

# Física Experimental IV

Notas de aula: [www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

LabFlex: [www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

## Aula 3, Experiência 1 Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa

[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)

Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 4 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e Análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

# TAREFAS SEMANA PASSADA

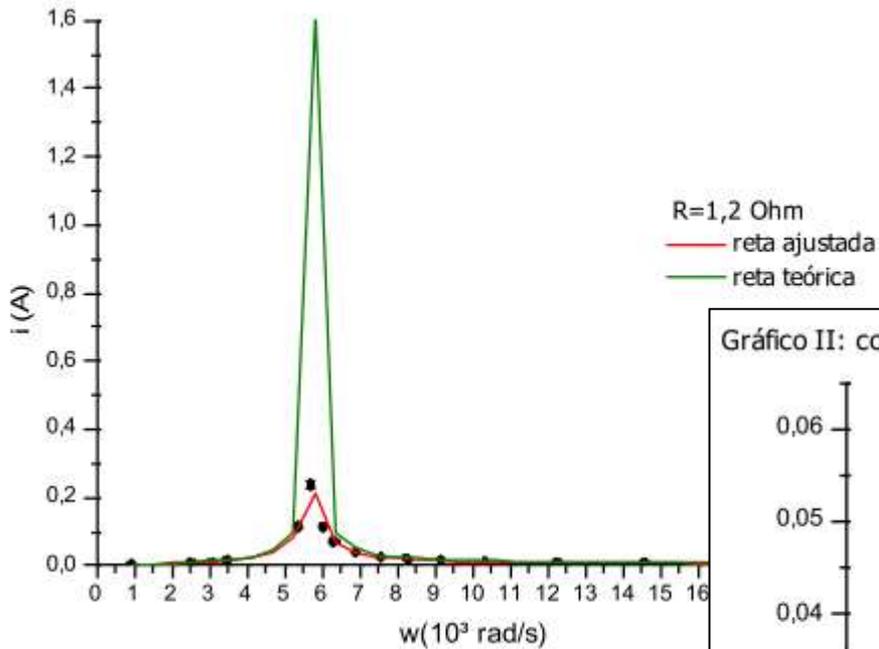


# Para entregar – Parte 1

- Medir a curva de ressonância ( $i \times \omega$ ) e potência ( $P \times \omega$ ) para dois valores de resistência ( $R=1 \Omega$  e  $R=47 \Omega$ )
  - **Não altere a tensão do gerador durante as medidas.**
- Gráfico com as 2 curvas de corrente ( $i \times \omega$ )
  - Colocar também curvas teórica e ajustada
- Gráfico com as 2 curvas de potência ( $P \times \omega$ )
  - Colocar também curvas teórica e ajustada
- Determine o valor experimental da frequência de ressonância e compare com o valor previsto
- Determine o valor experimental de  $Q$ , para cada valor da resistência, e compare com os valores esperados
- Determine  $R$ ,  $L$  e  $C$  e compare com os valores nominais.
  - Há discrepâncias? Explique porque.

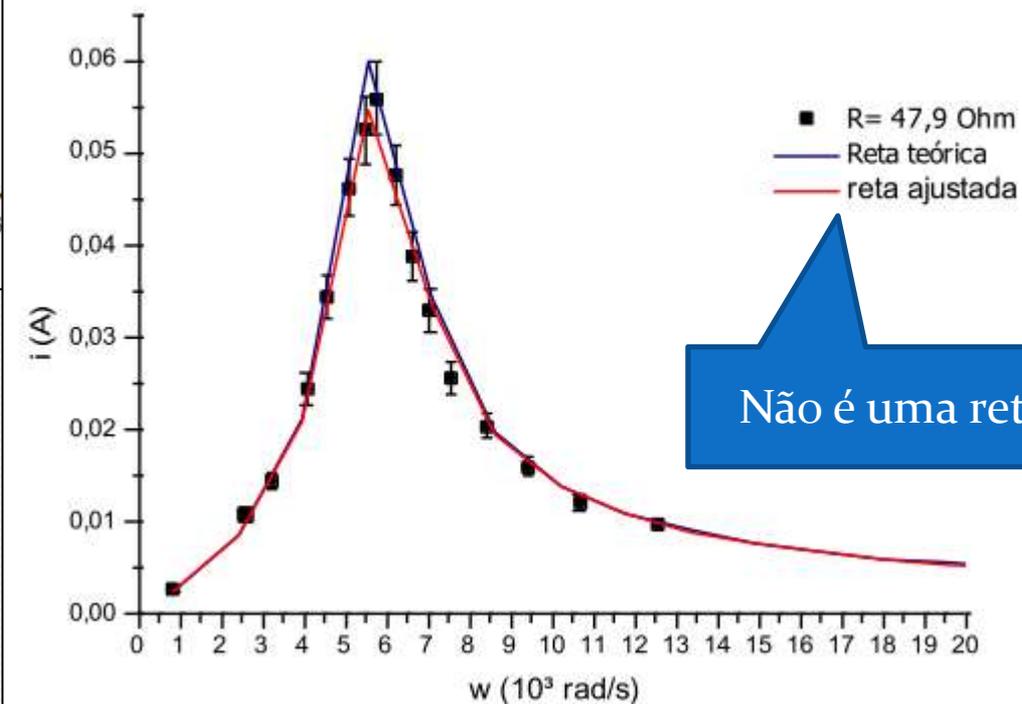
# Duas resistências

Gráfico I: corrente de ressonância em função da frequência, com o resistor de 1,2 Ohm



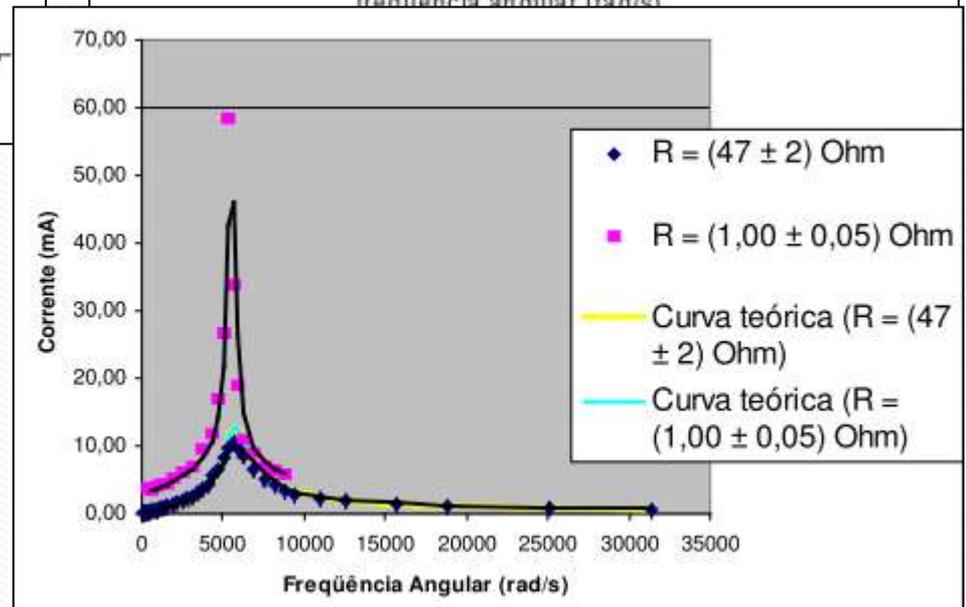
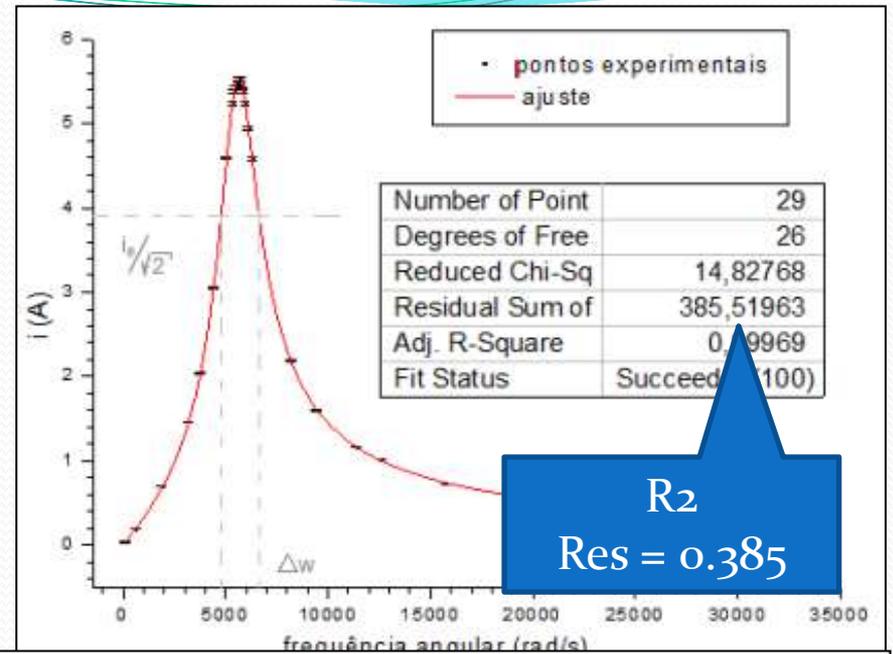
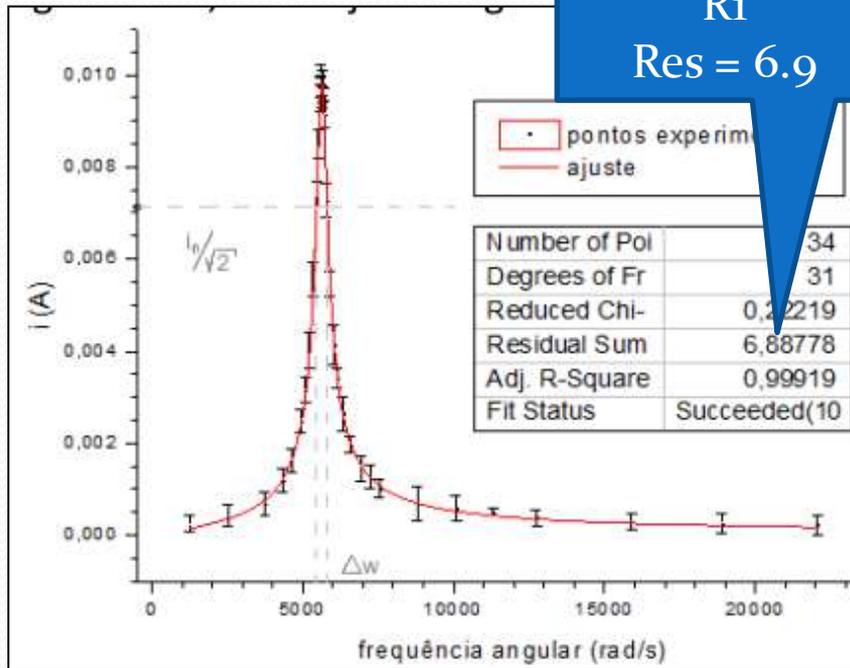
Com a resistência maior fica teórico e experimental ficam mais próximos... Porque ?

Gráfico II: corrente de ressonância em função da frequência, com o resistor de 47,9 Ohm

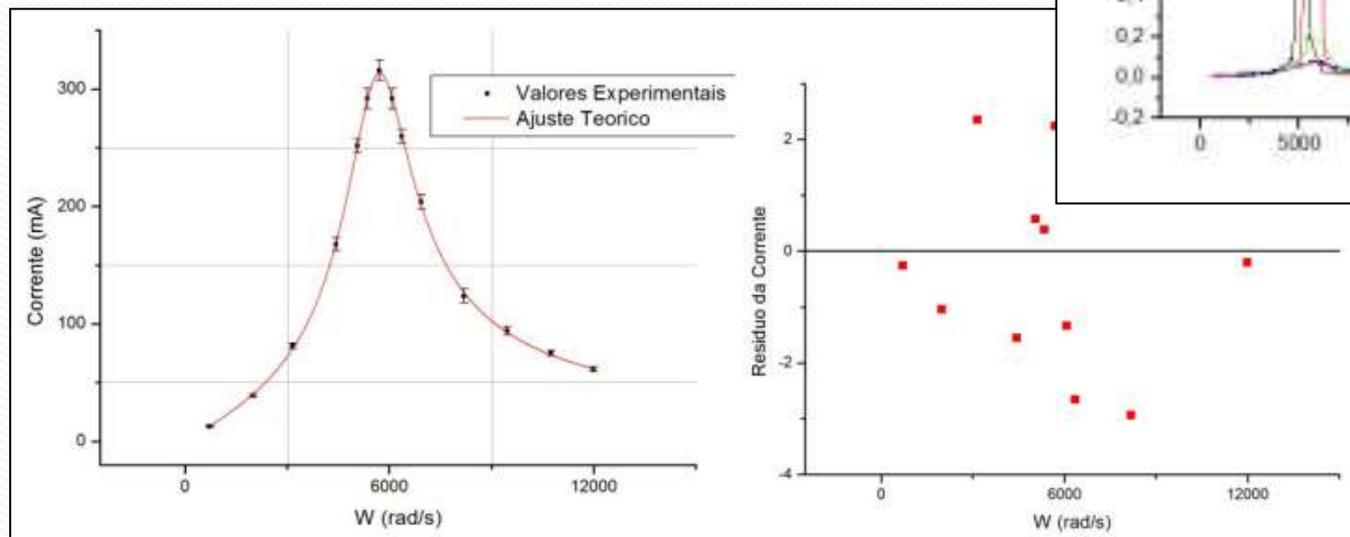
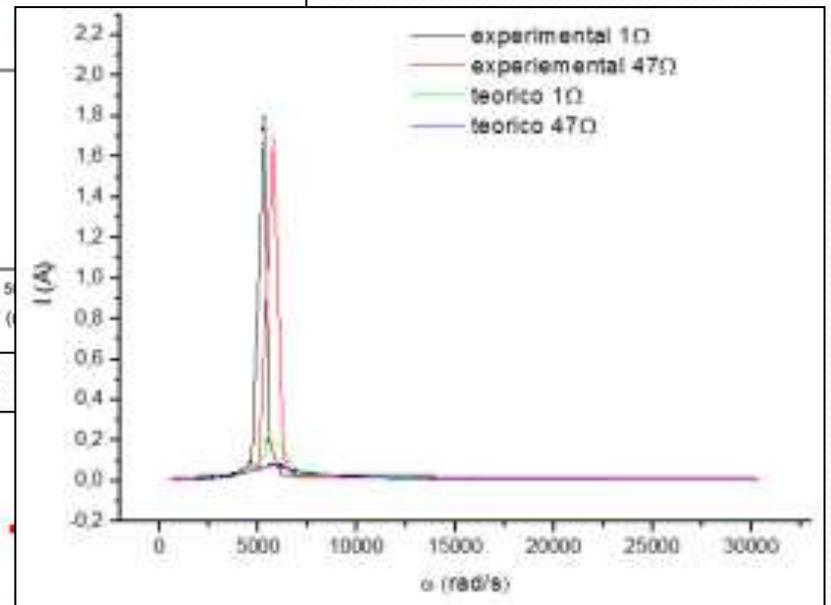
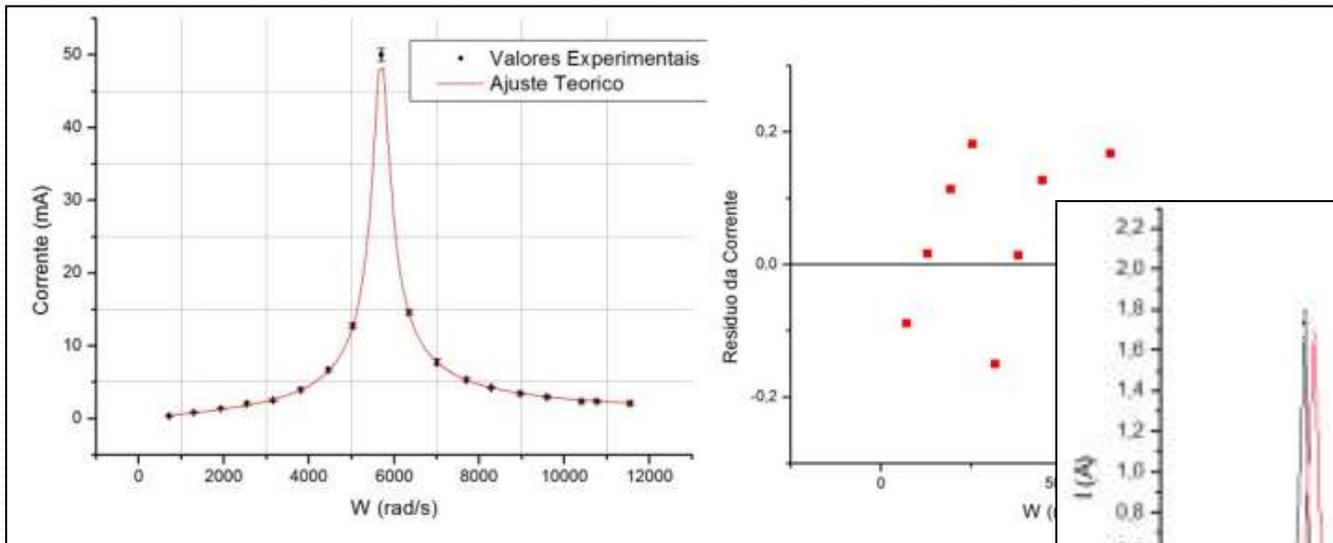


Não é uma reta!

