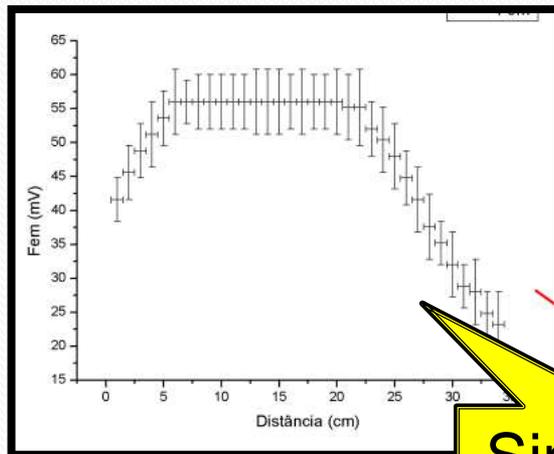
Teórico e simulado deviam bater

Diferenças compatíveis com incerteza em i



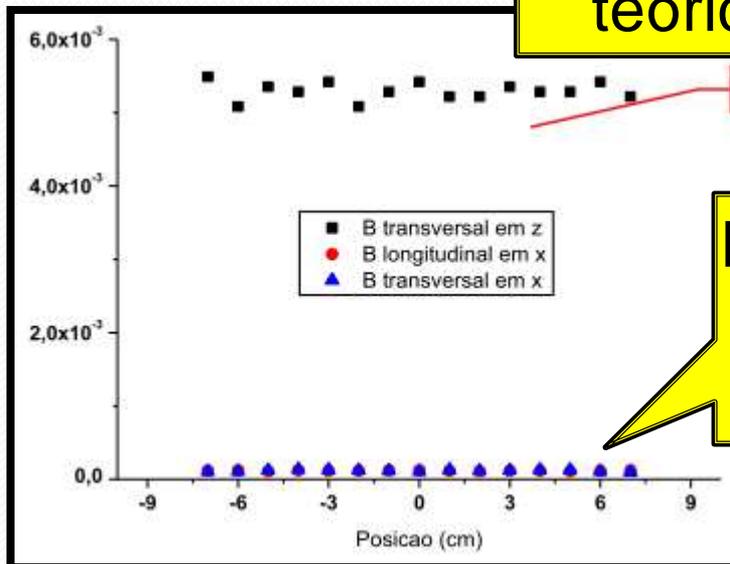
Faltam curvas teóricas

Ex em X, Problemas...



Simulado e teórico?

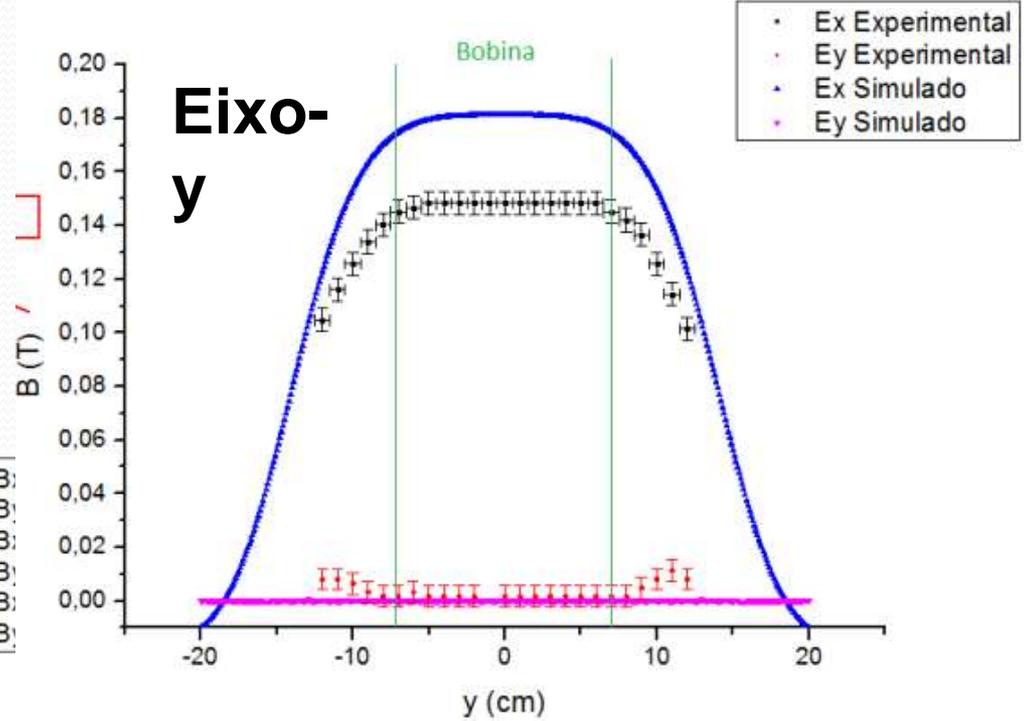
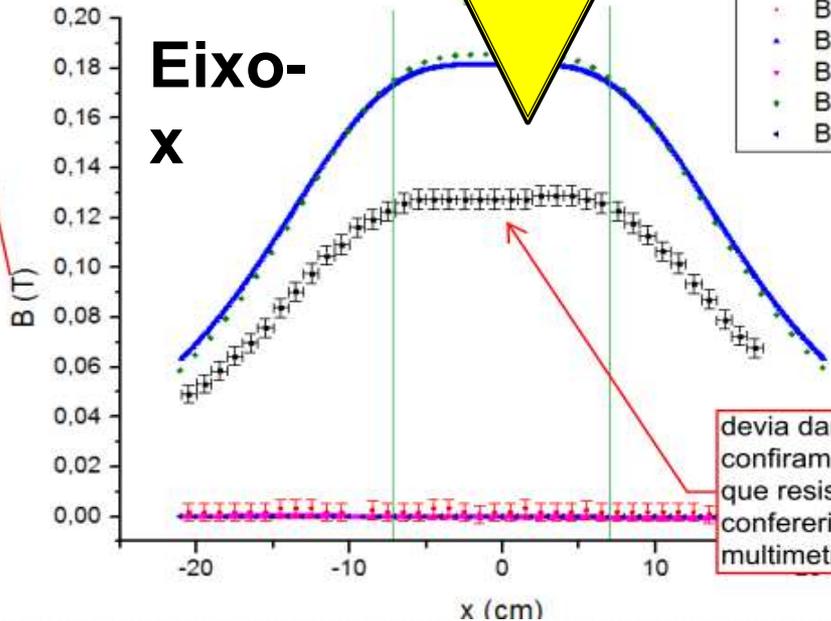
Medidas fora de centro



Longitudinal em x ou y deviam ser iguais

X e Y, Boa Apresentação, H08

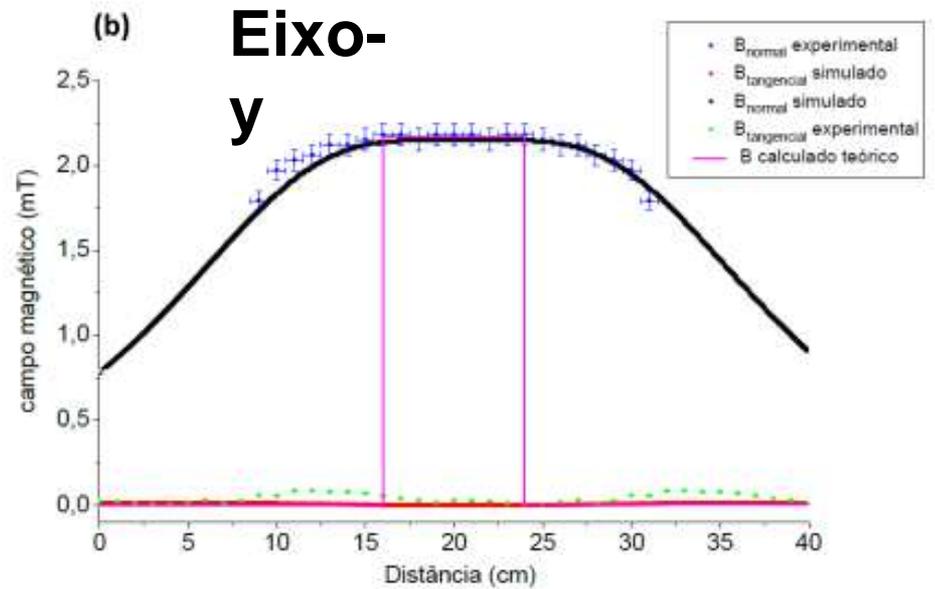
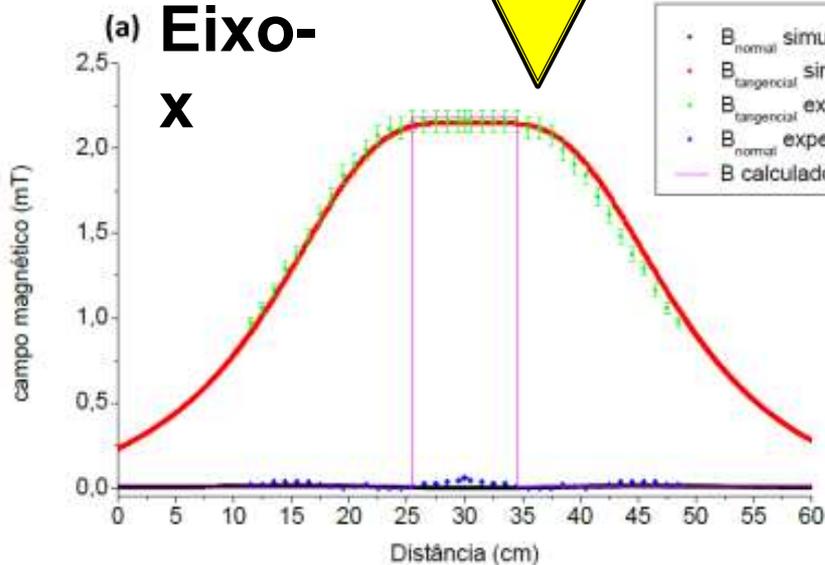
Conferir valor de corrente! E/ou área da bobina



devia dar muito melhor...
confirmam o valor de corrente
que resistor foi usado?
conferiram o valor com
multimetro?

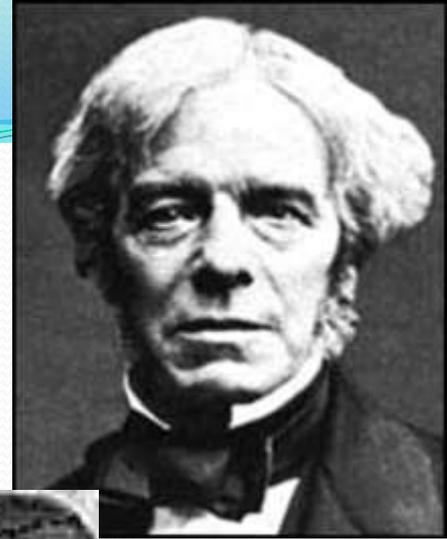
X e Y, Boa Apresentação, H12

Verificar com H08
a direção dos
eixos...