# Análise



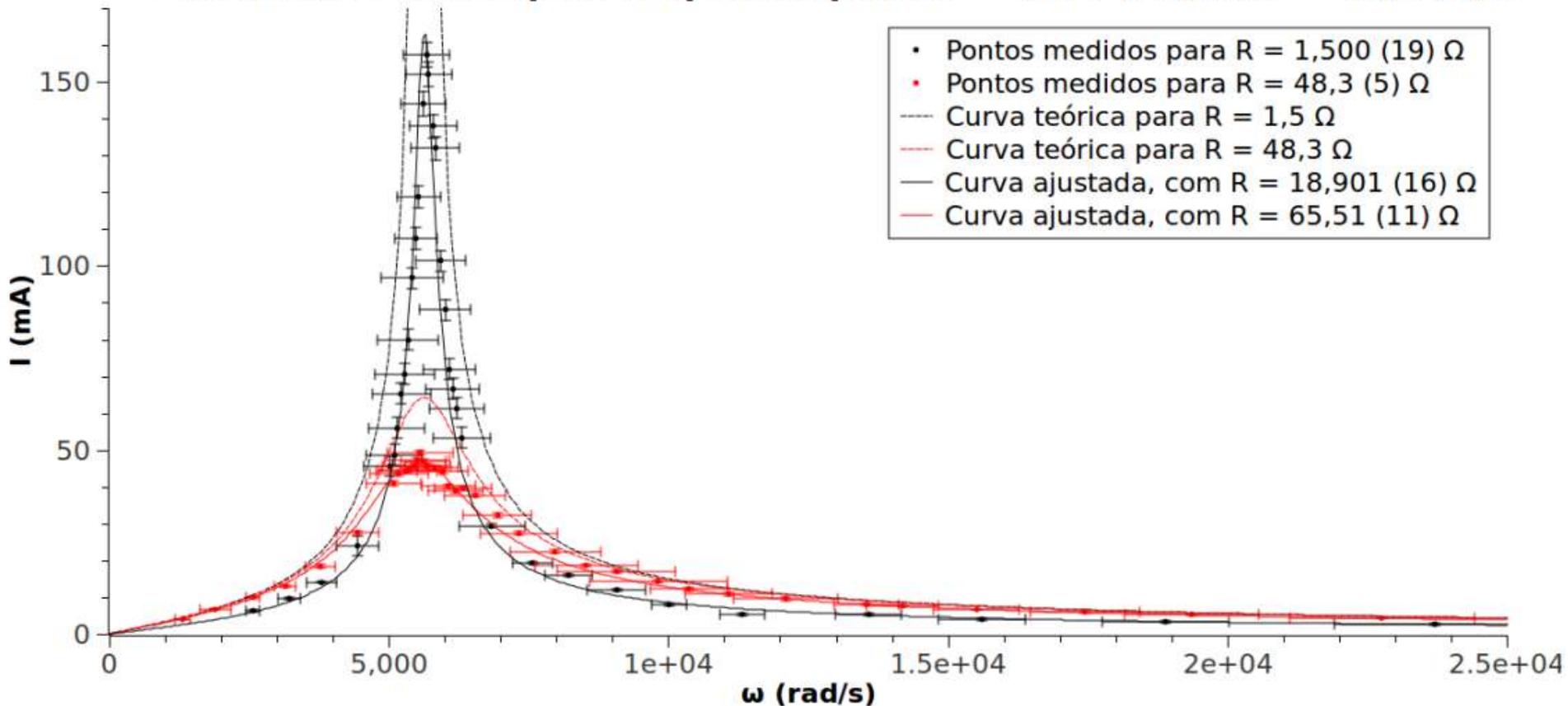
# Curva teórica e experimental



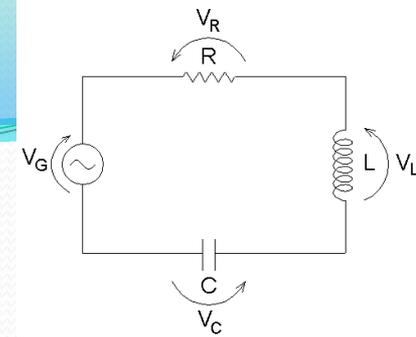
# Todas as curvas

- Apenas 1 grupo colocou tudo no mesmo gráfico

**Gráfico da Corrente pela frequencia para  $R = 1,500 (19) \Omega$ ,  $R = 48,3 (5) \Omega$**



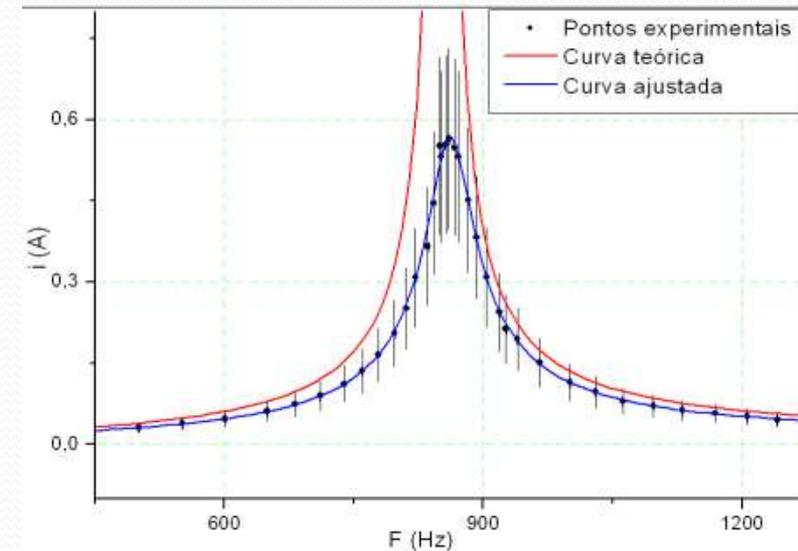
# Revendo tudo



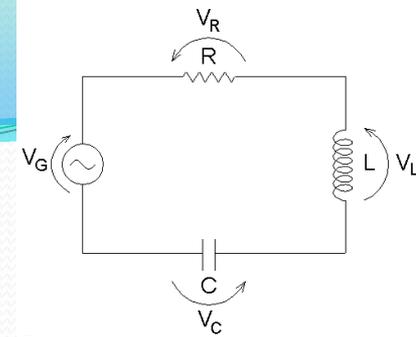
- Os dados não batem com a teoria, mas é possível ajustar uma curva, como a teórica, aos dados!
- Voltando a teoria. Qual a expressão para a corrente?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

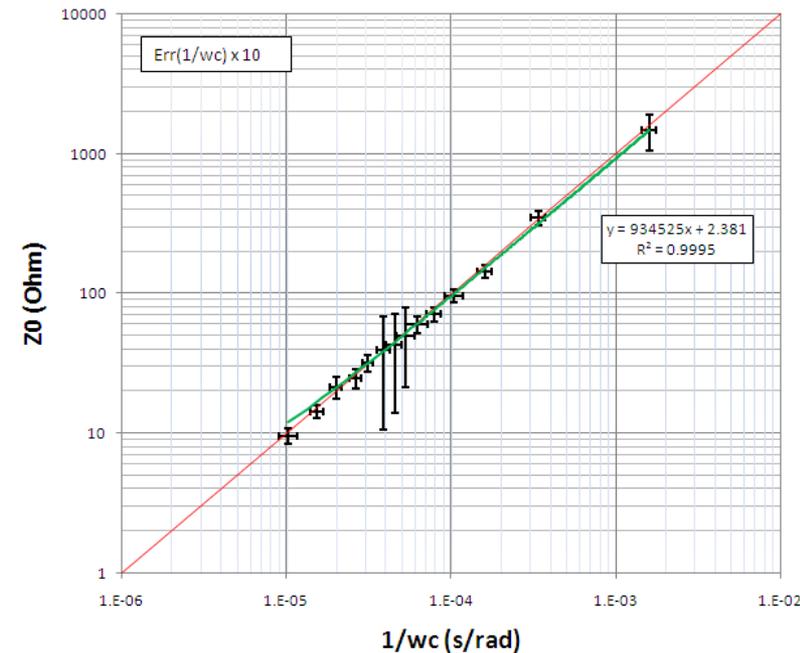
- Duas opções:
  - Ou a física esta incompleta e a expressão está errada
  - Ou não entendemos nosso circuito como pensávamos



# Reverendo tudo



- Vamos supor, inicialmente, que entendemos a Física mas não compreendemos o circuito.
- A resistência vale, de fato,  $1 \Omega$ ?
  - Medimos com o Ohmímetro (pelo menos alguns grupos...)
- O capacitor é ideal?
  - Vocês não estudaram mas eu mostrei na aula passada...



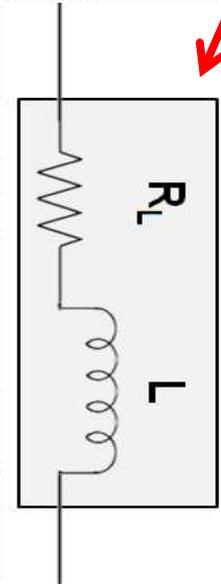
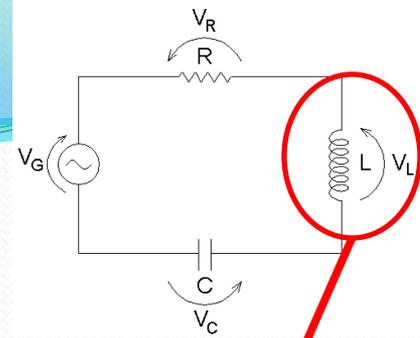
# Reviendo tudo

- O indutor é ideal?
  - Não! A bobina é, na verdade um fio enrolado e tem resistêcia não nula
- Na equação R é a resistêcia total

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$R_T = R + R_L + \dots$$

- Existem outras resistências no sistema?
- E a indutância? Será que o valor nominal é confiável?



Mudaria a amplitude do máximo

Mudaria a posição do máximo

# Como determinar $R_{\text{total}}$ ?

- Na condição de ressonância de corrente,  $\omega = \omega_0$  e:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow R$$

$$\text{tg } \phi_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \frac{1}{R} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Se  $\phi_0 = 0$ , corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo

- Portanto:

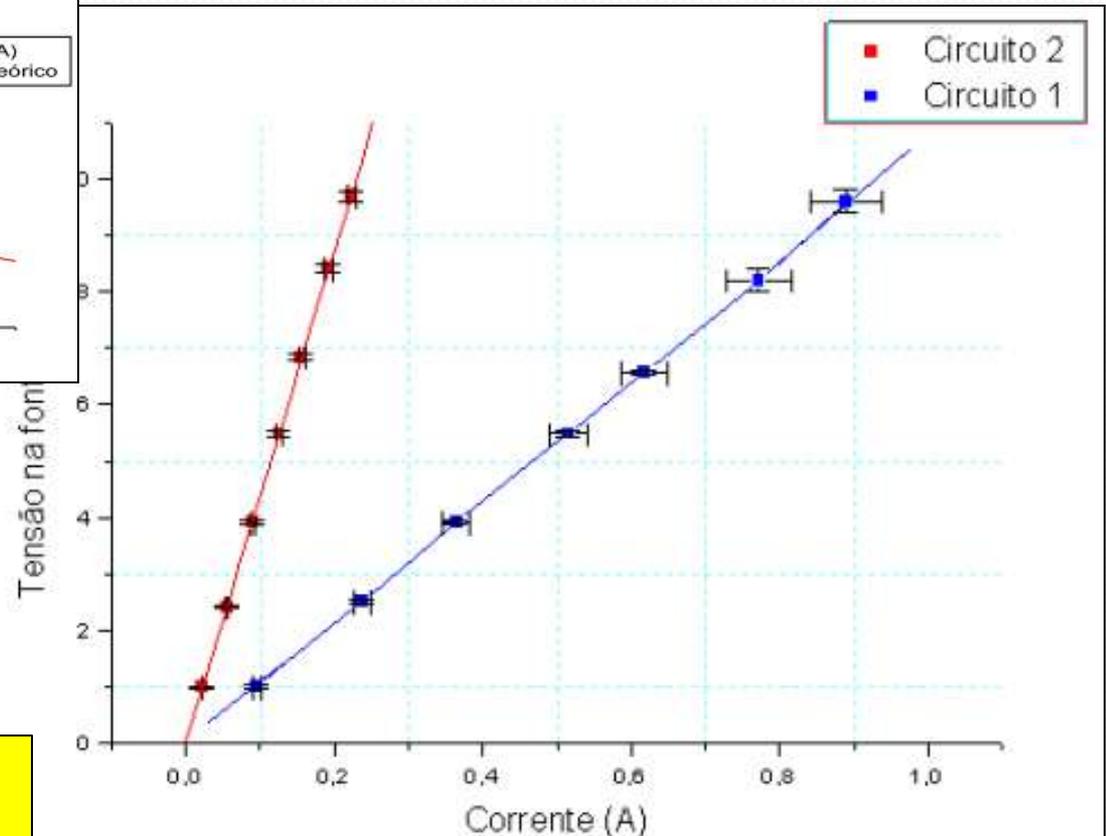
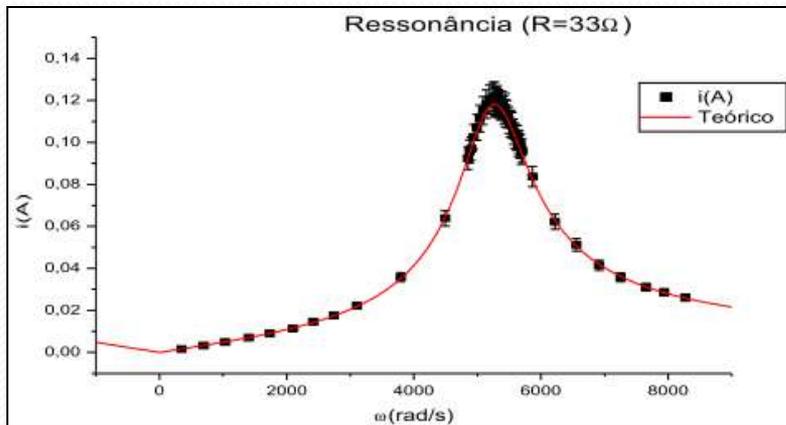
$$V_{G0} = R i_0$$

$V_{G0}$  é a tensão de pico aplicada pelo gerador e  $i_0$  é a corrente de pico no circuito

- Ou seja, se medir  $V_{G0}$  e  $i_0$  na ressonância você descobre qual é a resistência total,  $R$ , do circuito

# Como determinar $R_{\text{total}}$ ?

- O problema é que confiaríamos apenas em uma medida... Melhor ajustar uma reta:



Resultado do ano passado.  
Dessa vez ninguém fez assim.

# Resistência espúria

- Este grupo tentou estimar as resistências espúrias, mas incluiu o capacitor ao invés do gerador...

Utilizando os conhecimentos obtidos em sala, se for medida a tensão de pico aplicada pelo gerador e a corrente de pico, ambas na ressonância, descobre-se a resistência total do circuito ( $R_t$ ), pela relação  $V_{G0} = R_t i_0$ . Como para ambos os circuitos  $R_t$  deve ser igual – à menos pelo resistor, – é conveniente que se escolha o com maior resistência, pois até agora é o que mostrou melhores resultados. Logo,

$$R_t = R + R_L + R_C$$

$$R_t = \frac{V_{G0}}{i_0} = \frac{(0,49 \pm 0,01)}{(0,0100 \pm 0,0005)} = (49,0 \pm 2,6)\Omega \Rightarrow (R_L + R_C) \approx 2\Omega$$

que já é discrepante com os valores nominais. No condutor, nem o indutor podem ser considerados ideais.

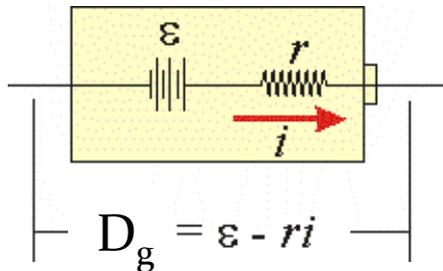
Resistência do capacitor ??

Total menor que RL ??

Os elementos presentes no circuito, fornecidos pelo laboratório, apesar dos valores nominais conhecidos: para os resistores, foi proposta a utilização de um com  $(1,00 \pm 0,05)\Omega$  (*Resistor 1*), e outro com  $(47 \pm 2)\Omega$  (*Resistor 2*); para o capacitor, usou-se a capacitância nominal de  $(1,0 \pm 0,1)\mu\text{F}$ ; e um indutor, com as seguintes especificações: 1000 espiras,  $(29,8 \pm 1,5)\text{mH}$  de indutância, e  $(7,7 \pm 0,4)\Omega$  de resistência (*Bobina n° 9*).