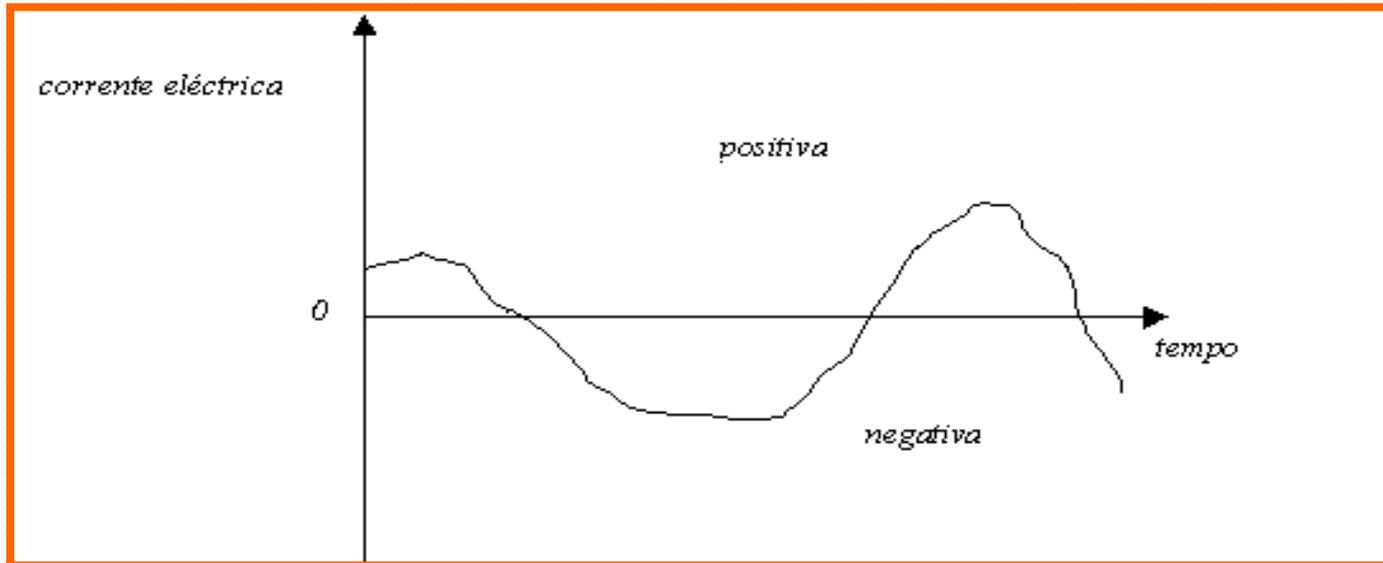
Correntes Alternadas e Faraday

1791-1867



Corrente alternada

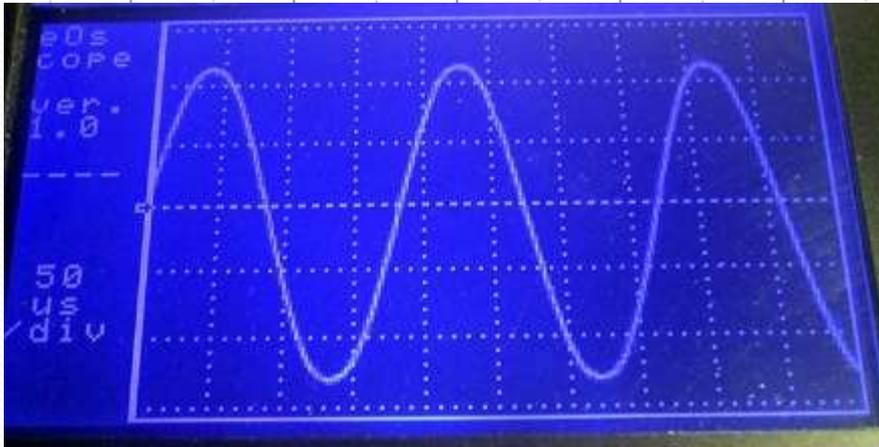
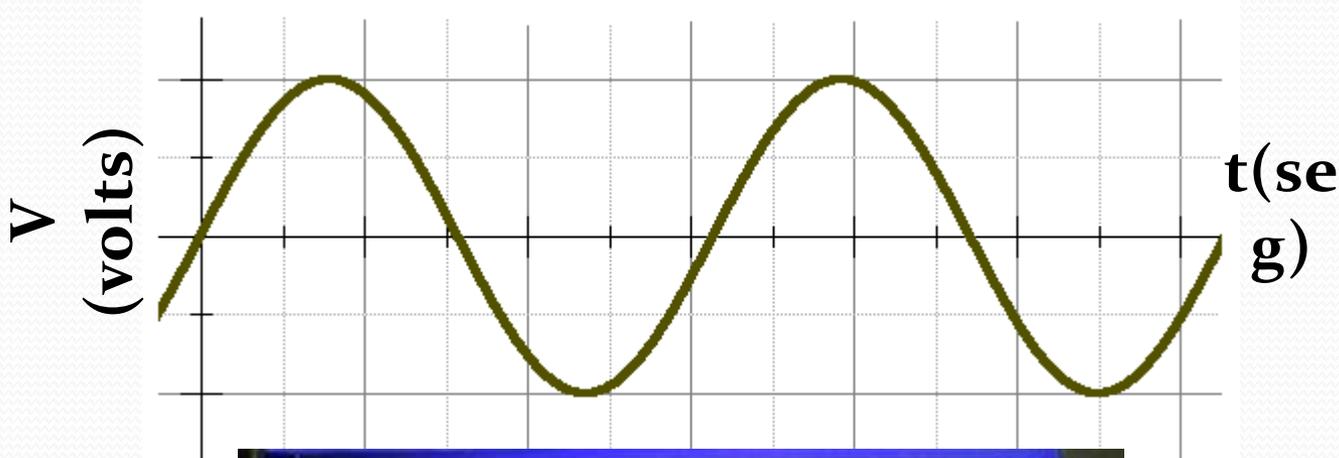
- Tensão alternada: qualquer tensão que varia no tempo



- Nesta experiência: tensões harmônicas simples
**Importante: qualquer tensão dependente do tempo
= superposição de tensões harmônicas simples**

Tensão alternada

- Na grande maioria dos usos a tensão (ou corrente) é descrita por uma função harmônica simples:
 - por exemplo na sua casa, a D.D.P. fornecida é senoidal:



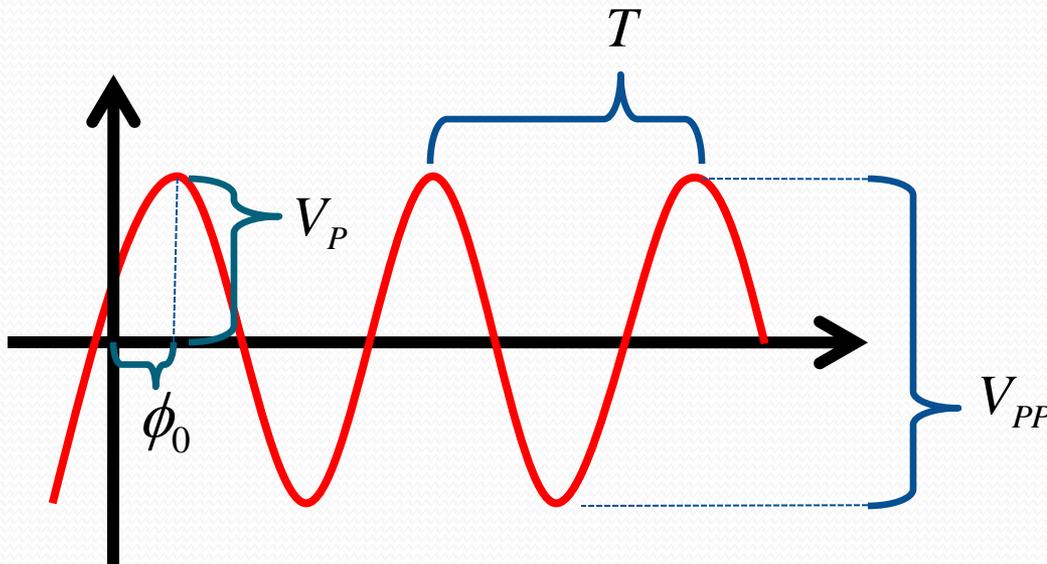
127V,
60Hz



Tensão harmônica

- Como descrever matematicamente uma tensão senoidal?
 - V_P é a tensão máxima ou **tensão de pico** ou amplitude
 - ω é a **frequência angular**
 - ϕ_0 é a **fase da tensão alternada no instante $t=0$**

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0)$$



$$\omega = 2\pi f \quad T = \frac{1}{f}$$

$$V_{PP} = 2V_P$$

$$V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

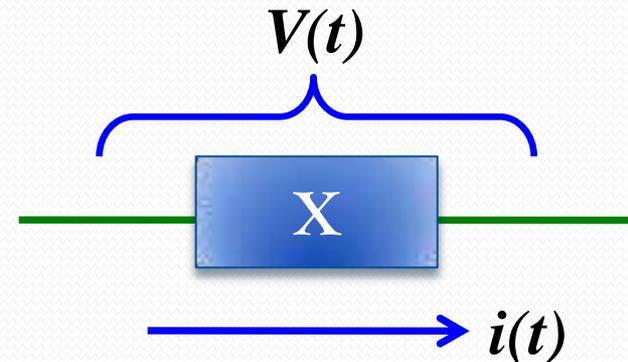
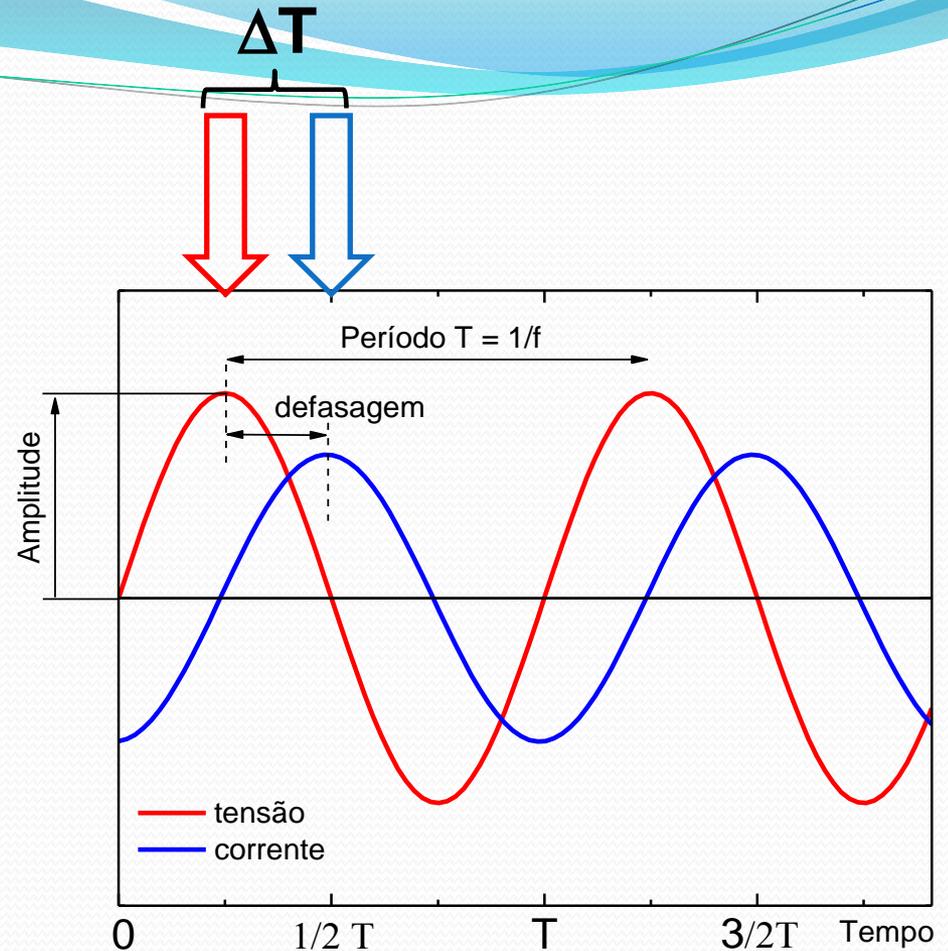
A fase

- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não estão necessariamente em fase:

$$V(t) = V_P \sin(\omega t + \phi_0)$$

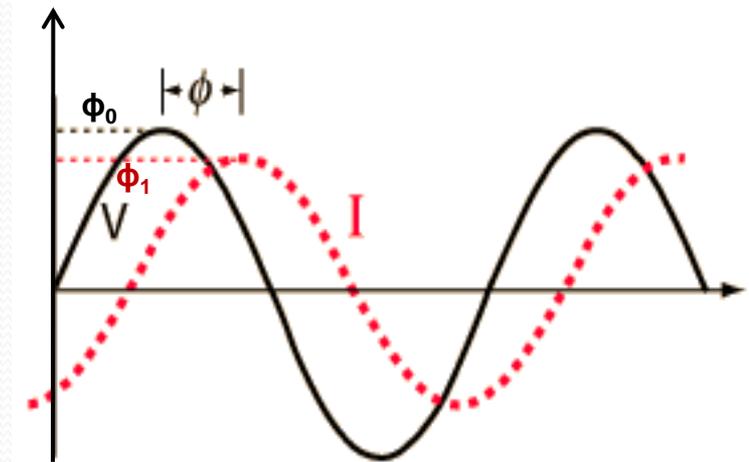
$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$



Diferença de fase

- Neste caso é mais importante saber a diferença de fase entre a corrente e a tensão do que os valores de ϕ_0 e ϕ_1 . Porque?
- Fase é uma fração de um ciclo (ou período) expressa em graus
- Entre o início e o fim de um período há uma diferença de fase de 360° .
- Um período corresponde a 360° , $\frac{1}{2}$ corresponde a 180° , etc...



A tensão é alternada, então a escala de tempo é, de certa maneira, arbitrária

Potência Dissipada - Instantânea

- Qual é a potência dissipada no elemento?

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

- Ela depende da diferença de fase entre corrente e tensão no elemento!

$$\begin{array}{l} i(t) = i_p \text{sen}(\omega t) \\ V(t) = V_p \text{sen}(\omega t + \phi) \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(t) = V_p i_p \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega t + \phi)$$

- Portanto há um termo variável e outro constante!

$$P(t) = \frac{V_p i_p}{2} \cos(\phi) - \frac{V_p i_p}{2} \cos(2\omega t + \phi)$$

Potência média: mais útil

- O valor médio da potência num período T é:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos \phi dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi) dt = 0$$

- A segunda integral é nula, mas a primeira não:

$$P(t) = \frac{1}{2} V_P i_P \cos \phi = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \frac{i_P}{\sqrt{2}} \cos \phi$$

- Chama-se de valor eficaz da tensão, V_{ef} , o valor $V_P/\sqrt{2}$ e valor eficaz da corrente, i_{ef} , o valor $i_P/\sqrt{2}$

$$P(t) = V_{ef} i_{ef} \cos \phi_0$$

Potência média

- Ela depende, além das tensões e correntes, também da defasagem!

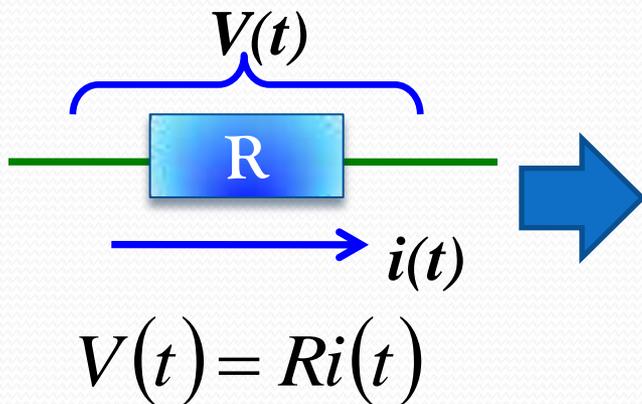
$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi) \quad i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} V_P i_P \cos \phi$$

- Agora pode-se calcular a potência média, por ciclo, transferida ao elemento de circuito, seja ele, resistivo, capacitivo, indutivo ou misto.

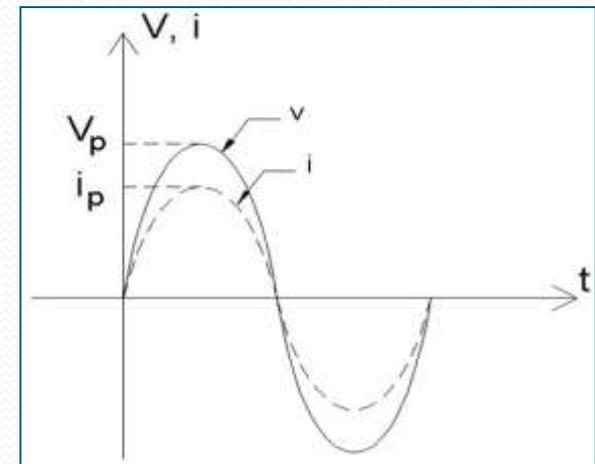
Exemplo 1: Resistor ôhmico

- A lei de Ohm diz que $V = R i$, onde R é uma constante se o resistor for ôhmico. Assim, se a tensão estiver variando, temos que:



$$V(t) = V_p \text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$i(t) = \frac{V_p}{R} \text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

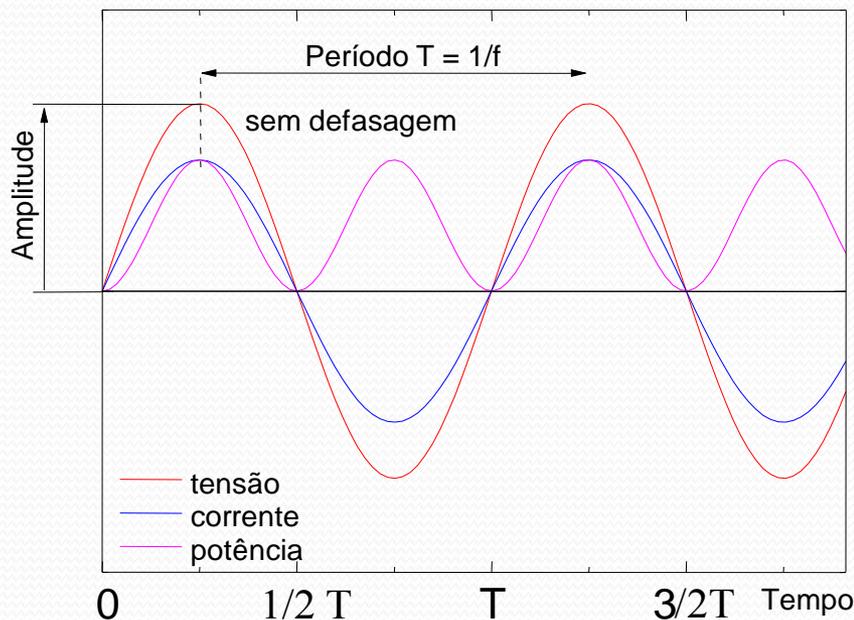


- Como as fases ϕ_0 são iguais, então que a corrente e a tensão no resistor estão em fase!

Exemplo 1: Resistor ôhmico

- Para um **resistor ôhmico**, teremos então que:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = V_p i_p \text{sen}^2(\omega t) > 0, \text{ sempre}$$



- **A potência varia no tempo mas é sempre positiva o que significa que o resistor sempre consome potência!**

Exemplo 2: Capacitor Ideal

Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Além disso, carga e corrente estão relacionados

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

Portanto:

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = V_p \sin(\omega t) = V_p \cos(\omega t - \pi / 2)$$

$$i(t) = \omega C V_p \cos(\omega t)$$

A fase não é nula!

Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = \left(V_p \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \right) \left(\omega C V_p \cos(\omega t) \right)$$

$$(-\pi/2) - (0) = -\pi/2$$

$$= \left(\frac{i_p}{\omega C} \sin(\omega t) \right) \left(i_p \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \right)$$

$$(0) - (\pi/2) = -\pi/2$$

- Atenção, a diferença de fase = **Fase Tensão – Fase Corrente**

Exemplo 3: Indutor ideal

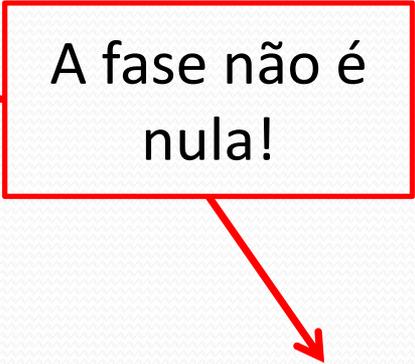
- Em um indutor ideal, a tensão é dada por:

$$V(t) = L \frac{di}{dt}$$

- Portanto, se a corrente no indutor é:

$$i(t) = i_p \cos(\omega t)$$

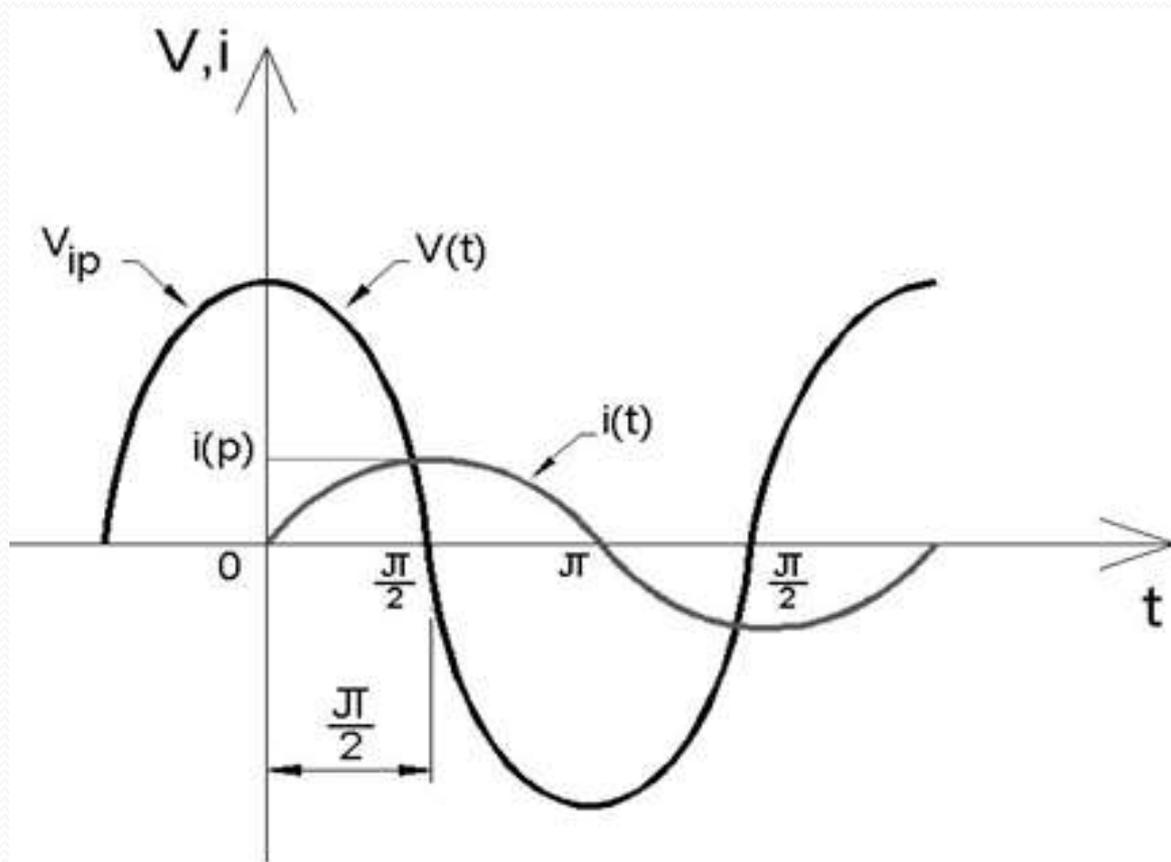
A fase não é nula!



- Então, temos:

$$V(t) = L \frac{di}{dt} = -L\omega i_p \sin(\omega t) = L\omega i_p \cos(\omega t + \pi / 2)$$

Exemplo 3: Indutor ideal



- a corrente está atrasada de $\pi/2$ em relação à tensão aplicada ao indutor (**Atenção:** a defasagem de $\pi/2$ é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o indutor e não quaisquer outras).

Exemplo 3: Indutor Ideal

- A potência em um indutor pode ser escrita como:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = \left(V_p \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \right) \left(\frac{V_p}{\omega L} \cos(\omega t) \right)$$

$$(\pi/2) - (0) = +\pi/2$$

$$= (\omega L i_p \sin(\omega t)) \left(i_p \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$(0) - (-\pi/2) = +\pi/2$$

- Atenção, a diferença de fase = **Fase Tensão – Fase Corrente**

Potência - Revisão

Muito difícil acompanhar os sinais e as trocas de $\sin(x)$ por $\sin(90-x)$... Vamos introduzir uma nova notação, mais genérica e mais simples!