# Reverendo a tensão do Gerador

- Como medir  $V_G$ ?
  - **Não confundir a tensão produzida pelo gerador com a ddp entre seus terminais ( $D_g$ )!**



O gerador não é ideal e tem uma resistência interna (lab3)

- Na nossa teoria, o que chamamos de  $V_G$  é na verdade  $\epsilon$ !
  - **$\epsilon$  devia ficar fixo, mas  $D_g$  não, pois a corrente varia.**
  - Para determinar  $\epsilon$  era preciso medir com o circuito “em aberto”, ou seja com a corrente nula.
  - Isso podia ser feito com um multímetro (valor RMS) ou com o osciloscópio, **mas não podia estar passando corrente pelo RLC.**

# Reverendo as medidas de $R_T$

- A resistência total foi calculada dividindo  $D_G$  pela corrente na ressonância:

$$R_T = \frac{D_G^{ress}}{i^{ress}}$$

- Mas notem que, em um **circuito não ideal**, o que temos é:

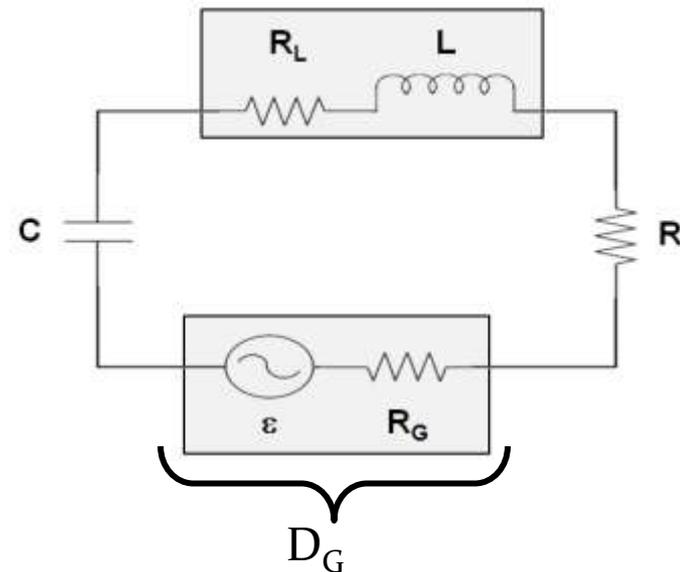
$$R + R_L = \frac{D_G^{ress}}{i^{ress}}$$

Vocês mediram  $R + R_L$  achando que era  $R_T$

$$D_G^{ress} = \varepsilon - iR_G^{ress}$$

$$R + R_L + R_G = \frac{\varepsilon}{i^{ress}}$$

Era preciso ter medido  $\varepsilon$  para ter  $R_T$ .

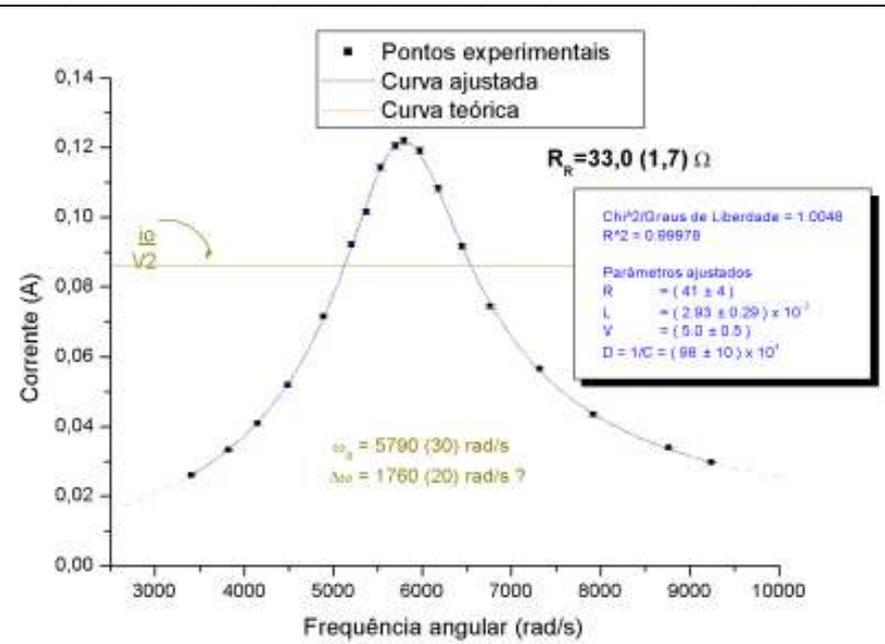
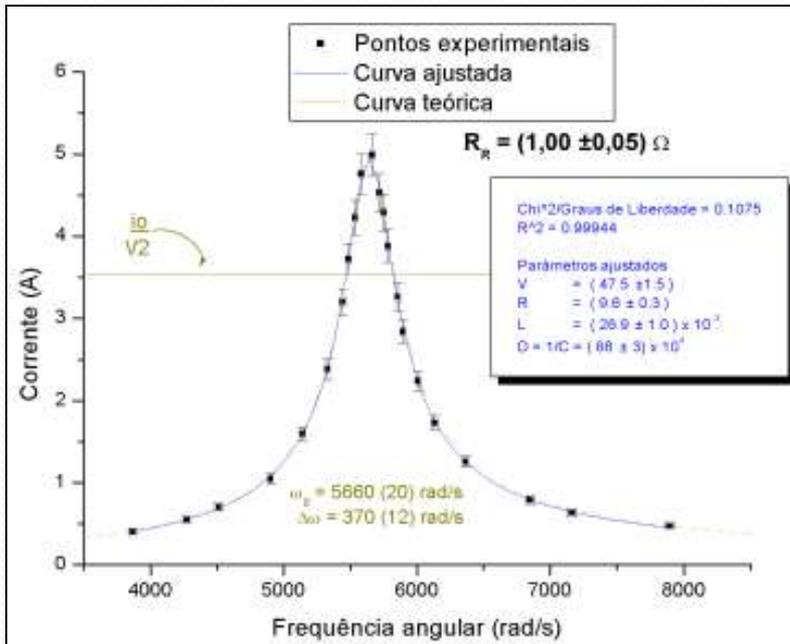


# Como determinar $R_{total}$ ?

- Outra maneira, ajustando a curva teórica aos dados experimentais (mínimos quadrados):

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Podemos ajustar todos os parâmetros ao mesmo tempo?



# Dois grupos tentaram

Mais de 100 V ??  
O que está  
acontecendo?

**Tabela 1:** tabela com os valores dos parâmetros da equação (1), encontrados após o ajuste. Note que o valor da indutância  $L$  foi mantido fixo para que o ajuste convergisse.

	$R_1$	$R_2$
$V_G(\text{volt})$	0,19(1)	306,2(13)
$R(\Omega)$	11,1(2)	55,5(4)
$C(\mu F)$	1,05(1)	1,05(3)
$L(\text{mH})$	29,9(0)	29,9(0)

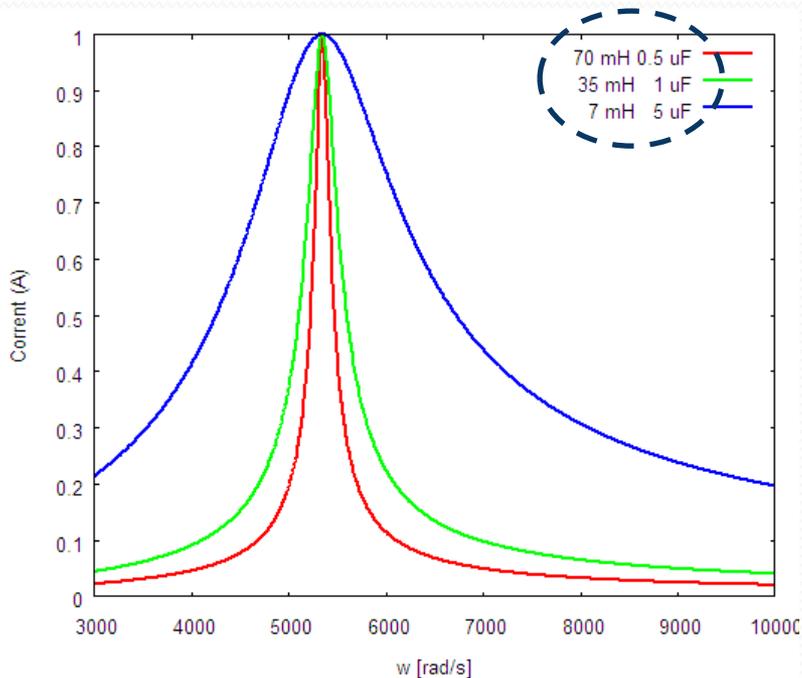
**Tabela 1:** Valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$ ,  $C$  e  $w_{\text{resso}}$  medidos experimentalmente e os obtidos a partir dos ajustes teóricos. O teste Z mostra a compatibilidade entre os dois valores para cada grandeza.

	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$	$L (H)$	$C (\mu F)$	$w_{\text{resso}} (\text{rad/s})$
Experimental	1,2(1)	47,9(1)	0,029(2)	1,0(1)	5792(16)
Ajustado	11,9(2)	56(4)	0,032(3)	0,95(7)	5669(54)
Teste Z	47	2	0,8	0,4	2,2

# Como determinar $R_{total}$ ?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Posição e largura do máximo



Posição

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Largura

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \stackrel{\text{definicao}}{\equiv} \frac{V_G}{\sqrt{2R}}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\mp RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$

Diferença entre as 2 raízes positivas

# Como determinar $R_{\text{total}}$ ?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

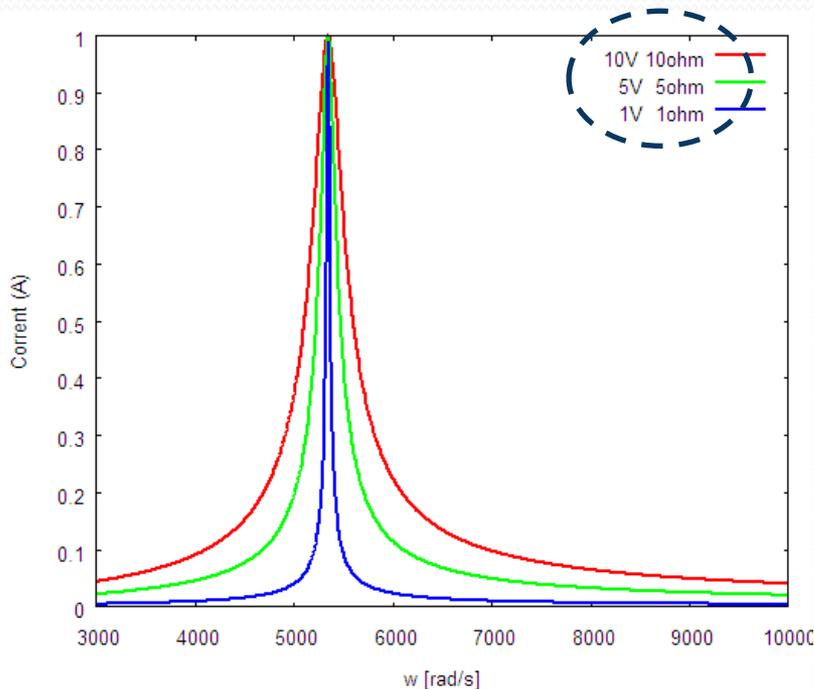
Amplitude e largura do máximo

Amplitude

$$i_0(\omega_0) = \frac{V_G}{R}$$

Largura

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} LC \Rightarrow \text{posição} \\ V_G / R \Rightarrow \text{amplitude} \\ R / L \Rightarrow \text{largura} \end{array} \right.$$

Apenas 3 “variáveis” independentes!

# Ajustando $R_T$ e $\omega_0$

- Apenas R, L fixo em 35(3)  $\mu\text{F}$ :

- R=12.10(50) Ohm [grupo]

- R=11.86 Ohm  $\pm$  2.25% com  $X^2_{\text{red}}=337.0$

- R e L ao mesmo tempo

- R=11.90 Ohm + 0.6% com  $X^2_{\text{red}}=23.3$

- L=34.74  $\pm$  0.07%  $\mu\text{F}$

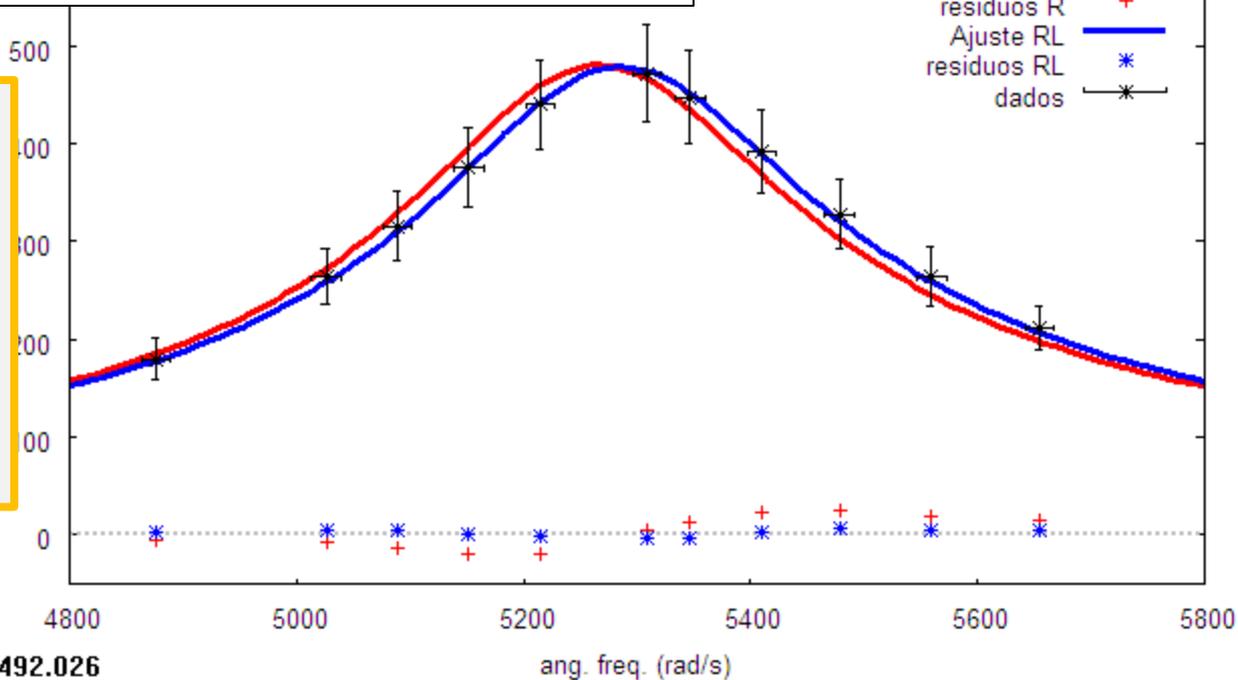
Melhor precisão medindo pela ressonância!

Melhor ajuste

Neste caso o grupo deu sorte, pois L nominal estava ok:

$$\omega_{\text{nom}} = 5267 \pm 8.8\% \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\text{exp}} = 5286 \pm 2.0\% \text{ rad/s}$$





# Fator de qualidade

dW2	Q1	Q1 Teo	dW2	Q2	Q2 Teo
	16.27			16.80	
	15.7	15.4		3.2	3.1
734 (175)	7.7 (19)		2051 (175)	2.84 (28)	
	17 (2)	174 (9)		3.3 (3)	3.6 (2)
368.1 (37)	15.31 (19)		1814 (23)	3.02 (5)	
	6.71	17.36		1.57	3.05

# Para entregar – Parte 2

- Meça  $V_C \times t$  e  $V_L \times t$  para a frequência de ressonância
  - Faça um gráfico de  $V_C \times V_L$  na frequência de ressonância
  - O que você esperaria obter caso os seus componentes fossem ideais?
  - O indutor é ideal? Você pode fazer um modelo simples para o indutor caso ele não seja ideal?
  - Da análise desse gráfico, obtenha os parâmetros físicos (valores e incertezas) das grandezas usadas no seu modelo.

# Indutor x Capacitor

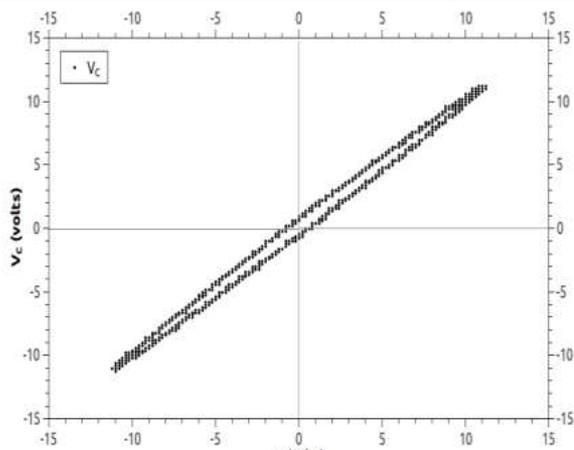


Gráfico V: tensão no indutor X tensão no capacitor

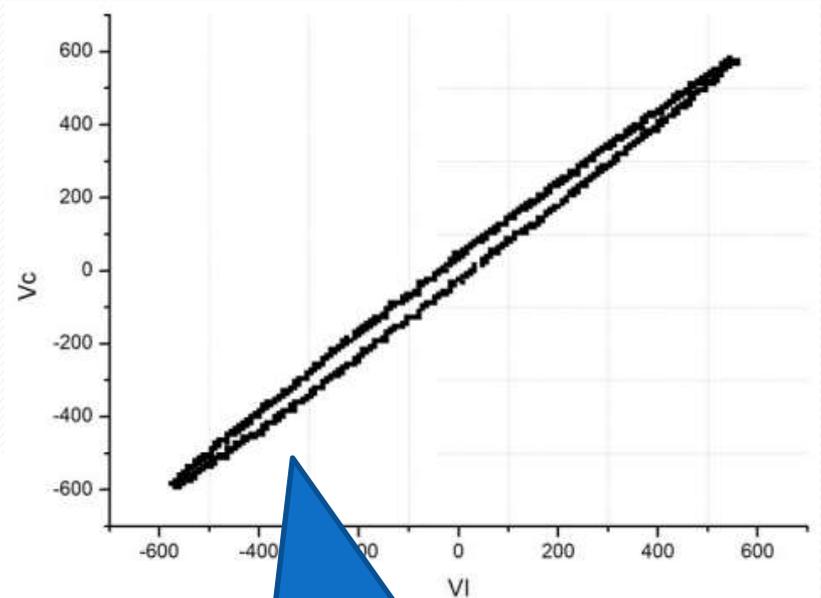
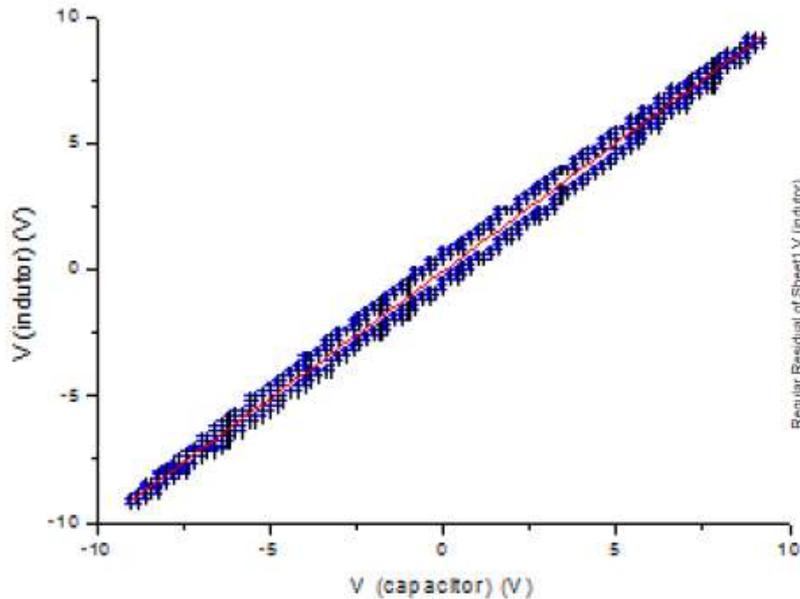
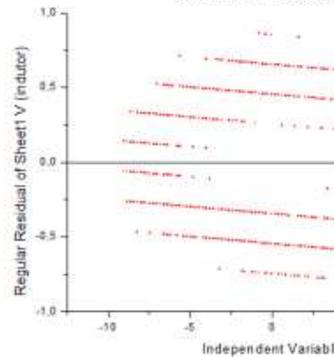