- Para o resistor:

$$P(t) = Ri_p^2 \text{sen}^2(\omega t)$$

- Para o capacitor:

$1/\omega C$ é como se fosse a “resistência” do capacitor!

$$P(t) = \frac{i_p^2}{\omega C} \sin(\omega t) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Mas essa “resistência” introduz uma fase!

- Para o indutor:

ωL é como se fosse a “resistência” do indutor!

$$P(t) = \omega Li_p^2 \sin(\omega t) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Mas essa “resistência” introduz uma fase!

Números Complexos

$$\hat{C} = a + b j \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C} = C e^{j\alpha} \quad e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas
nesta notação são
apenas multiplicações
e divisões

Formalismo Complexo

- Este formalismo é construído de tal forma a facilitar todos os cálculos que envolvem tensões alternadas
- Vamos definir as tensões e correntes complexas como sendo:

$$\begin{aligned}\hat{V}(t) &= V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \\ \hat{i}(t) &= i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}V(t) &= \operatorname{Re}(\hat{V}(t)) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ i(t) &= \operatorname{Re}(\hat{i}(t)) = i_0 \cos(\omega t + \phi_1)\end{aligned}$$

Impedância Complexa e Real

A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

$Z_0 \cos(\phi)$ é a impedância REAL do elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a tensão e corrente causada pelo elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e Reatância

- Da definição de impedância complexa:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos escrever também que:

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

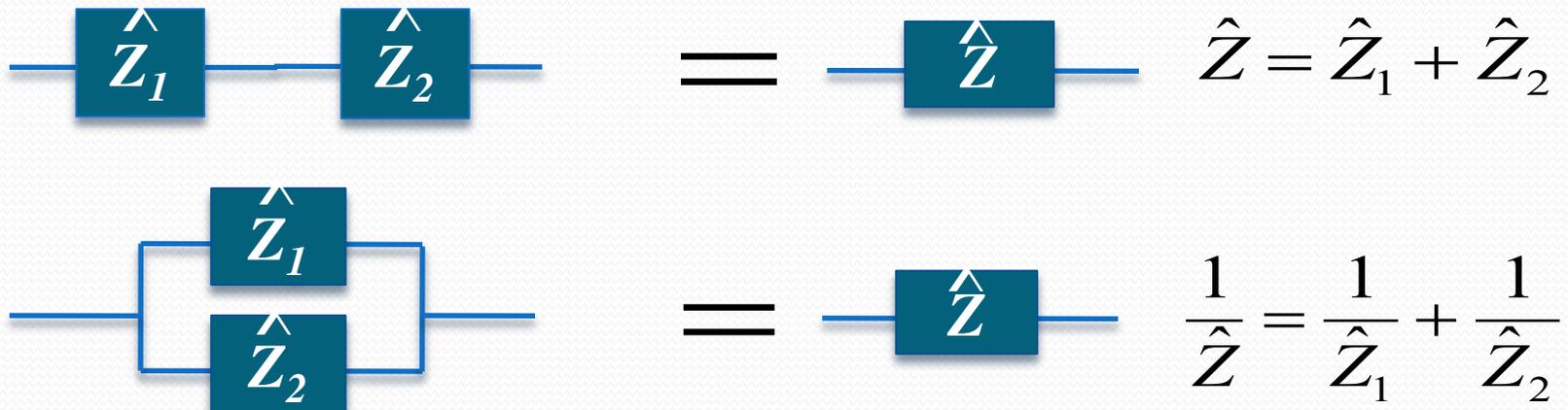
$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

- E reatância deste bipolo (X)

$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

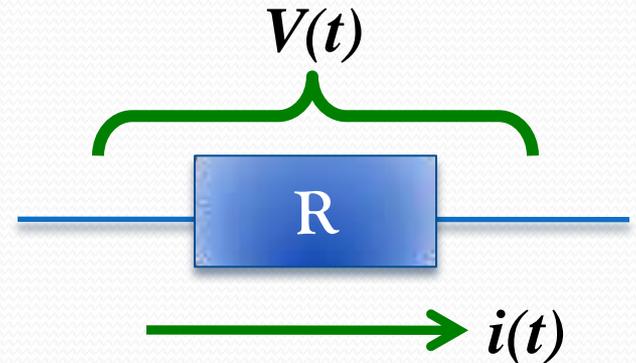
- As grandes vantagens deste formalismo são:
 - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
 - Multiplicações e divisões de exponenciais
 - Associações de bipolos tornam-se simples
 - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas



Exemplo 1: Resistor

- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Mas sabemos que $R = V/i$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

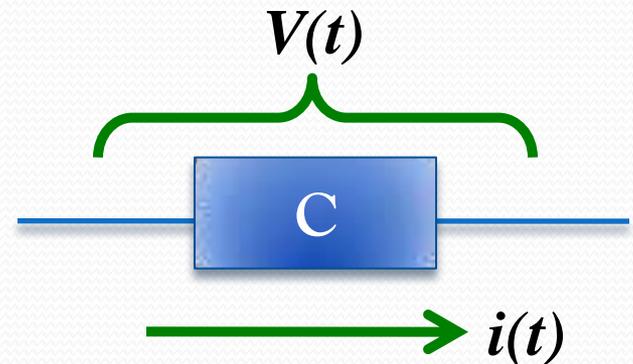
$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

Exemplo 2: Capacitor

- Sabemos (do começo da aula) que $V(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
- Se a corrente complexa for dada por: $\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$
- Fica fácil demonstrar que $\hat{V}(t) = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$
- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$

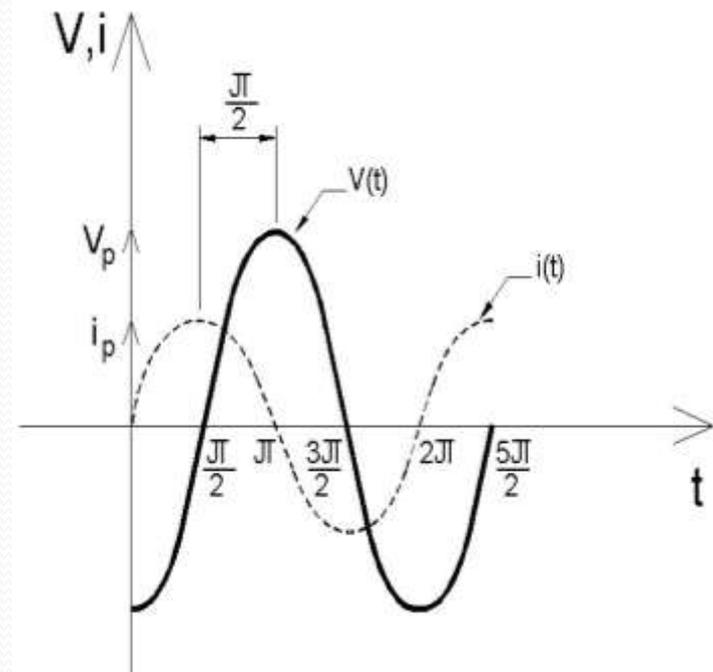


Exemplo 2: Capacitor

- Ou seja $\hat{Z} = -\frac{j}{\omega C}$
- Mas lembrando que: $\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$
- Comparando as duas expressões temos que:

$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

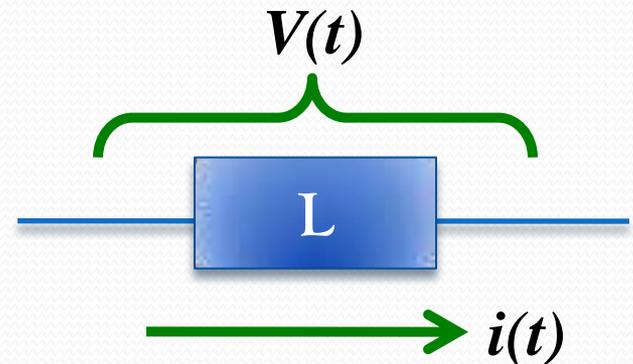
Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de $\pi/2$ em relação à corrente



Exemplo 3: indutor

- Sabemos que $V(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$
- Se a corrente complexa for dada por: $\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$
- Fica fácil demonstrar que $\hat{V}(t) = j\omega L i_0 e^{j\omega t}$
- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{j\omega L i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = j\omega L$$

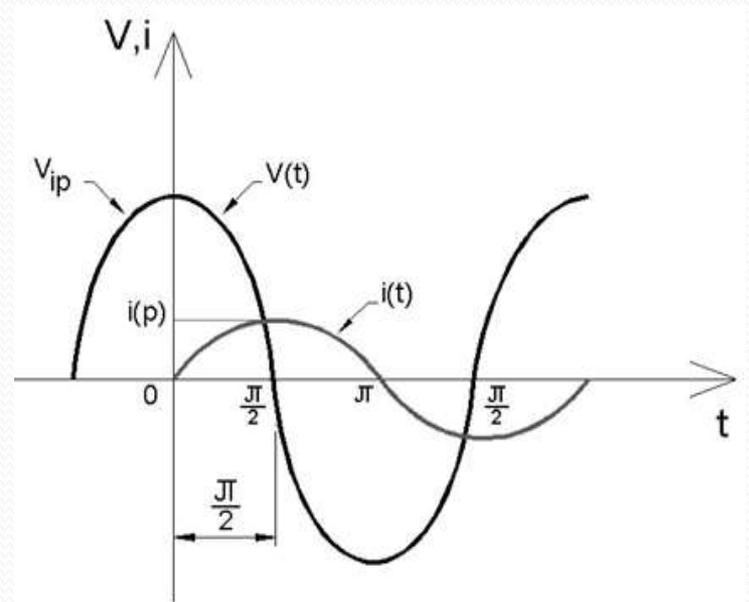


Exemplo 3: Indutor

- Ou seja $\hat{Z} = j\omega L$
- Mas lembrando que: $\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$
- Comparando as duas expressões temos que:

$$Z_0 = \omega L \quad \phi = +\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está adiantada de $\pi/2$ em relação à corrente



Mas o indutor é ideal?

- Bobinas são fios condutores muito longos enrolados, sua resistência elétrica é, em geral, significativa e não pode ser desprezada.
 - Raramente, o modelo de um indutor ideal pode ser usado para uma bobina comum.
 - As condições que temos: bobina, circuito e intervalo de frequência disponíveis, não é possível adotar o modelo de indutor ideal.
 - Pelo menos a resistência da bobina deve ser levada em conta. Isso significa que o modelo adotado para a bobina, não é mais o de uma indutância pura, mas de uma indutância pura ligada, em série, a uma resistência ôhmica.

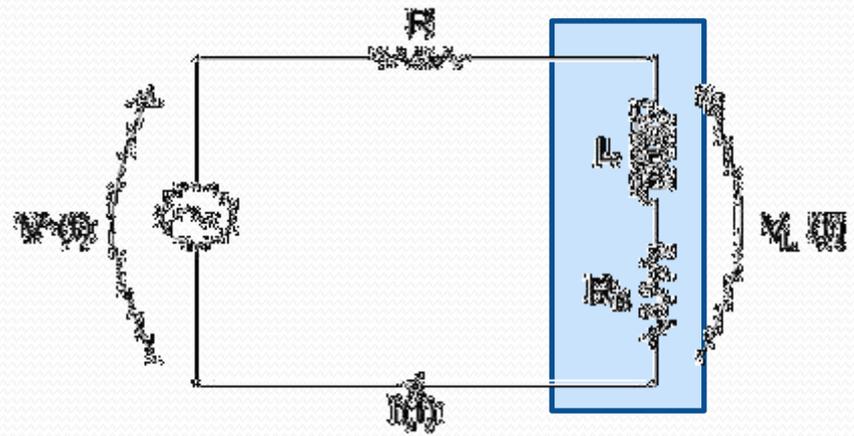
Indutor real: bobina

- **Indutor real: circuito, em série, de uma resistância e de uma indutância pura**
- A impedância complexa equivalente é a soma das impedâncias complexas de cada elemento. A impedância resistiva da bobina é R_B e a impedância complexa do indutor puro é X_L :

$$\hat{Z} = j\omega L$$

- A impedância total:

$$\hat{Z} = R_B + j\omega L = Z_0 e^{j\varphi_0}$$



Impedância da bobina:

- O valor real da impedância da bobina:

$$Z_B = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R_B^2 + \omega^2 L^2}$$

R_B = resistência da bobina

L = indutância da bobina

- E a defasagem entre a tensão da associação em série R_B + L e a corrente que a percorre, vocês podem calcular:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\omega L}{R_B} \quad \text{ou} \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R_B}\right)$$

Bobina não é indutor puro

- Isso vai ter consequências no comportamento de indutores reais no circuito.
 - uma delas é que a defasagem não é mais $\pi/2$:
 - ela depende da frequência, da indutância e da resistência da bobina
- Vocês podem prever o que acontece com a potência!

Tarefas 1: Capacitor

- Medir a impedância do capacitor em função da frequência
 - Fazer um gráfico da impedância por frequência verificar se a relação teórica prevista é obedecida
 - obter o valor da capacitância e comparar com os valores dos colegas
- Medir a diferença de fase entre a corrente e a tensão no capacitor e comparar com o valor previsto teoricamente.
 - Fazer um gráfico da fase por frequência verificar se a relação teórica prevista é obedecida
 - Comparar também com os valores de seus colegas

Tarefas 2: Indutor

- Medir a impedância da bobina fornecida (250, 500 ou 1000 espiras) em função da frequência
 - Fazer um gráfico da impedância por frequência verificar se a relação teórica prevista é obedecida
 - obter o valor da indutância e comparar com os valores dos colegas e com o valor nominal
- Medir a diferença de fase entre a corrente e a tensão no indutor e comparar com o valor previsto teoricamente
 - Fazer um gráfico da fase por frequência verificar se a relação teórica prevista é obedecida
 - Compare com os valores obtidos por seus colegas

Tarefas 3: para pensar

- Além do que foi medido e com as diferenças de fase medidas calcule:
 - A potência média transferida ao resistor, por ciclo.
 - A potência média transferida ao capacitor, por ciclo.
 - A potência média transferida ao indutor, por ciclo.