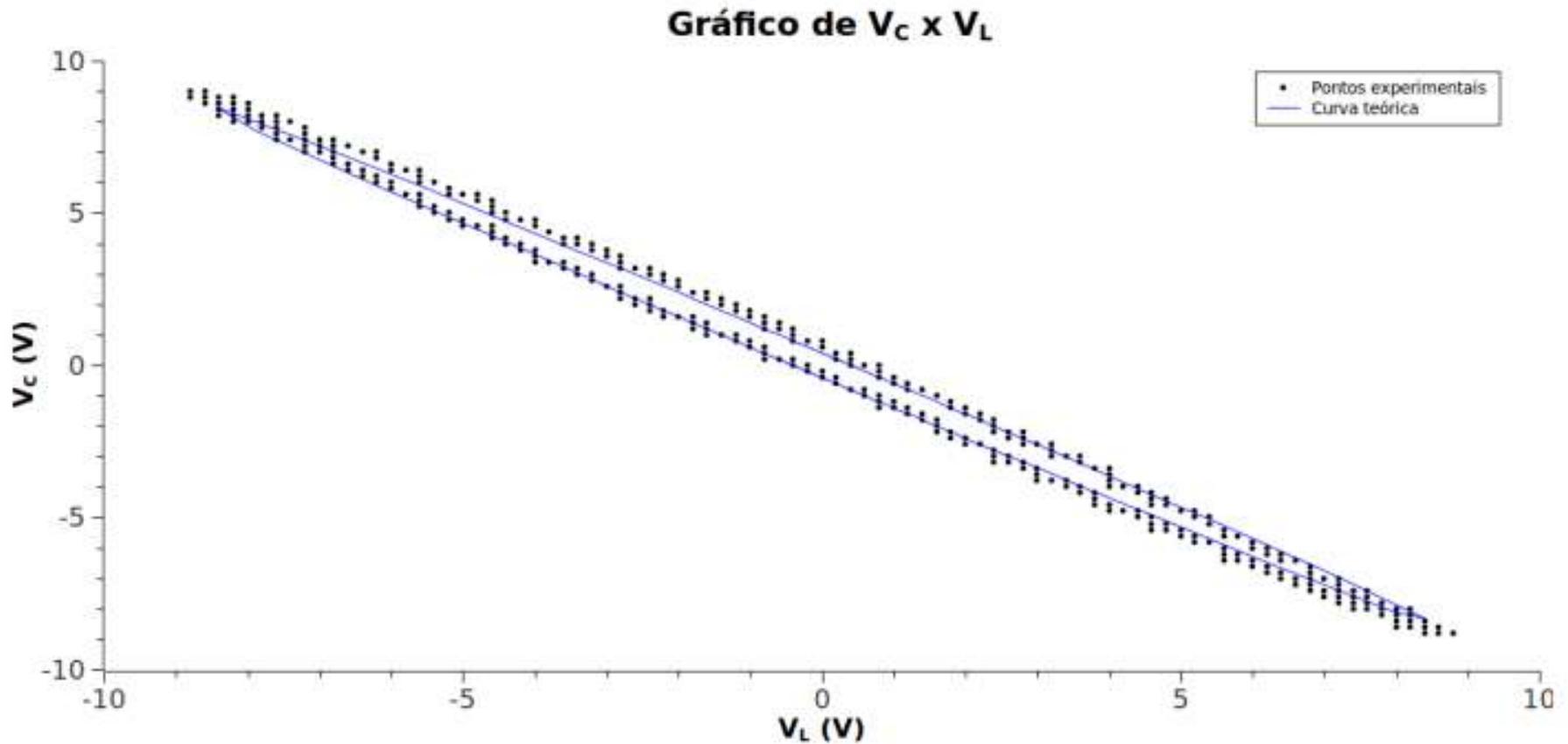
Gráfico V-b: resíduos do gráfico V



Na ressonância esperamos  $V_L = -V_C$ ... então os gráficos estão girados (direção de medida no osciloscópio!!!)

# H06

- Como calcularam a curva teórica?



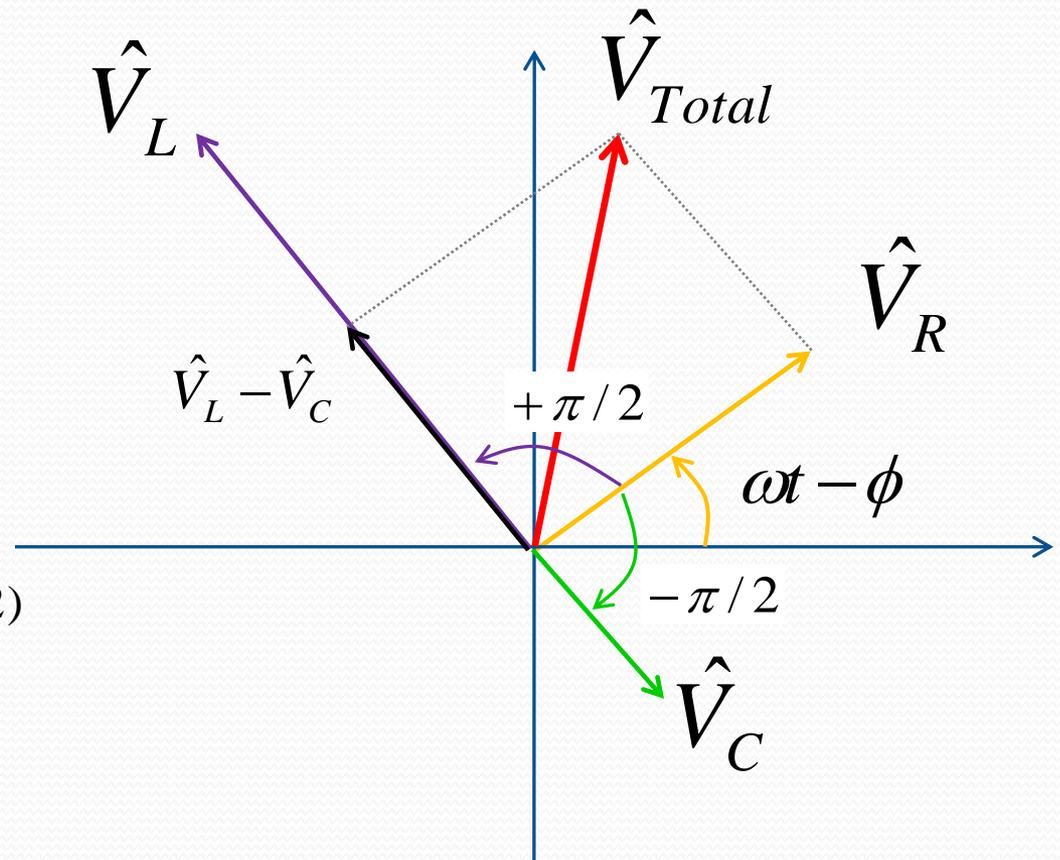
# Diferença entre $V_L$ e $V_C$

- Na ressonância,  $V_L = V_C$  e  $V_{\text{tot}} = V_R$
- Mas e se o indutor não for ideal ??

$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

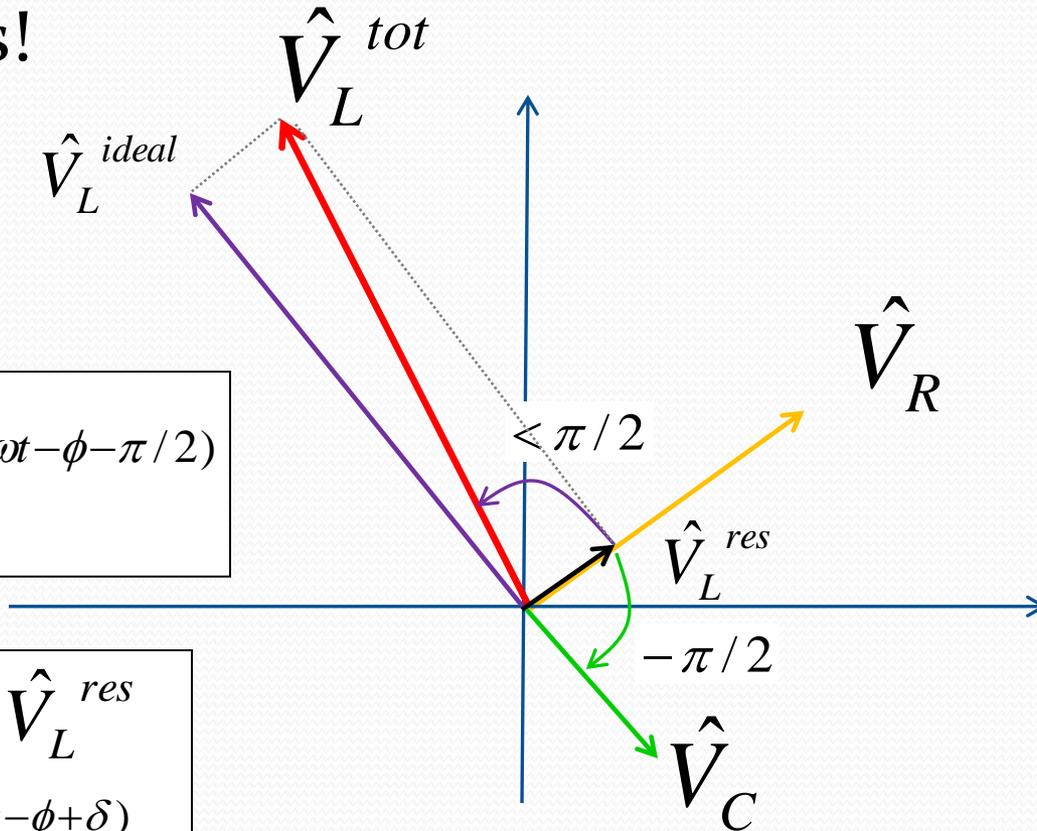
$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$



# Diferença entre $V_L$ e $V_C$

- Nesse caso, a tensão no indutor tem duas componentes!



$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_L(t) &= \hat{V}_L^{ideal} + \hat{V}_L^{res} \\ &= V_L^{tot} e^{j(\omega t - \phi + \delta)}, \end{aligned}$$

onde  $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R_L}\right)$

$$\phi_{C-L} = \delta + \frac{\pi^{lab}}{2} \approx \pi - 4^\circ$$

$$V_L^{real} = i_0 \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} > V_L^{ideal}$$

# Diagrama de fase do RLC

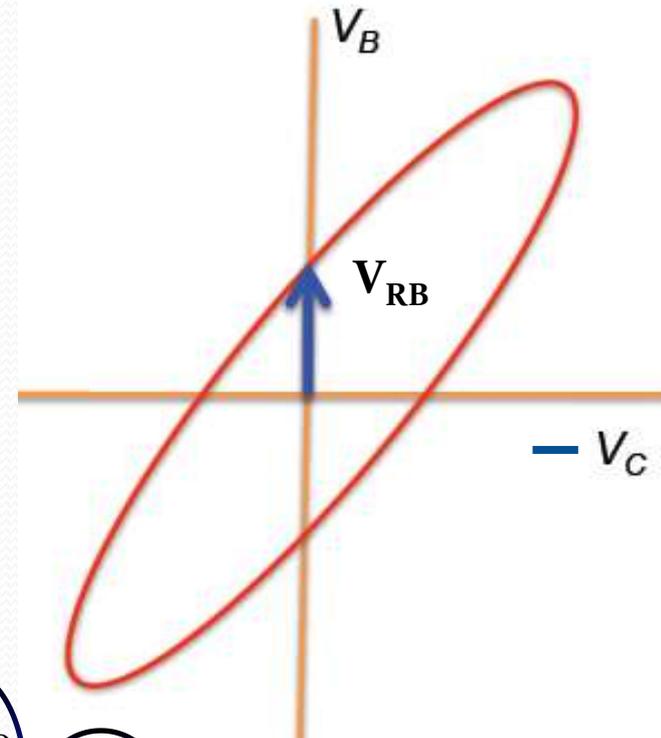
- Na condição de ressonância:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad V_L = -V_C$$

- Observando  $V_B$  contra  $V_C$ :
  - quando  $V_C=0$ , obrigatoriamente  $V_L=0$  (estamos falando de valores instantâneos e não de valores médios),
  - portanto a tensão no eixo  $V_B$  é a tensão sobre a resistência da bobina,  $V_{RB}$ .

$$V_{RB} = R_B i_0 = R_B \left( \frac{V_{R0}}{R_0} \right) i_0$$

Figura de Lissajous  
(RLC):  $V_B \times V_C$



# EXTRA

- Durante a análise dos dados você pode obter valores de  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Discuta a independência dos valores obtidos.
- Na análise de  $V_L$  x  $V_C$  na ressonância você se questionou apenas se o indutor não seria ideal. Porque não se questionou o mesmo para o capacitor? Você tem evidências experimentais de que o capacitor é próximo ao ideal?
- Há outras resistências, além do resistor no circuito?

Ninguém fez....

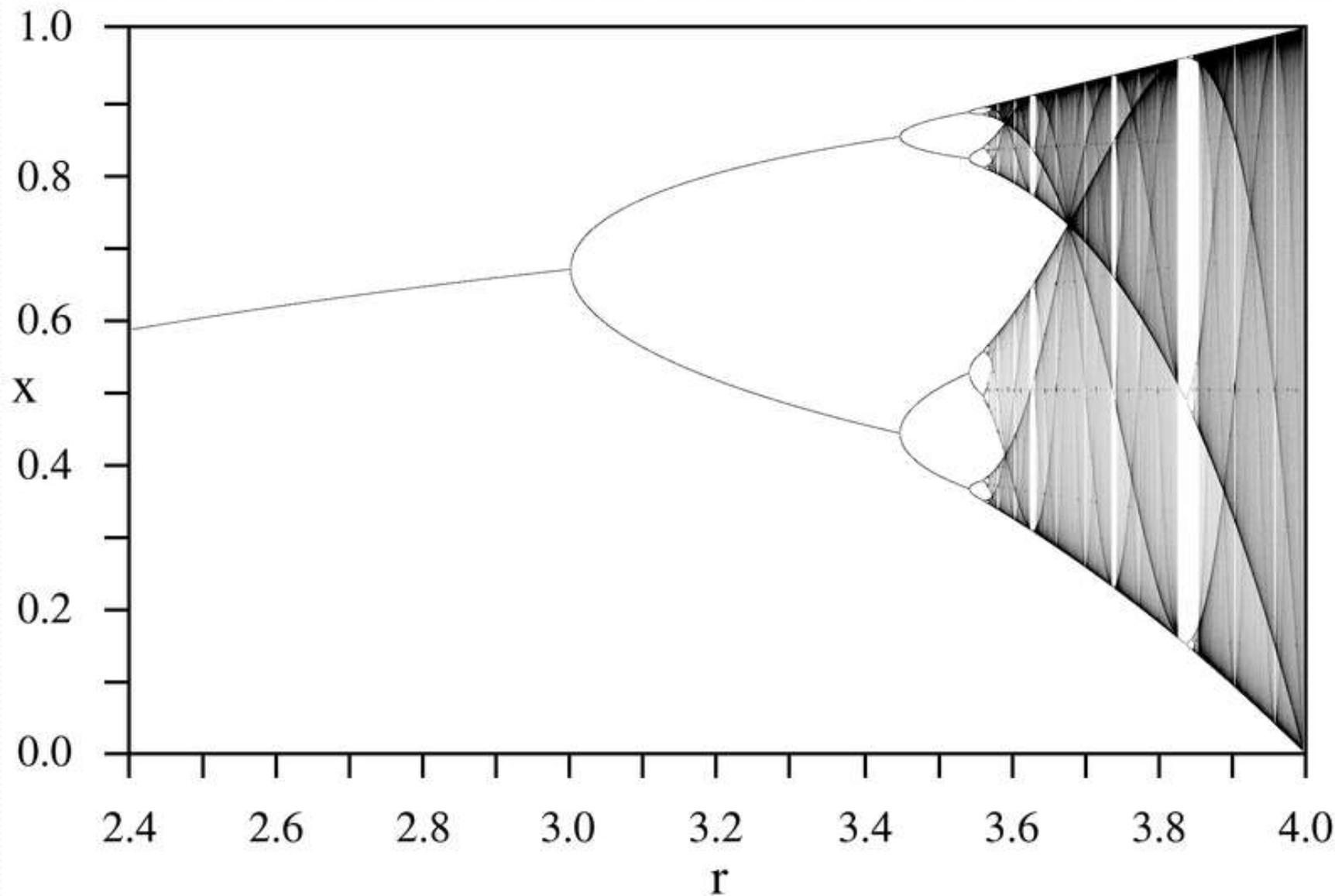
# Resumo dos pontos críticos

- A resistência total é  $R + R_L + R_G$
- $\varepsilon_{\text{gerador}}$  tem que ser medido com o circuito aberto. Caso contrário mede-se  $DDP_G$ .
- $\varepsilon_{\text{gerador}}$  devia ser fixo e não  $DDP_G$ .
- $R_L$  nominal é confiável? Alguém mediu com o multímetro?
- Será que o indutor tem capacitância parasita entre as voltas do enrolamento?
- A diferença de fase devia ser ligeiramente menor do  $\pi$ , e  $V_L$  ligeiramente maior que  $V_C$

# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

# Próximas duas Semanas

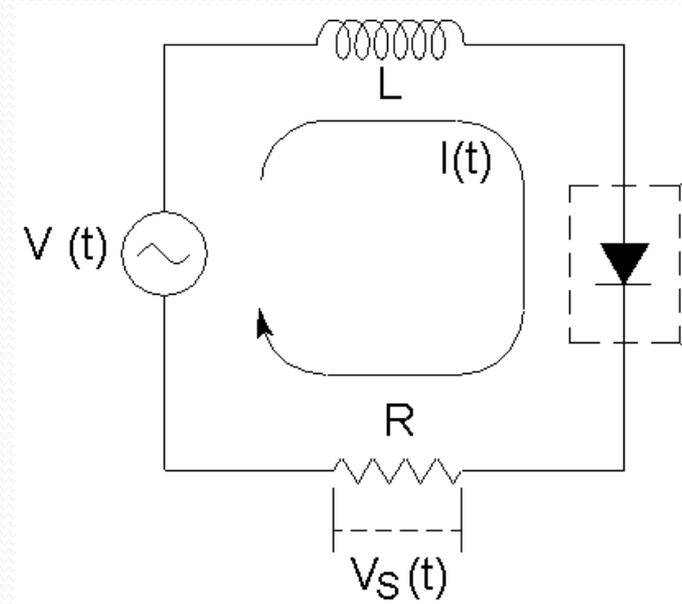
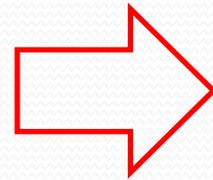
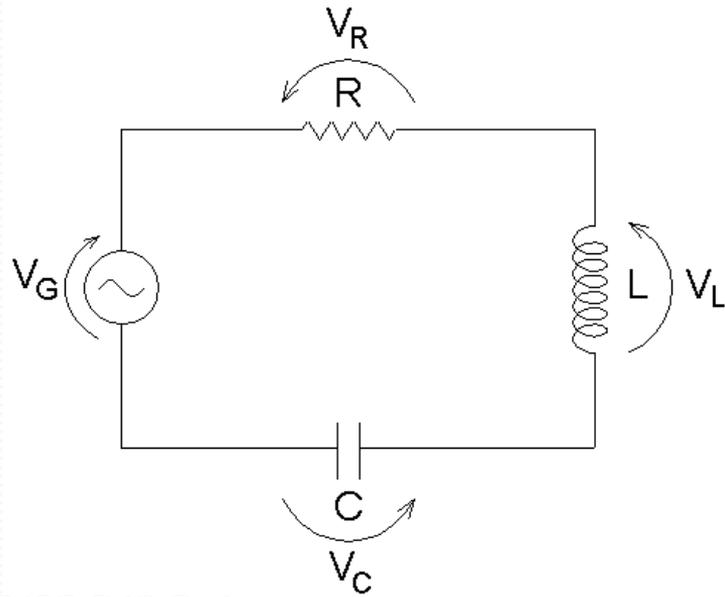


# Próximas duas Semanas

- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC muda o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
  - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
    - Diodo  $\rightarrow$  capacitor não linear
  - **A dinâmica muda totalmente  $\rightarrow$  Caos**

# Objetivos Para as Próximas Semanas

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



- Semana 1
  - Teoria de caos e experimentos computacionais
- Semana 2
  - Medidas experimentais com RLD

# Aula de Hoje



- Introdução a caos e sistemas caóticos
- Estudo de crescimento de populações
- Mapa logístico

# O que é Caos ?

Quais são os limites para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?

**Comportamento regular rígido**

- Pêndulos (relógio)
- Sistema massa-mola
- Queda livre
- Circuito RLC comum

**Sistemas que apresentam Caos**

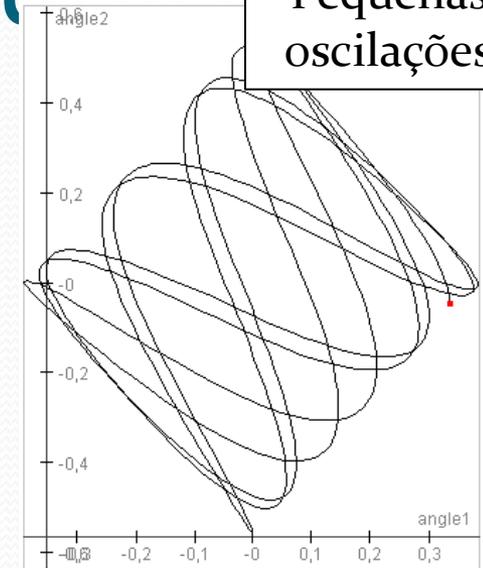
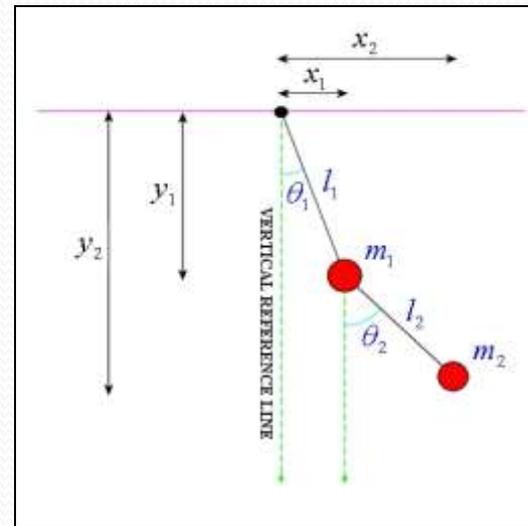
- Clima
- Crescimento populacional
- Pêndulo duplo
- Circuito RLD

**Comportamento totalmente aleatório**

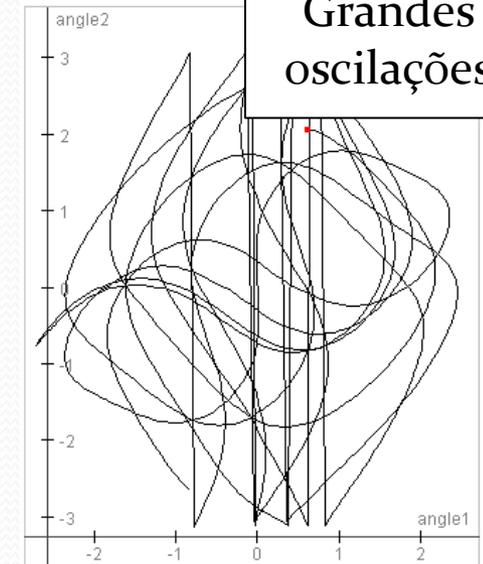
- Jogo de dados
- Decaimento radioativo
- Movimento

# Exemplo: Pêndulo Duplo

- Um pêndulo amarrado no outro
  - O espaço de fase é composto pelos 2 ângulos e as 2 velocidades



Pequenas  
oscilações



Grandes  
oscilações

# Algumas Definições Necessárias

**Sistema dinâmico** – é qualquer sistema cuja evolução a partir de uma determinada condição inicial é regida por um conjunto de regras. Essas regras podem se resumir a um conjunto de equações diferenciais, que é o caso para sistemas contínuos.

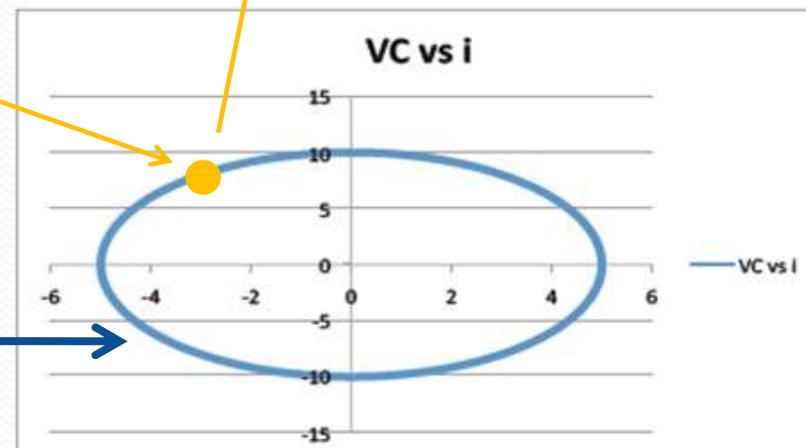
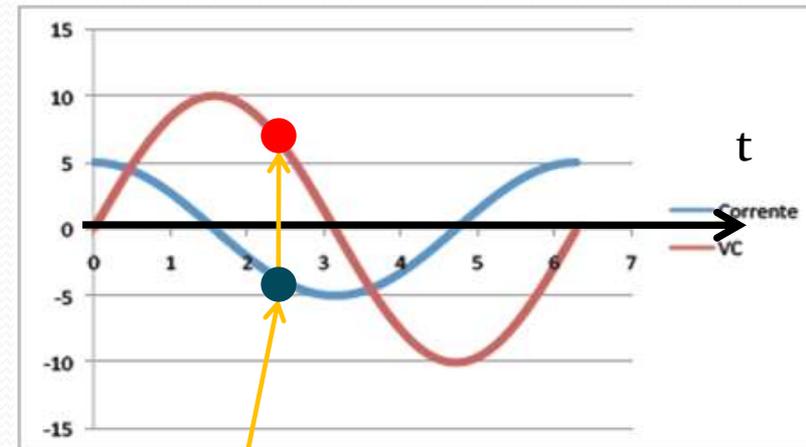
**Espaço de fase** – é o espaço no qual todos os possíveis estados de um sistema são representados. Em mecânica, por exemplo, seria o conjunto de posições e momentos.

No pêndulo duplo teria 4 dimensões:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_1' \text{ e } \theta_2'$$

**Estado** – é uma possível condição para o sistema, isto é, uma configuração de variáveis que represente uma condição fisicamente possível ou aceitável.

**Retrato de fase** – é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema dinâmico em questão. Os retratos de fase para sistemas contínuos são trajetórias no espaço de fase.

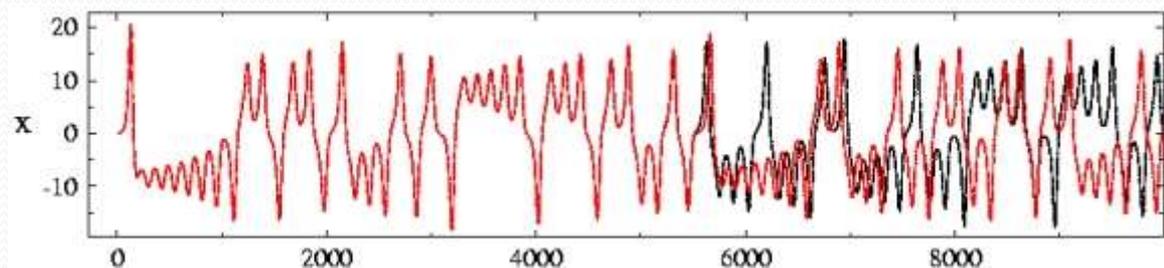


# Algumas Definições Necessárias

- Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real depende de um ou mais parâmetros chamados de **parâmetros de controle**.
- Por exemplo: a **freqüência natural de oscilação** é um parâmetro de controle de um oscilador harmônico simples.
- No caso de um circuito RLC forçado, tanto a **freqüência** quanto a **amplitude da tensão aplicada** são parâmetros de controle.
- Um sistema dinâmico pode, portanto, ser pensado como função do parâmetro de controle. De fato, pode-se **influir no comportamento dinâmico do sistema alterando-se o valor de um parâmetro de controle**.

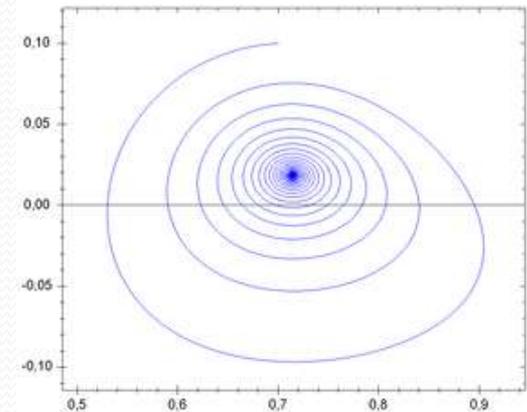
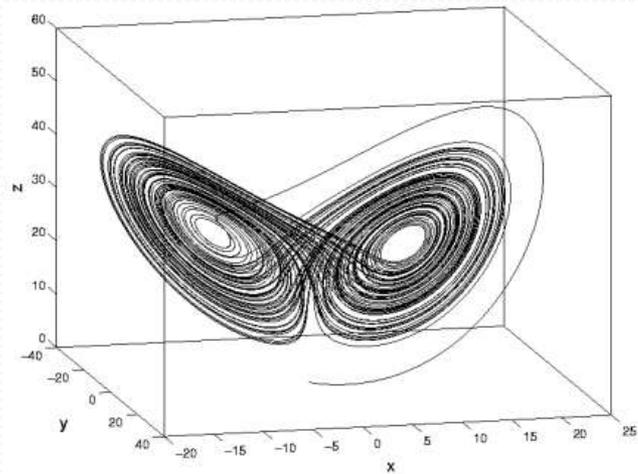
# CAOS: Principais Características

- **Não linearidade.** Se o comportamento de um sistema for linear, esse sistema não pode ser caótico
- **Sensibilidade a condições iniciais:** pequenas alterações nas condições iniciais podem levar a comportamentos radicalmente diferentes do sistema em seu estado final. É o chamado “efeito borboleta”. Os sistemas caóticos também apresentam sensibilidade aos parâmetros de controle.
- **Determinismo:** existem regras subjacentes determinísticas (e não probabilísticas) que todo estado futuro do sistema deve obedecer
- **Manutenção da irregularidade no comportamento do sistema.** Há uma ordem oculta que inclui um número grande ou infinito de configurações periódicas ocultas na infra-estrutura desses sistemas: há uma “ordem na desordem”.
- **Previsão de longo prazo impossível:** em decorrência da sensibilidade às condições iniciais, a previsão (mas não o controle) do comportamento de sistemas caóticos de **longo prazo é impossível**, porque as condições iniciais são conhecidas com grau de precisão finito.



# CAOS: Como são as trajetórias no espaço de fase?

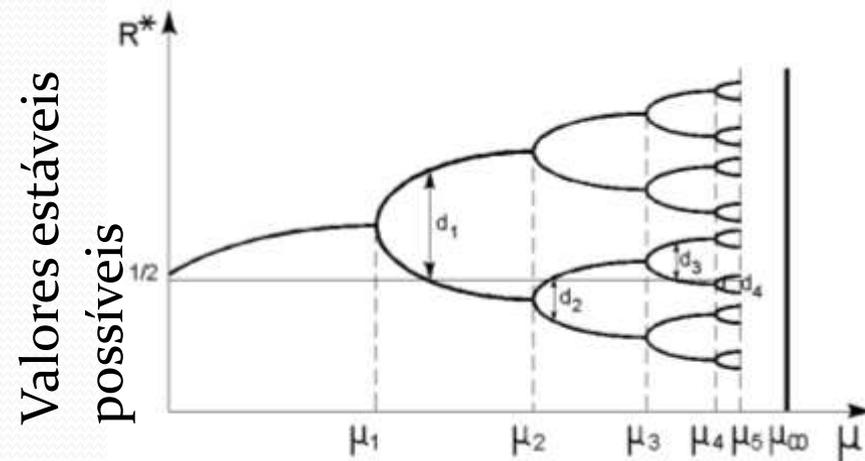
- **Existe 3 possibilidades para essas trajetórias:**
  - as trajetórias tendem a se concentrar numa determinada região do espaço de fase e não saem mais de lá: esses são chamados de estados assintóticos do sistema ou **atratores**.



- as trajetórias tendem a se afastar uma das outras e vão para o infinito
- as trajetórias ficam “passeando” por todo o espaço de fase

# CAOS: Como se chega lá?

- **Bifurcações** – Vamos supor que um sistema dinâmico tenha um parâmetro de controle  $\mu$ .
  - Variando-se  $\mu$  podem aparecer novos padrões de comportamento ou seqüências de novos estados estáveis (atratores) para o sistema.
  - Neste caso diz-se que ocorreram **bifurcações** e  $\mu_n$  é o valor do parâmetro de controle para o qual ocorreu a n-ésima bifurcação.
  - Em outras palavras, variando-se  $\mu$  pode-se variar tanto a posição quanto as características qualitativas dos pontos de equilíbrio estáveis (atratores) do sistema.



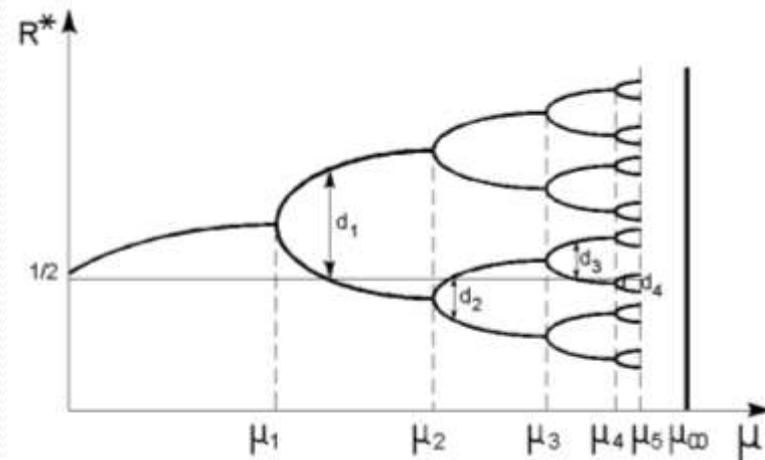
# CAOS: Como se chega lá?

- Nesse caso uma solução estável do sistema perde a estabilidade com a variação de um parâmetro de controle e aparece uma nova solução estável com o dobro do período da solução anterior. Então diz que para  $\mu = \mu_n$  houve uma bifurcação porque o “período” duplicou. Essas soluções são estados assintóticos do sistema, geralmente chamados de **atratores**.
- Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**) é a duplicação dos atratores

## Constante de Feigenbaum

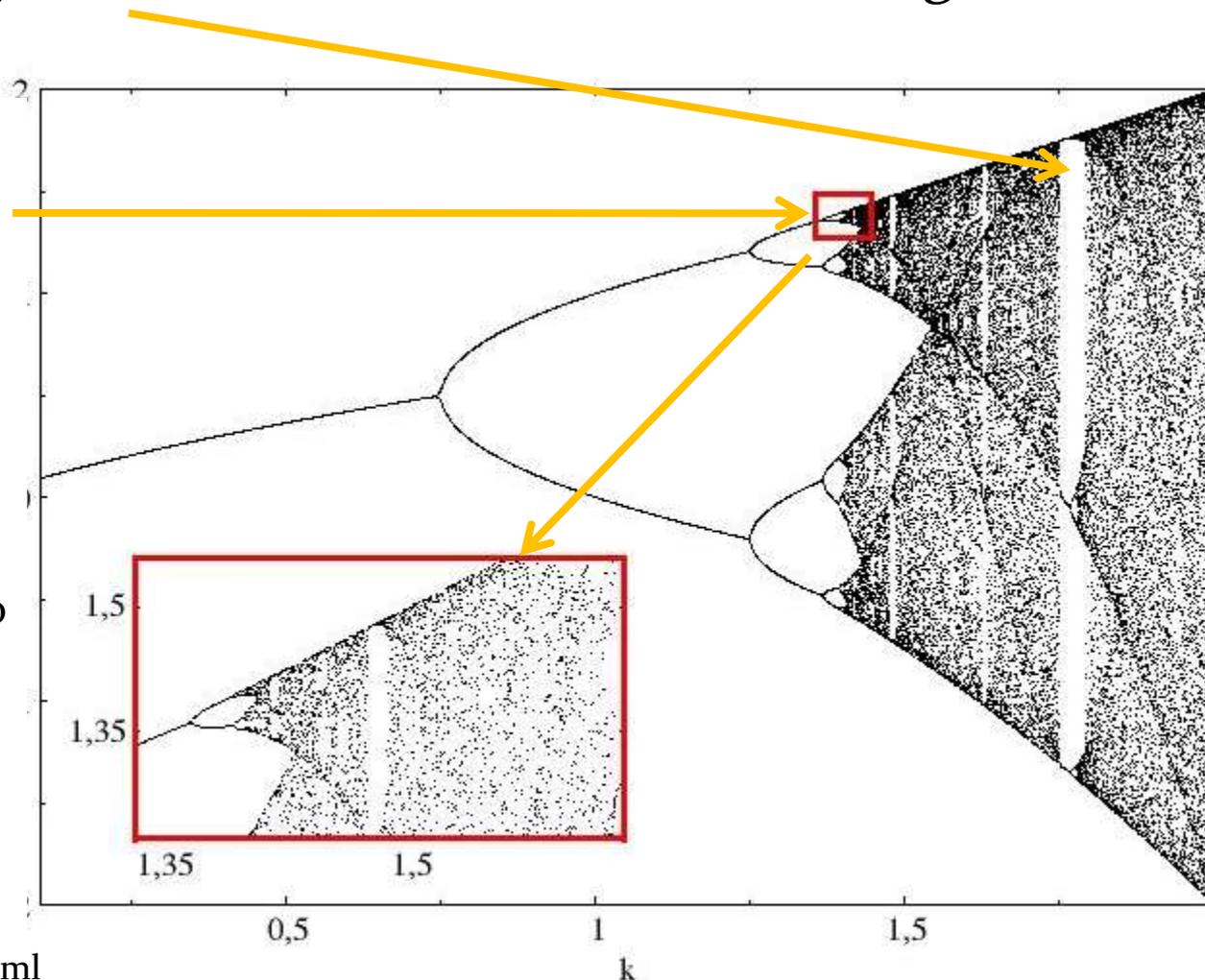
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta$$

$$\delta = 4,6692016091029909\dots$$



# Caos e Fractais

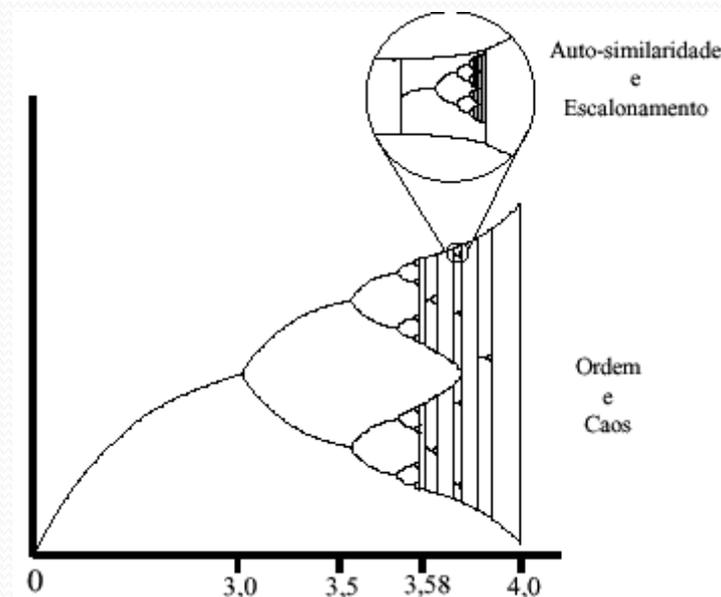
- A sucessão de dobramentos do período acaba levando ao domínio caótico, que *parece* (mas não é) uma nuvens de pontos dispersos.
- No meio do caos, há janelas indicando uma dinâmica organizada e previsível.
- Um pequeno pedaço é similar ao diagrama todo  $\Rightarrow$  fractal.
- ... Ou melhor: o domínio caótico aparece como uma nuvens de pontos com dimensão fractal no espaço de parâmetros



# Caos e Fractais

**Fractal** - é a propriedade de se fraturar em padrões auto-similares e escalonados. Fractais possuem:

- **Auto-similaridade** - existem padrões dentro dos padrões que nunca são exatamente os mesmos mas que são sempre similares (galhos de uma árvore que se bifurcam cada vez mais até chegar nas micro-nervuras da folha, mas que têm praticamente o mesmo padrão de bifurcação).
- **Escalonamento** - quando examinamos os padrões de auto-similaridade em escalas cada vez menores, verificamos que eles são repetições de si mesmos (podemos "enxergar" o padrão de nervuras de uma árvore inteira em qualquer folha desta mesma árvore).



# Exemplo Simples de CAOS

- Em 1838, Pierre Verhulst publicou sua “equação logística” para descrever o **crescimento de populações**, ou a taxa de crescimento em função da população atual e do parâmetro  $r$ .

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x), \text{ com } x = \frac{\text{número de indivíduos}}{\text{capacidade do ambiente}}$$

- $r$  é o número malthusiano:
  - Se  $r < 0$  a população sempre morre com o tempo
  - Se  $r > 0$  a pode sobreviver
- Essa equação pode ser resolvida de maneira exata e a solução só depende de  $x_0$  e de  $r$ .

$$x(t) = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1)e^{-rt}}, \text{ função sigmoide}$$

# Exemplo Simples

- A equação de **Verhulst** possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante  $t$  depende somente das condições iniciais e é contínua.
- Era desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial.
- O **Mapa Logístico** é um análogo discreto no tempo da equação logística e foi popularizado por um paper de 1976 de **Robert May**. Físico teórico australiano, ele começou a trabalhar com biologia quando foi para o Instituto de Estudos Avançados de Princeton em 1971.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

**Só funciona para gerações independentes.**

Ex: insetos colocam ovos antes do inverno, que ficam adormecidos em baixas temperaturas, e eclodem com a chegada do calor no ano seguinte...

# Exemplo Simples: Mapa Logístico

## Crescimento de Populações:

- O mapa logístico descreve o tamanho da populações em função de seu tamanho na geração anterior:

$$x_{n+1} = x_n \cdot r(1 - x_n)$$

- $x_n$  são frações da população máxima (capacidade do meio)
- $x_0$  é a fração inicial
- $r$  é o potencial biótico e  $r(1 - x_n)$  é a taxa de crescimento
- Neste caso  $r > 0$  sempre
- Como é a evolução temporal da população (tamanho das gerações  $n=1,2,3\dots$ ) em função da condição inicial  $X_0$  e do potencial biótico?

# Calculando o Mapa Logístico(1)

- Na mão:

$x_0=0.500$  e  $r=0.5$

$x_1=.5*.5*(1-.5)=.125$

$x_2=.5*.125*(1-.125)=.055$

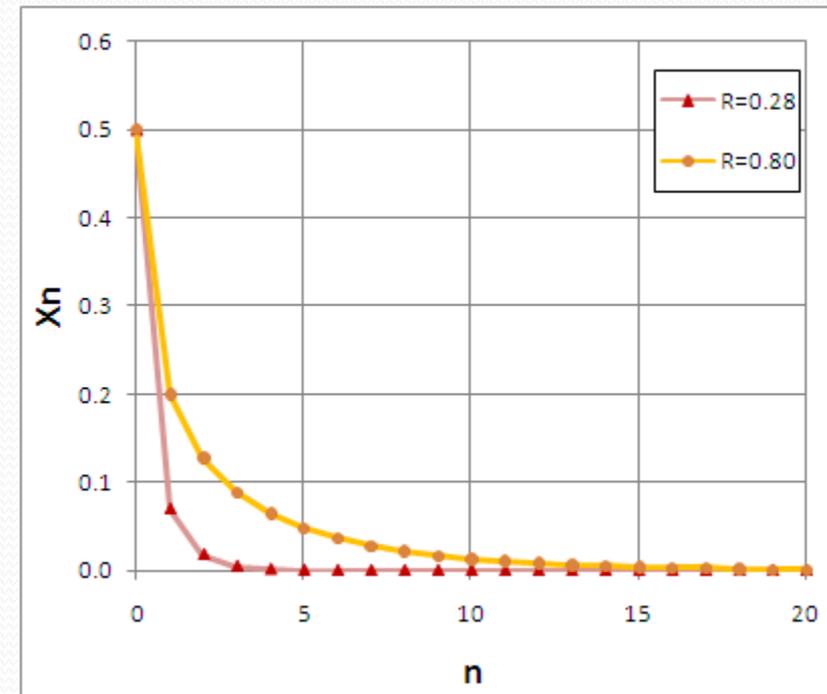
$x_3=.5*.055*(1-.055)=.026$

$x_4=.5*.026*(1-.026)=.013$

...

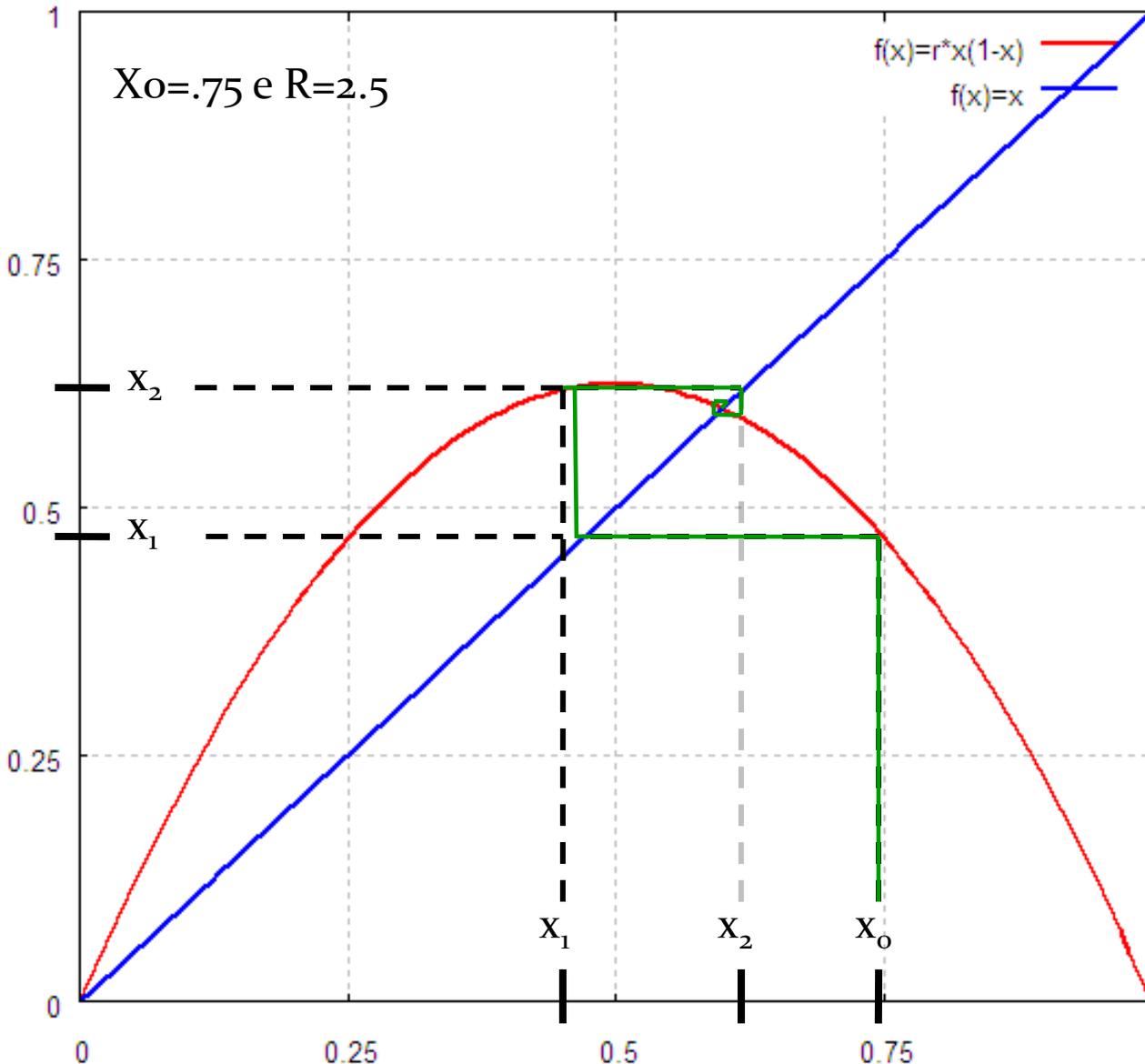
$x_9=0.000$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



Para estes parâmetros a população não sobrevive

# Calculando o Mapa Logístico(2)



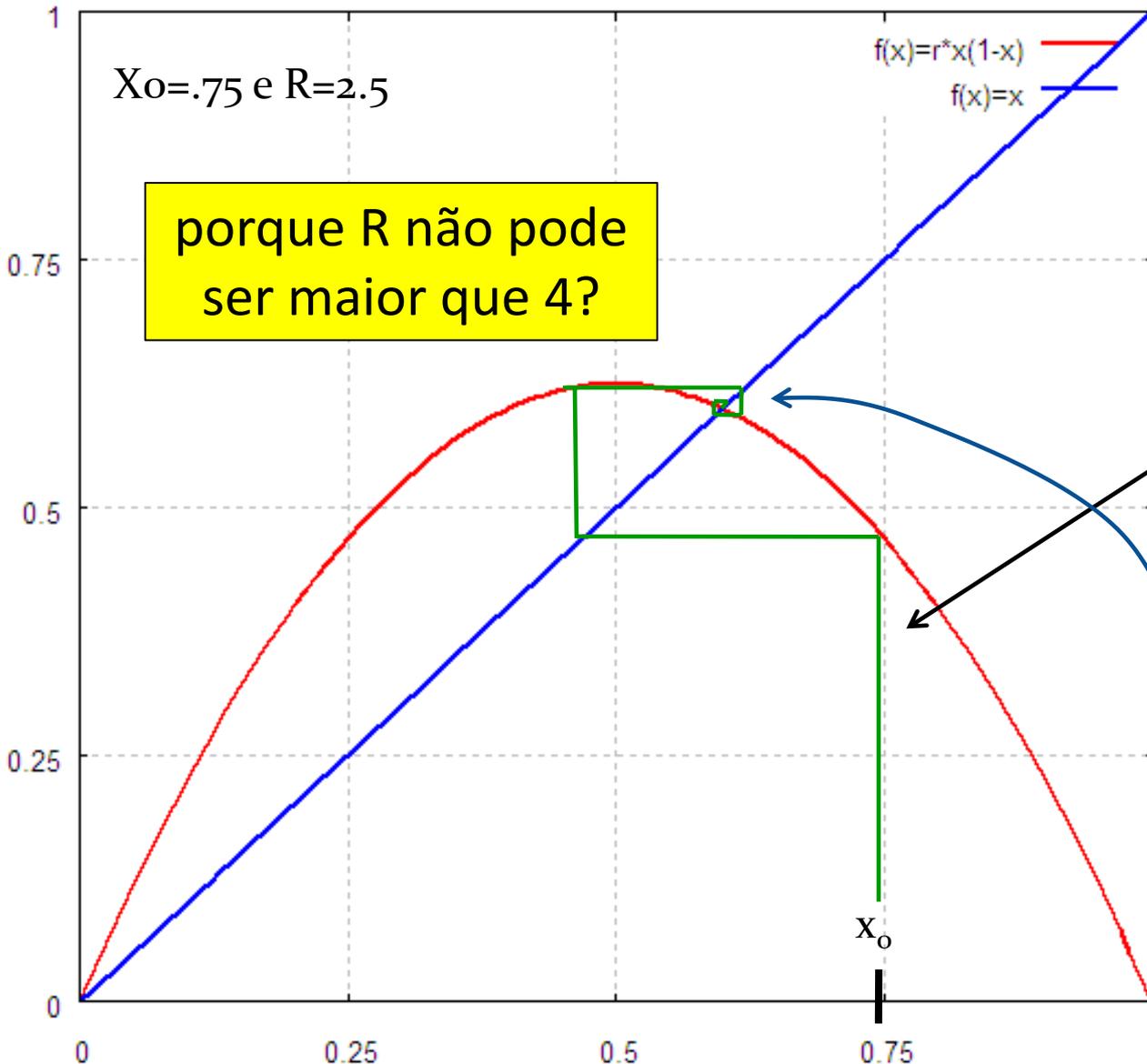
• Meios gráficos:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- 1) Calcula-se o valor de  $f(x_0)$
- 2) Rebate-se na reta para ter  $x_1$
- 3) Calcula-se o valor de  $f(x_1)$
- 4) Rebate-se na reta para ter  $x_2$
- 5) etc...

A população estabilizou em 0.6

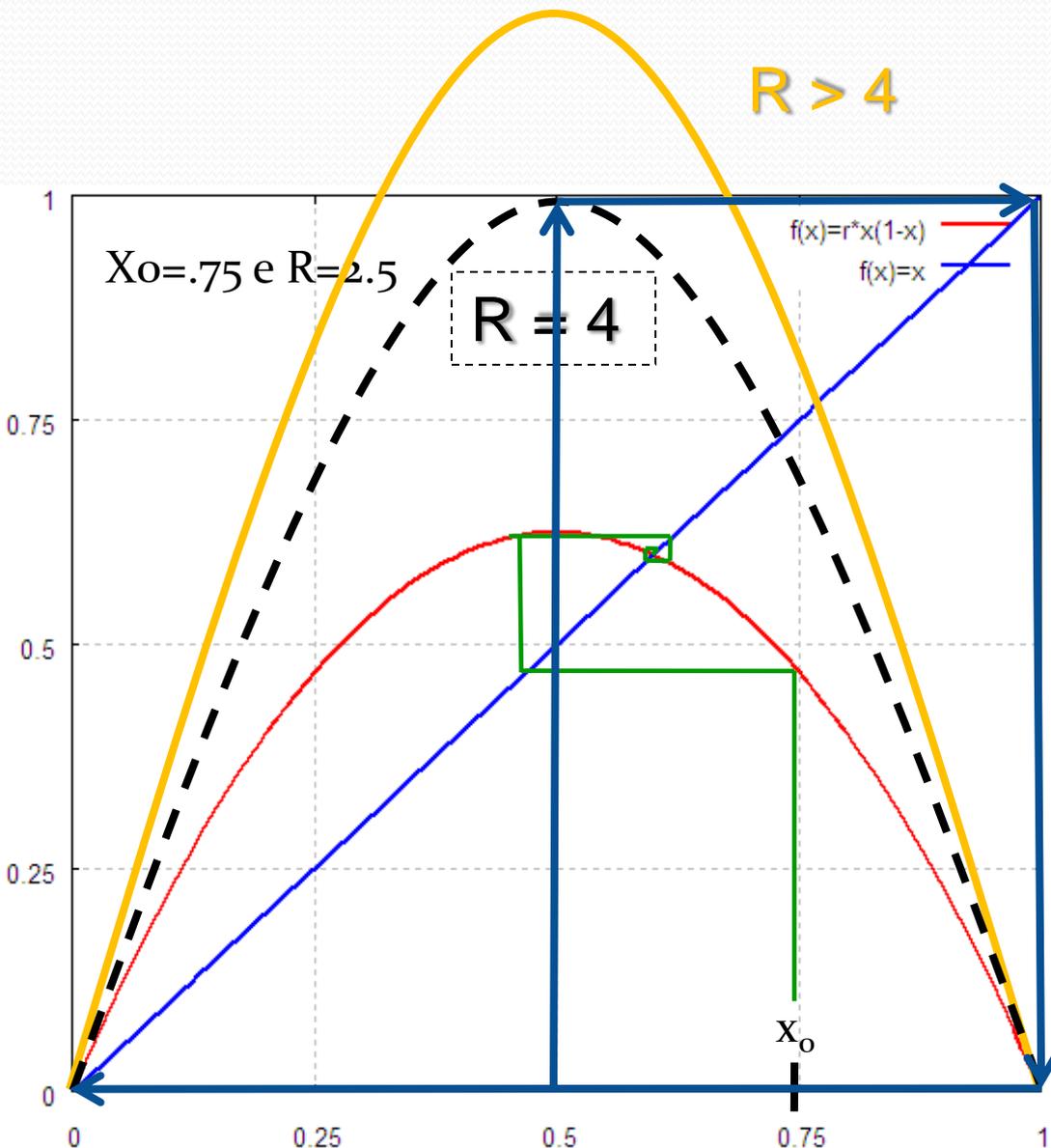
# Calculando o Mapa Logístico(2)



IMPORTANTE: O comportamento depende de  $r$ .

- Transiente:
  - As várias iterações antes da população estabilizar
- Estacionário
  - As iterações depois do transiente

# Mapa Logístico - Detalhes

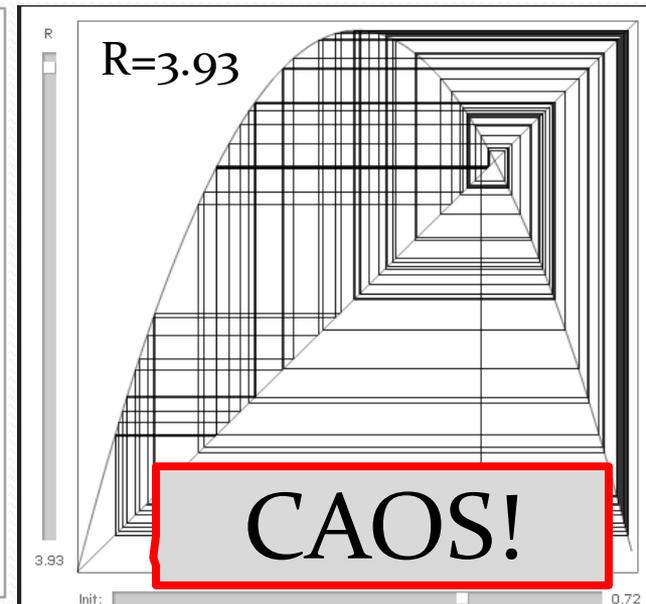
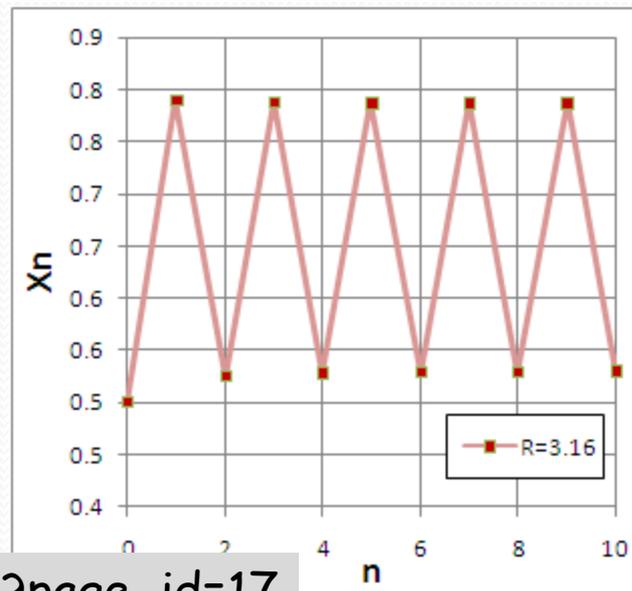
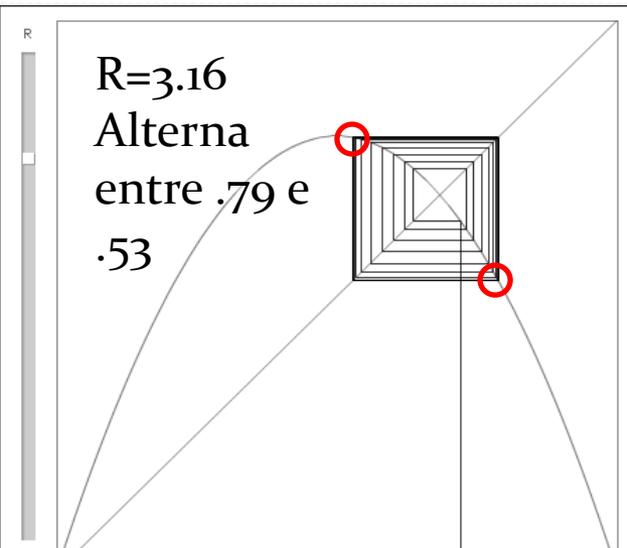
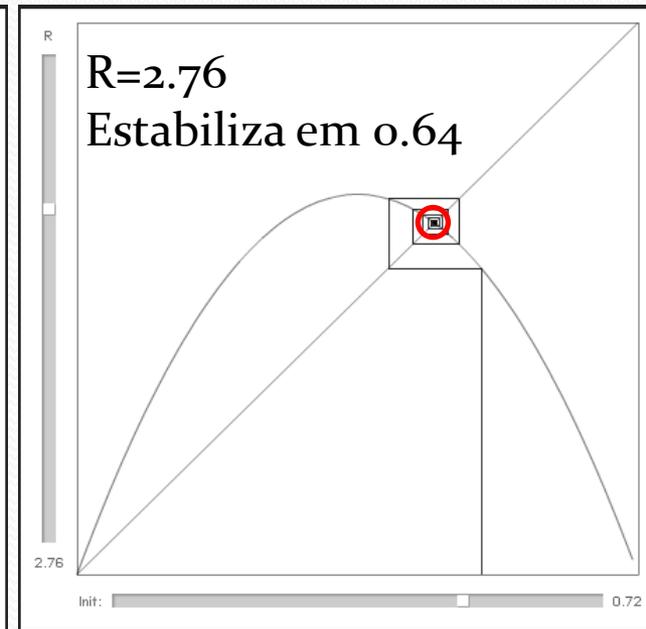
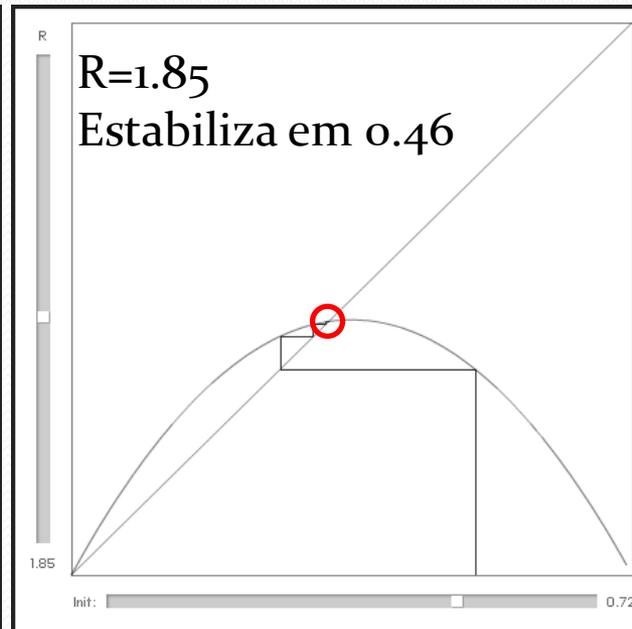


$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Porque  $0 < R < 4$  ?

- $R < 0 \Rightarrow x < 0$
- $R = 0 \Rightarrow x = 0$
- $R > 4 \Rightarrow x > 1$
- $R = 4 \Rightarrow x = 0$

# Applet Mapa Logístico – $x_0=0.72$



# Se divertindo com o Applet

- Varie  $r$  para um  $x_0$  qualquer e veja que para  $r < 1$  a solução final (atrator) depois de várias iterações é sempre **zero**:
  - variando  $x_0$  o que muda é a rapidez com que a solução se aproxima do atrator
- Agora faça  $r=2,5$  e veja que **zero** não é mais um atrator, o novo atrator é a intersecção da parábola  $f(x)=x r(1-x)$  com a reta  $f(x)=x$ , para qualquer valor de  $x_0$ .
- Agora faça  $r=3,2$  e veja que agora a intersecção da parábola e da reta **não** é mais um atrator. Temos **dois** atratores, dados pela intersecção do quadrado com a parábola.
- Aumente  $r$  ainda mais e veja aparecer o caos!

# Calculando o Mapa Logístico(3)

- Ao invés de fazer “na mão” podemos usar o Excel

- Valores Constantes:

- R na célula B1
- N nas células A3 e A4
- x0 na célula B3

- A célula B4 (x1) vale:

- $=B\$1*B3*(1-B3)$

- Selecionar a linha 4

- E arrastar com o mouse para repetir a fórmula para as outras linhas.

	A	B
1	R	1.50
2	N	X0
3	0	0.5
4	1	0.3750
5	-	-

# Calculando o Mapa Logístico(3)

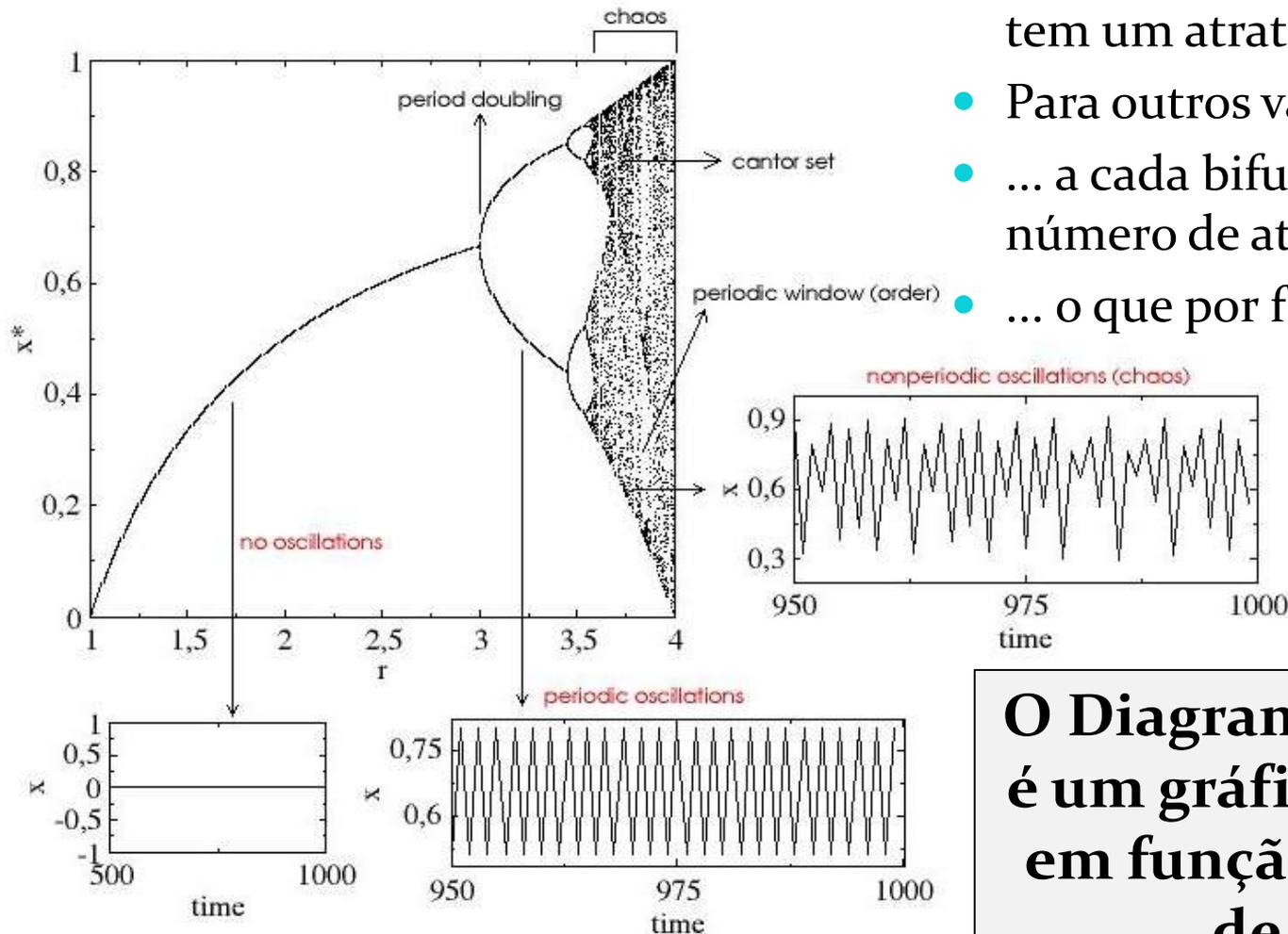
Você pode calcular para vários “R”s de uma vez, ou mesmo definir um intervalo de valores onde serão calculados!

Lembre-se que o número de iterações é importante, para ter certeza do valor é bom ter pelo menos 500 iterações.

C4		$f_x = \$C\$1 + (\$E\$1 - \$C\$1) / 100 * C3$									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1		min=	0.2	max	4						
2											
3		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
4	R	0.20	0.24	0.28	0.31	0.35	0.39	0.43	0.47	0.50	
5	N	X0									
6	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	
7	1	0.0500	0.0595	0.0690	0.0785	0.0880	0.0975	0.1070	0.1165	0.1260	
8	2	0.0095	0.0133	0.0177	0.0227	0.0283	0.0343	0.0409	0.0480	0.0555	
9	3	0.0019	0.0031	0.0048	0.0070	0.0097	0.0129	0.0168	0.0213	0.0264	
10	4	0.0004	0.0007	0.0013	0.0022	0.0034	0.0050	0.0071	0.0097	0.0130	

# O Diagrama de Bifurcação

- Para alguns valores de  $R$  o sistema tem um atrator
- Para outros valores, tem dois
- ... a cada bifurcação, dobramos o número de atratores
- ... o que por fim nos leva ao caos!



**O Diagrama de bifurcação é um gráfico dos atratores em função do parâmetro de controle**

# Se divertindo com a Planilha

O que é interessante de se observar:

- Faça gráficos de  $x_n$  como função de  $n$  para vários valores de parâmetros de controle  $r$ .
  - Por exemplo varie  $r$  de 0.5 até 4 de 0.25 em 0.25. O que acontece? Deixe  $x_0$  fixo em 0.5.
- O número de iterações é importante a solução deve atingir a estabilidade (quando isso é possível) (digamos 500 no mínimo)
- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas contra o parâmetro de controle. Veja o que ocorre.

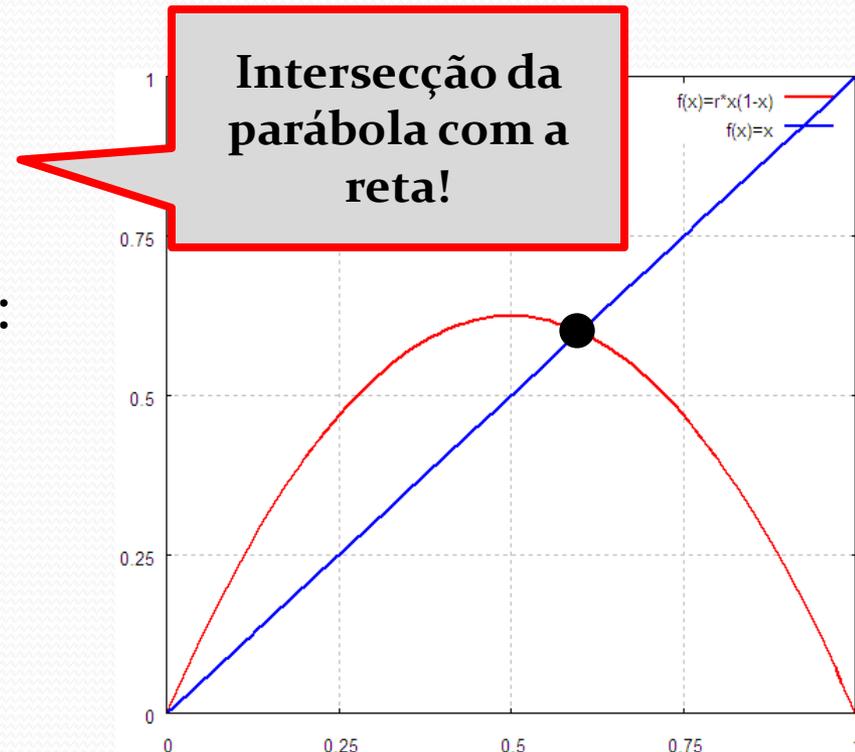
# Previendo os Atratores

- Há uma maneira de prever quais seriam os atratores?
  - Quando chega no atrator qualquer iteração fornece sempre o mesmo valor. Matematicamente:

$$x_{n+1} = x_n \Rightarrow rx_n(1-x_n) = x_n$$

- As soluções dessa equação são:

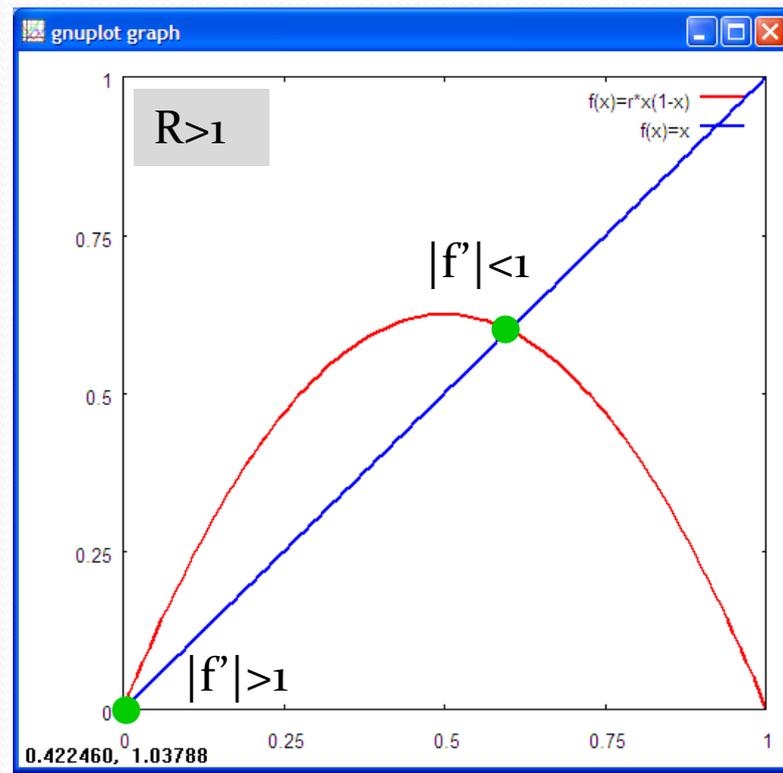
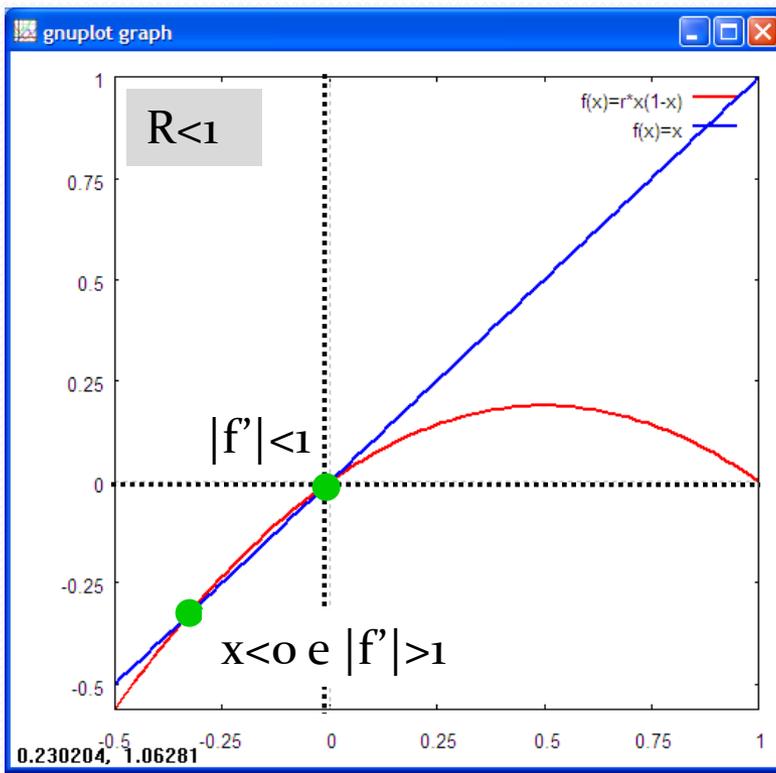
$$x_n = 0 \text{ e } x_n = (1 - 1/r)$$



- Será que ambas as soluções são atratores?

# Previendo Atratores

- Vimos no Applet que para  $r < 1$ ,  $x_n = 0$  é o atrator e  $x_n = (1 - 1/r)$  não é
- Vimos na planilha que para  $r > 1$ ,  $x_n = (1 - 1/r)$  é o atrator e  $x_n = 0$  não é.
- Onde ocorre essa troca? e qual a condição para ser um atrator?
- Não vamos provar matematicamente, mas a condição para ser um atrator é que **módulo da derivada  $f'(x_n)$  seja menor que 1** (ou seja que a parábola não esteja mais inclinada do que a reta)



# As Soluções de $x_{n+1} = x_n$

- A derivada é simplesmente:

$$f'(x_n) = r - 2rx_n$$

- Caso  $x_n \rightarrow 0$

- $f'(0) = r$

- Para que seja um atrator  $|f'| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$

- e como  $r > 0$  então:  $0 < r < 1$

- Caso  $x_n \rightarrow 1 - 1/r$

- $f'(1 - 1/r) = 2 - r$

- Para que seja atrator  $|f'| < 1 \Rightarrow |2 - r| < 1 \Rightarrow 1 < r < 3$

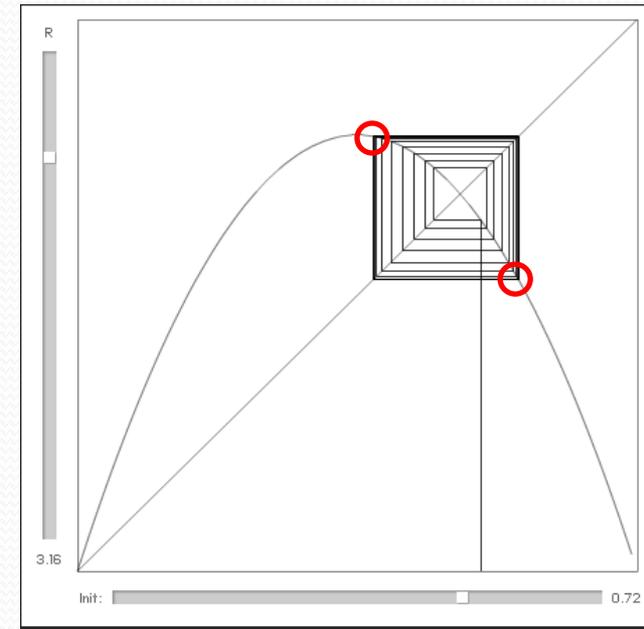
- **VERIFIQUEM** isso no applet!

# Previendo 2 Atratores

- Observamos na planilha e no applet que para determinados valores de  $r > 3$ , não tem **1** atrator, mas tem **2** atratores!
- Como prever isso? Basta usar a condição  $x_{n+2} = x_n$ , o que significa que a cada duas iterações repete-se um valor
- Vamos calcular:

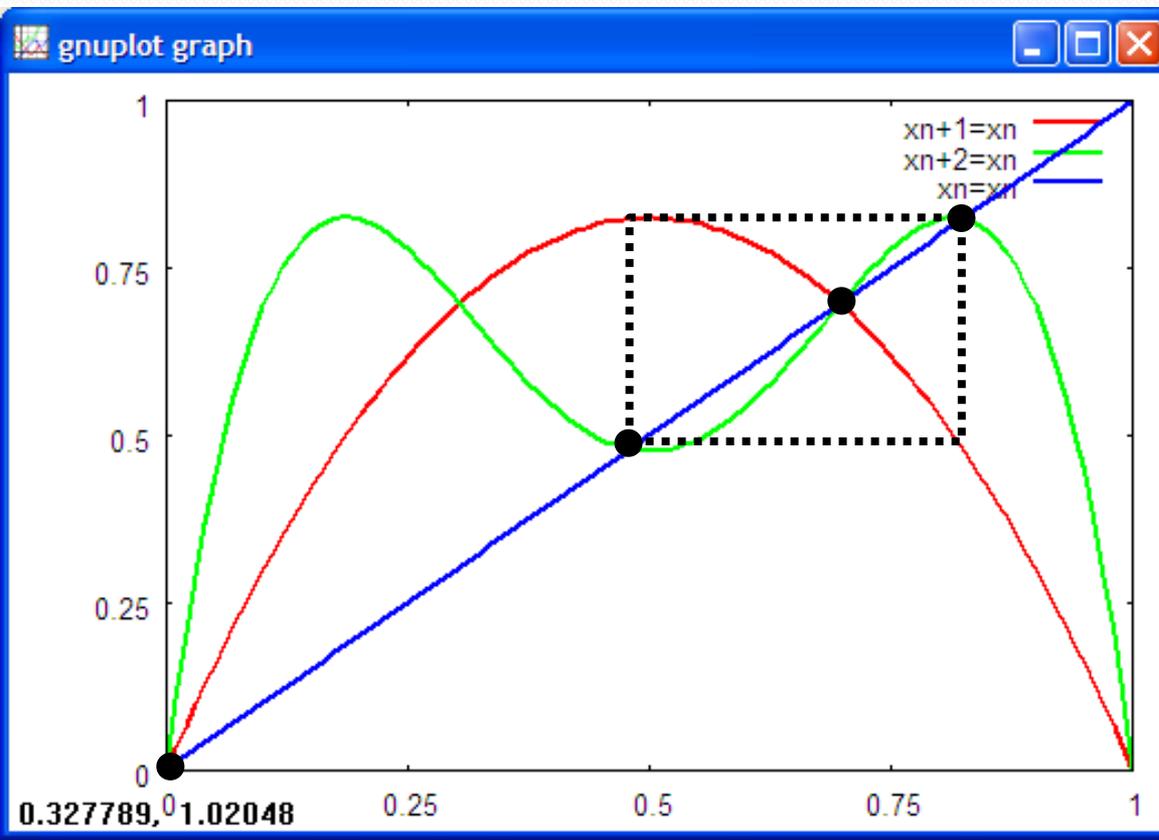
$$\begin{aligned}x_{n+2} &= rx_{n+1}(1 - x_{n+1}) \\ &= r[rx_n(1 - x_n)][1 - rx_n(1 - x_n)] = x_n\end{aligned}$$

- **Ou seja, agora os atratores estão na intersecção da reta com um polinômio de 4º grau.**



# As Soluções de $X_{n+2}=X_n$

- No gráfico vemos um exemplo das soluções. Duas delas coincidem com as anteriores, mas neste caso ambas tem  $|f'| > 1$  e não servem.
- As outras duas soluções são:



$$x_n = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Aplicando a condição para a existência de atratores:

$$|f'(x_n)| < 1,$$

- chega-se à conclusão que

$$3 < r < (1 + \sqrt{6})$$

- vocês podem verificar isso com o applet.

# Para esta semana

- Semana que vem é feriado e não teremos aula!
- Assim, para a segunda-feira dia 29/3, leiam os artigos:
  - Li and Yorke, *Period Three Implies Chaos*, American Mathematical Monthly, v. 82, n. 10 (1975) 985-992
  - Robert M. May, *Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos*, J. Theor. Biol., v. 51 (1975) 511-524
- Escolham um deles e façam um resumo curto de não mais de uma página
- Me lembrem de enviar os artigos para a lista!

# Para a próxima semana 1

## A convergência para os atratores:

- Fazer os gráficos de  $x_n$  como função de  $n$  para vários valores de parâmetros de controle. Deixando  $x_0$  fixo em **0.5**, faça:
  - Três valores de  $r$  para  $0 < r < 1$  (no mesmo gráfico)
  - Três valores de  $r$  para  $1 < r < 3$  (idem)
  - Dois valores de  $r$  para  $3 < r < 1 + \text{raiz}(6)$  (idem)
  - **Atenção: que intervalo de  $n$  é interessante mostrar para cada um deste gráficos? Precisa mostrar até  $n=500$ ? Queremos ver os regimes transientes e estacionários.**
- Para cada intervalo, explique o que esta ocorrendo:
  - Qual o numero de atratores?
  - Por que uma determinada solução é o atrator?
  - Por que existe(m) esse(s) atrator(es)?

# Para a próxima semana 2

## Sensibilidade a condição inicial:

- Fazer gráficos de  $x_n$  como função de  $n$  para os regimes **com e sem caos** partindo de **2** condições iniciais muito próximas:  
 $x_0=0.5$ ,  $x_0=0.50001$ 
  - **Atenção:** Queremos comparar a evolução das soluções.

## Diagrama de bifurcação:

- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas (os valores lá no final da tabela) em função do parâmetro de controle.
  - **Atenção:** O número de iterações é importante pois a solução deve atingir a estabilidade (quando existe). No mínimo **500** iterações.
- Determine a posição da 1º, 2º e 3º bifurcação e calcule a constante de **Constante de Feigenbaum** (com incerteza)

# Dicas

- A planilha esta nos computadores do laboratório
- Vocês podem levar a tabela para casa, mas tem que cumprir a presença no lab. Aproveitem para discutir com os colegas e tirar dúvidas com os monitores.