As medidas: circuitos

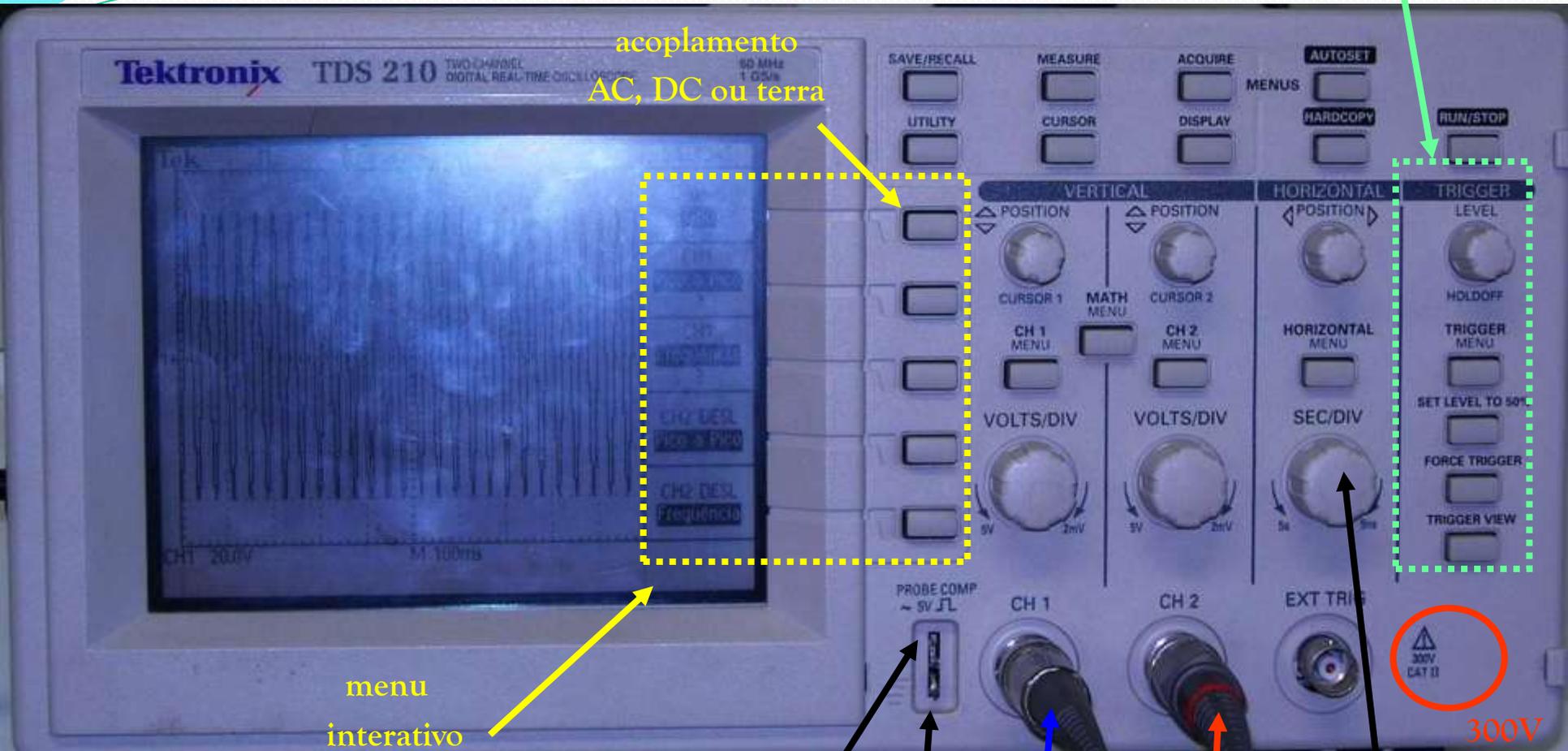
- Em ambos os casos o circuito consta de:
 - Gerador de áudio **com saída de baixa impedância**
 - Resistor de $47\ \Omega$ ou $470\ \Omega$
 - Indutor de 250, 500 ou 1000 espiras
 - Capacitor de $0.47\ \mu\text{F}$ ou $1\ \mu\text{F}$
 - Placa de circuito
 - Osciloscópio

As medidas: Dicas

- Varie a frequência de 100 a 3kHz, ou próximo a isto.
 - O importante é ter voltagens mensuráveis nos dois canais.
 - Esta medida possibilita medir muitos pontos.
- As medidas de fase e amplitude podem ser feitas simultaneamente:
 - Organize uma tabela com:
 - frequência, V_c , V_r e $\Delta\phi$
- Facilite a sua vida linearizando quando possível.
- ATENÇÃO COM OS TERRAS:
 - O terra fica entre capacitor(indutor) e resistor:
 - Facilite sua vida ligue somente um terra no circuito.

Osciloscópio

gatilho (trigger)



A ponta de prova tem atenuador que pode ser alterado (muda também a impedância)

referência 5V

canal 1

canal 2

terra

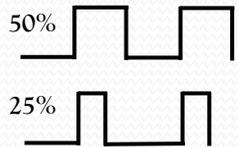
varredura (horizontal)

Gerador de audio

Não vamos usar!



Duty cycle
ADJust



Frequency
ADJust

Amplitude
ADJust

atenuador

intervalo de
frequências

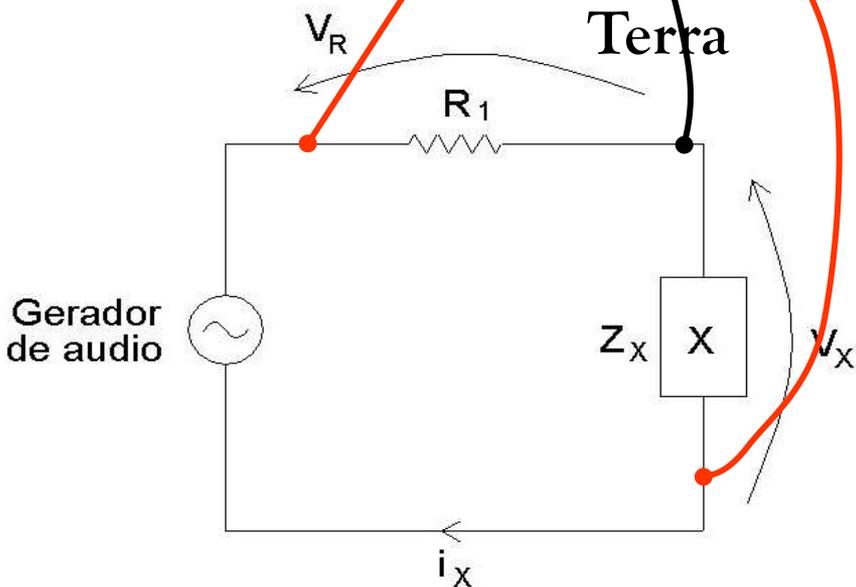
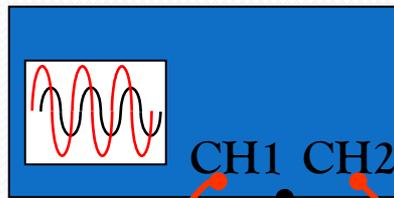
Executa
parâmetro

Circuito

BOBINA

RESISTOR

CAPACITOR



Instrumentos de medida:

- **Osciloscópio**
 - Canal 1: $-i_R = -V_R/R$ é a corrente no circuito
 - Canal 2: V_X
- **Cuidado com ruídos**
 - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído