

# Física Experimental IV

Notas de aula: [www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

LabFlex: [www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

## Aula 2, Experiência 1 Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa

[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)

Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

# Notícias da disciplina

Podem me procurar! me encontrando, estou sempre a disposição.

Prof. Henrique Barbosa

hbarbosa@if.usp.br

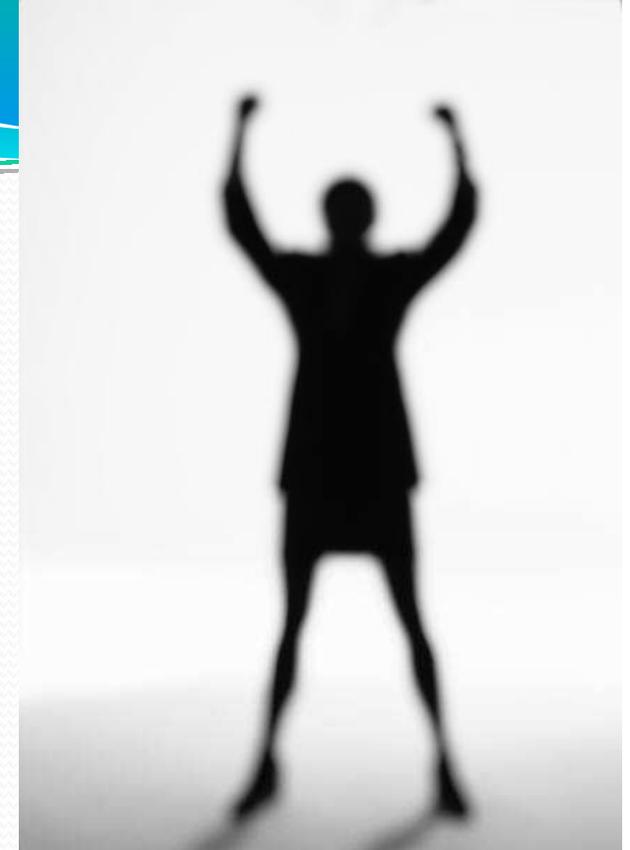
Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

<http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa>

**Vejam as notas de aula e os manuais de preparação das sínteses e relatórios.**

Usem a lista de discussão para tirar as dúvidas, pois pode ajudar outros alunos.



# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 4 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e Análise de Fourier
    - Ressonância de um circuito RLC simples
    - Funções caóticas: mapa logístico
    - Caos em circuito RLD

# TAREFAS DA SEMANA PASSADA



# Tarefas 1

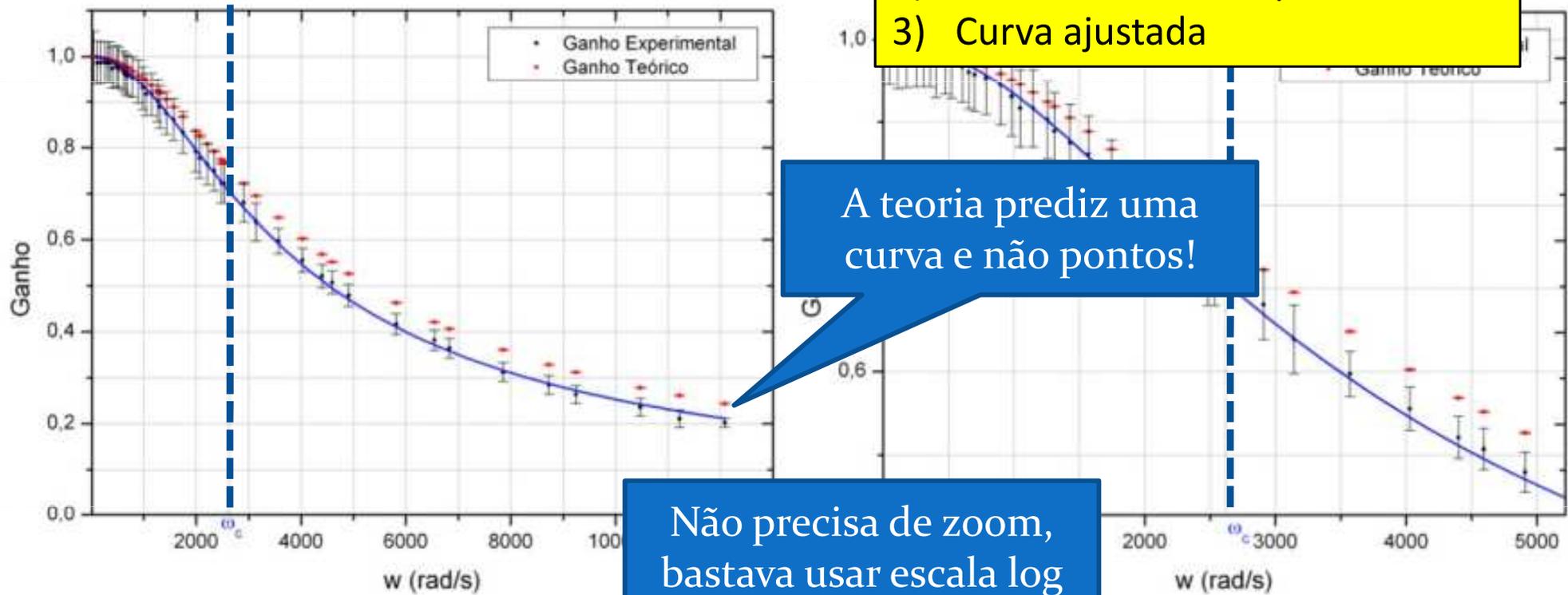
Montar um circuito RC com frequência de corte  $\sim 500\text{Hz}$ .  
Usando um **sinal de entrada senoidal** e  $V_{\text{saida}} = V_C$  fazer:

- Gráfico de  $G_0$  em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente
  - Fazer ajustes necessários e tratamento estatístico
- Gráfico de  $\phi_G$  em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
  - Fazer ajustes necessários e tratamento estatístico
- Lembre-se de medir valores  $\omega \ll \omega_c$  até  $\omega \gg \omega_c$  para poder fazer um bom ajuste. **Vejam tutorial no meu site!**

# Ganho

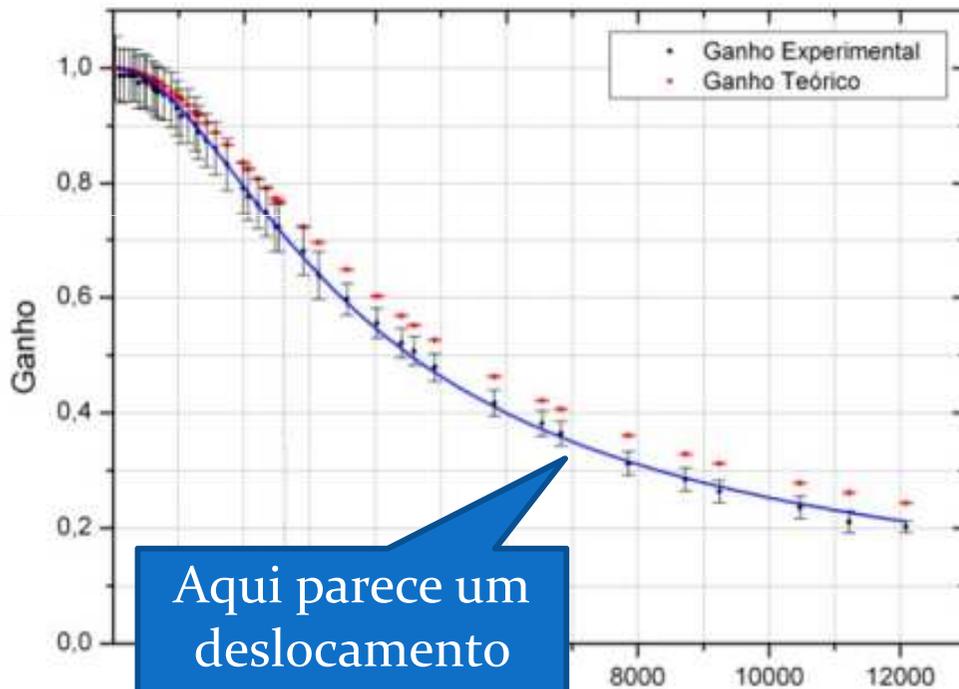
Bom trabalho:

- 1) Pontos experimentais
- 2) Valores teóricos esperados
- 3) Curva ajustada

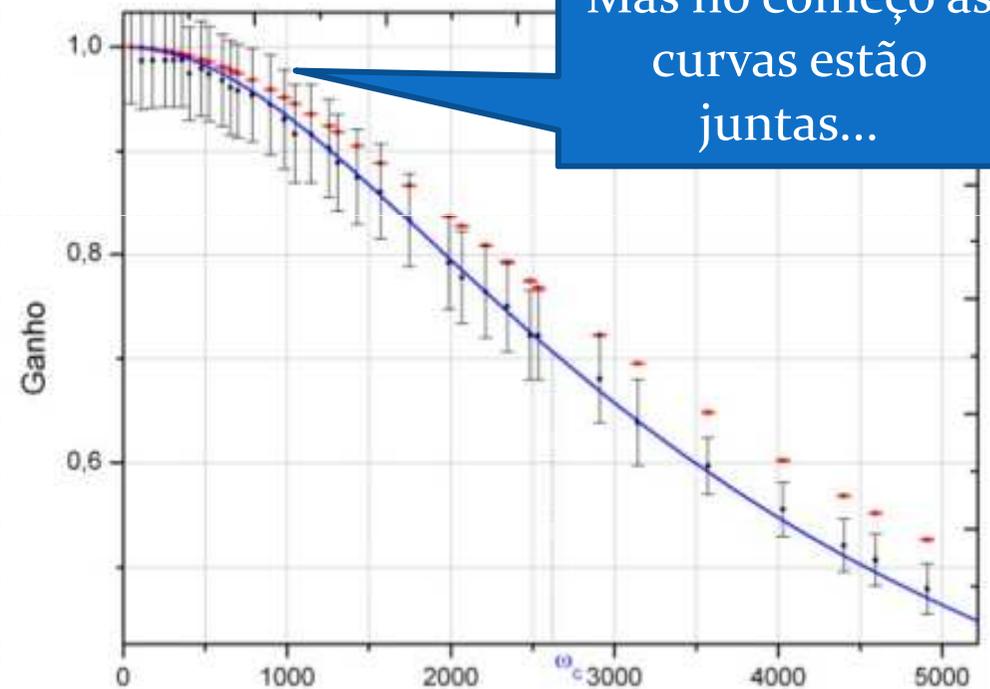


**Figura 2:** À esquerda: Gráfico do Ganho vs  $w$  (rad/s). A curva em azul representa o ajuste não-linear da função do ganho para os pontos experimentais. A linha azul pontilhada representa a frequência de corte fornecida pelo ajuste. À direita: Zoom dado na primeira parte do gráfico, a fim de ter uma melhor visualização do começo da curva do ganho.

# Ainda o mesmo grupo



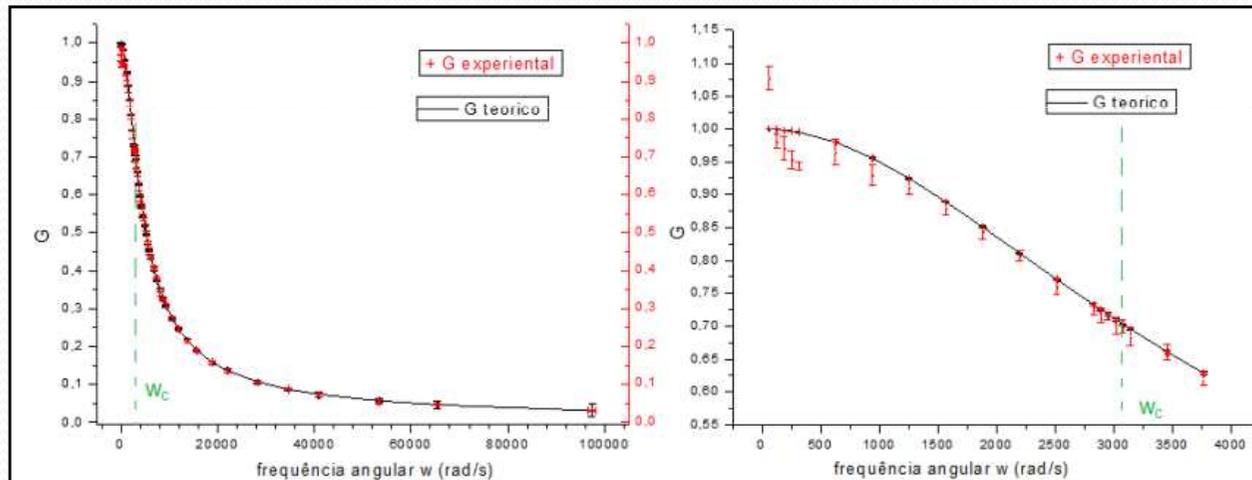
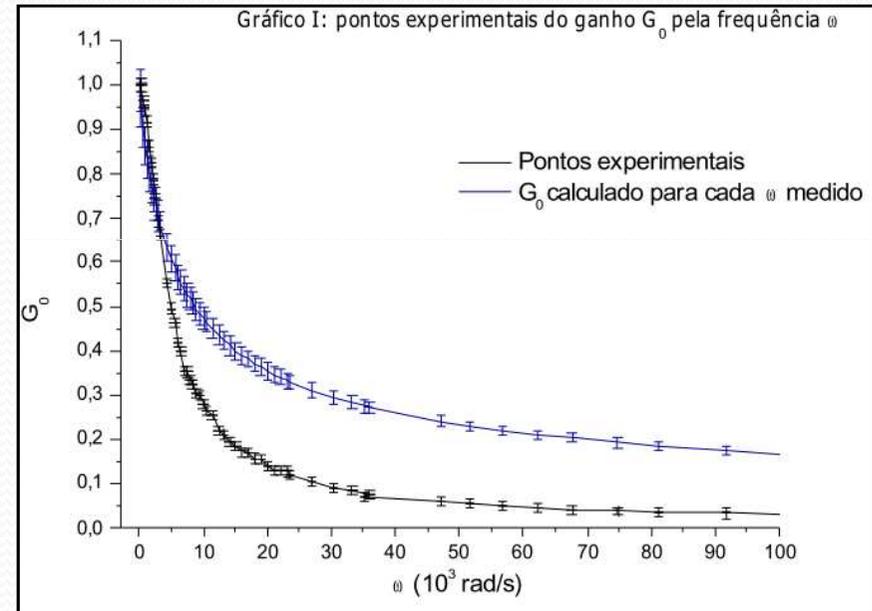
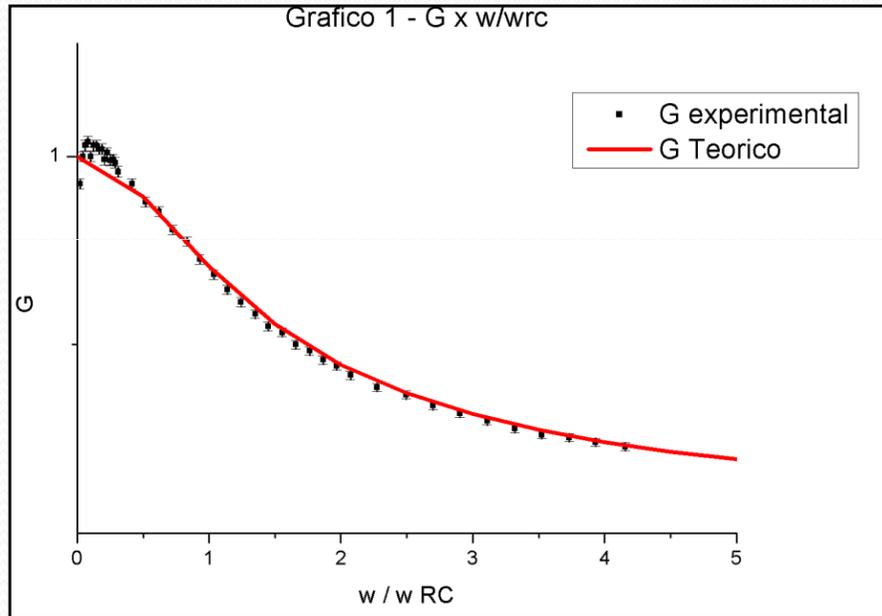
Aqui parece um deslocamento constante...



Mas no começo as curvas estão juntas...

A curva ajustada forneceu um valor para de  $w_c$  de 2618(13) rad/s. Este valor possui um desvio relativo de 13,8% em comparação com o valor esperado teoricamente que era de 3039(4) rad/s. Foi observado que os pontos experimentais estão a uma distância aparentemente constante a partir de 1988 rad/s. Isto provavelmente se deve a algum efeito dissipativo no circuito.

# Outros grupos

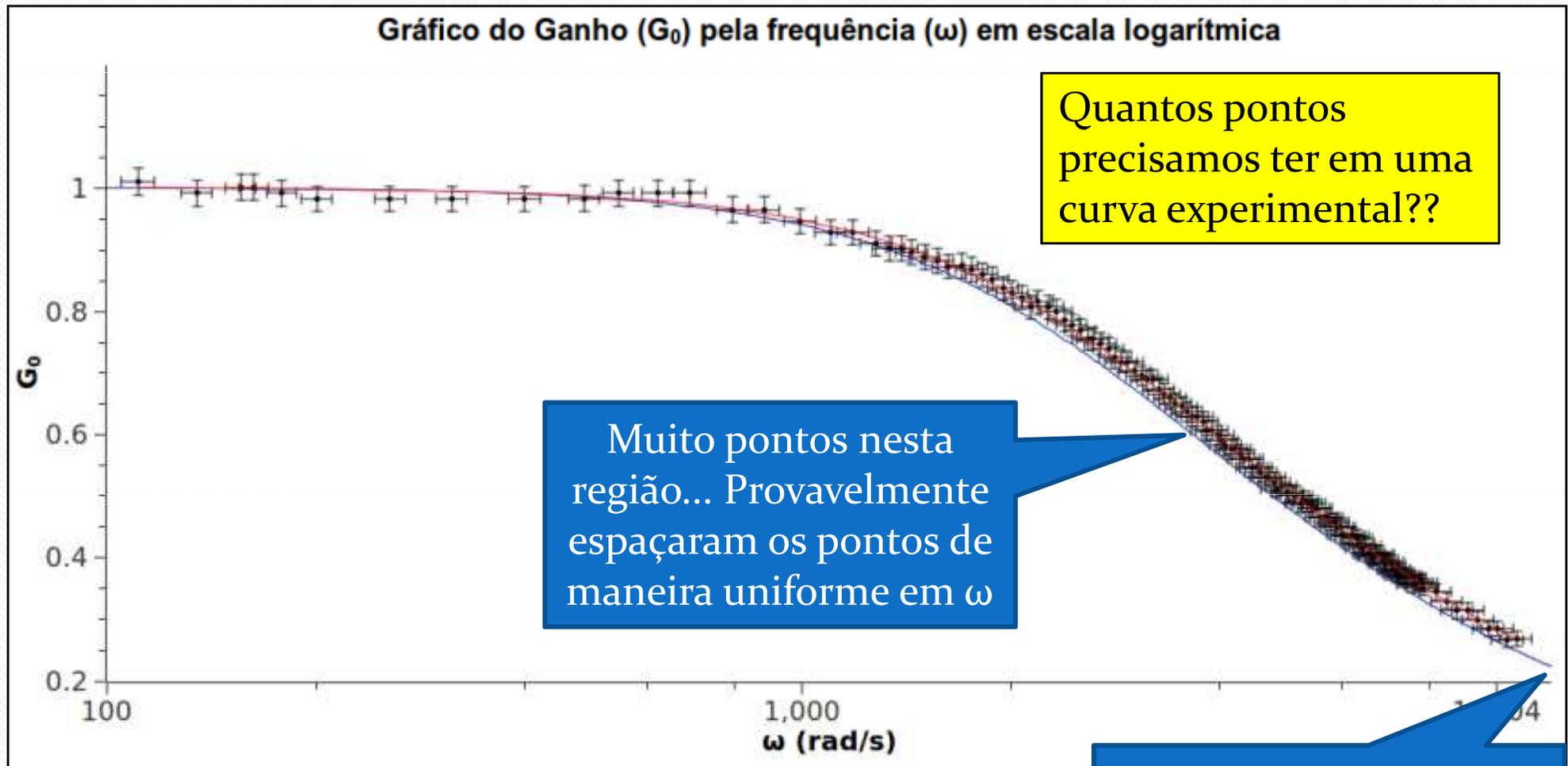


**Figura 1:** a figura mostra o ganho obtido em função das frequências utilizadas, tanto experimental como teórico.

**Figura 2:** a figura mostra o ganho obtido em função das baixas frequências utilizadas para uma melhor visualização do formato da curva.

# Escala em log

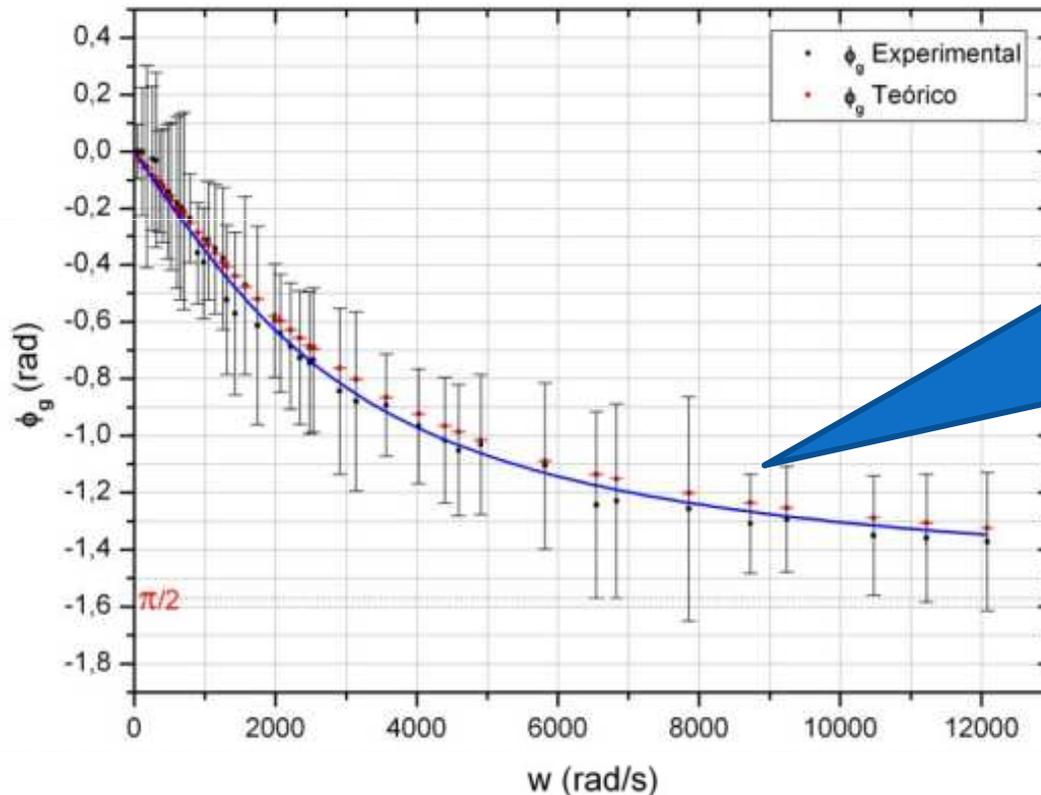
- Um dos grupos usou escala em log....



Seria muito melhor ter medido  $\omega$  maiores...

# Fase do Ganho

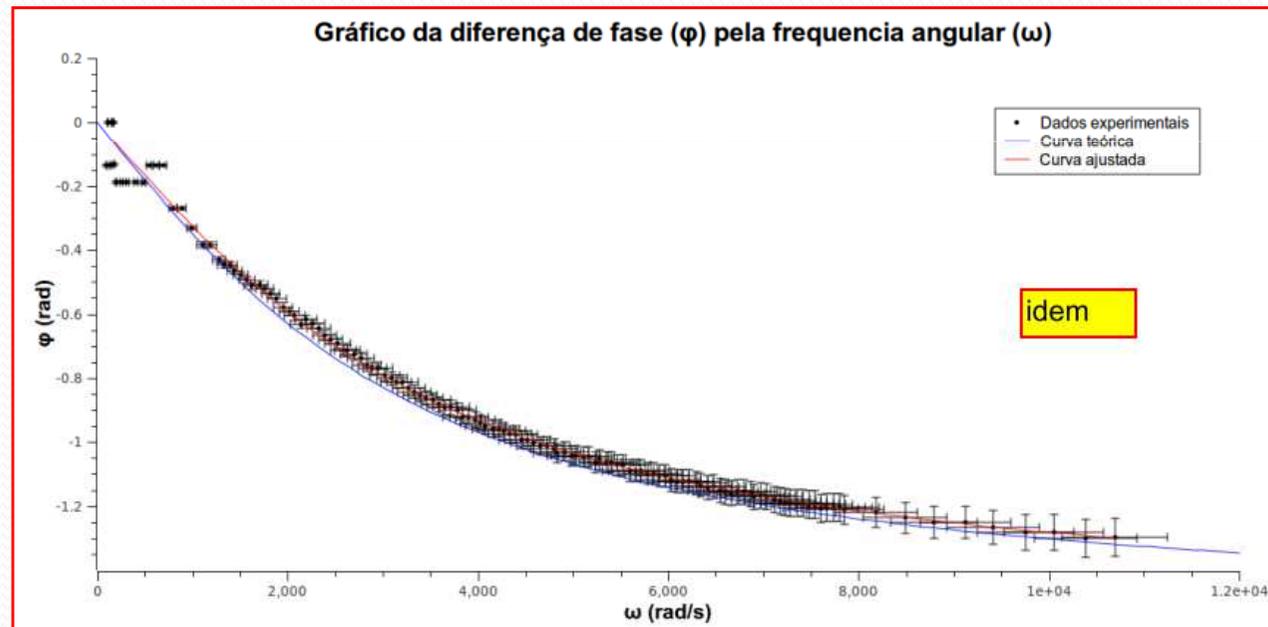
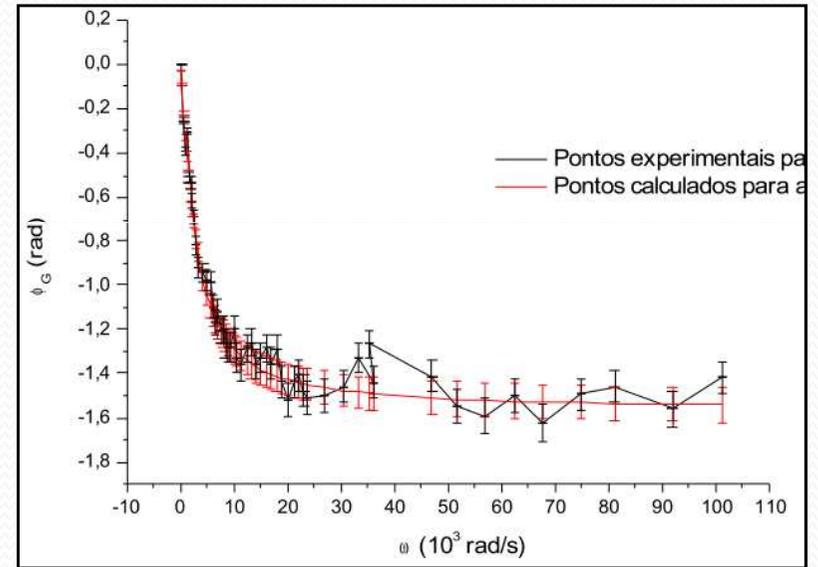
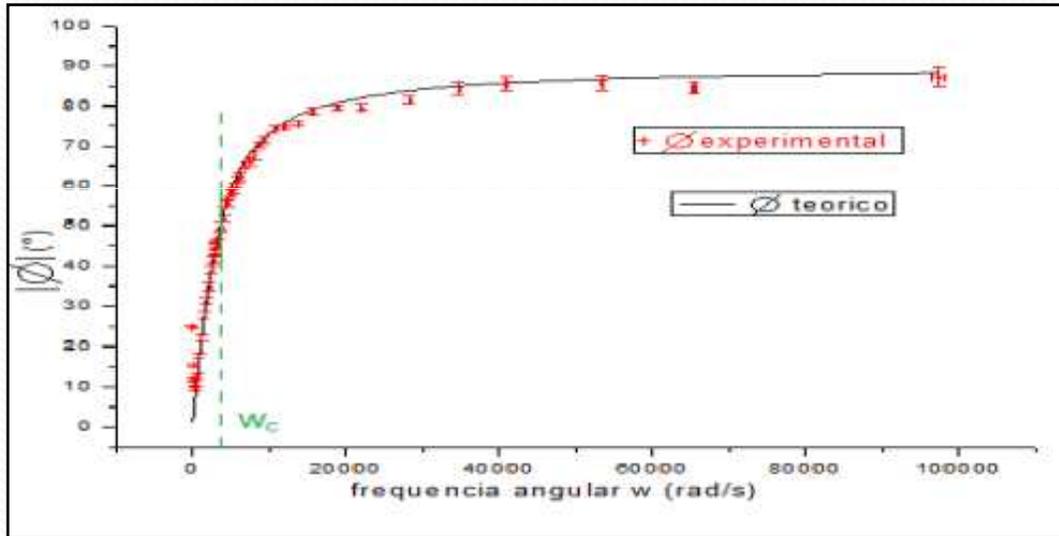
$$\Phi_G = \arctan(-\omega/\omega_0)$$



Mas na verdade todos os pontos teóricos estão acima da curva experimental... Só há uma aparente compatibilidade porque as incertezas são grandes.

Pode-se observar que os pontos experimentais são compatíveis com o valor teórico esperado. Foi observado também que, para baixas frequências, a diferença de fase aumenta rapidamente, mas conforme a frequência aumenta, ela começa a cair mais lentamente, tendendo para o valor de  $\pi/2$  (reta vermelha pontilhada).

# Outros grupos



# Problemas – Parte 1

- Pedia para usarem uma frequência de **500Hz**, ou seja, de  **$\omega=2\pi f=3000$  rad/s**

## 3 Descrição experimental

Para esta experiência foram construídos dois circuitos idênticos com resistências diferentes. Na primeira parte foram usados dois resistores de aproximadamente  $1,00(5)$  k $\Omega$  em paralelo, formando resistor de  $2,03(10)$  k $\Omega$ . Na segunda parte, foi utilizado um resistor de  $1,01(5)$  k $\Omega$ . Nas duas partes o capacitor utilizado foi de  $1,1(1)$   $\mu$ F.

estes valores são nominais ou medidos com multímetro?

Com esses dados, foram encontrados dois valores de  $\omega_c$ , o primeiro, de  $447(17)$  Hz e o segundo, de  $836(24)$  Hz.

Conta e unidades erradas!  
 $1/(1.01\text{kohm} \cdot 1.1\mu\text{F}) = 900$  rad/s

Deviam ter usado  $w = 2 \cdot \pi \cdot \text{freq} = 2 \cdot \pi \cdot 500\text{hz} \approx 3000$  rad/s....

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow [\omega_c] = \text{rad} / \text{s}$$

$$C = 1\mu\text{F} \Rightarrow R \approx 300\text{ohm}$$

# Valores de todos

					Teórico		Experimental	
	R (ohm)	$\Delta R$ (ohm)	C ( $\mu F$ )	$\Delta C$ ( $\mu F$ )	$\omega_c$ (rad/s)	$\Delta\omega_c$ (rad/s)	$\omega_c$ (rad/s)	$\Delta\omega_c$ (rad/s)
h01	1010	50	1,10	0,10	900	93		
h01	2030	5% 100	1,10	0,10	448	46		
h02	329	2	0,999	0,005	3043	19	2618	13
h03	328	1% 3	1,00	0,10	3049	306	2948	18
h04	330	5	1,06	0,05	2872	143	2881	30
h05	328,4	0,5% 0,8	1,00	0,05	3045	152		
h06					2746	75	2965	5
							2969	15

Mesmos instrumentos de medida mas diferentes incertezas ?

Porque o  $\omega_c$  experimental não bate com o teórico ?

# Problemas – Parte 2

## 4 Resultados obtidos

$\omega = 1/(R \cdot C)$   
está em rad/s e  
não 1/s ...

### 4.1 Filtro RC

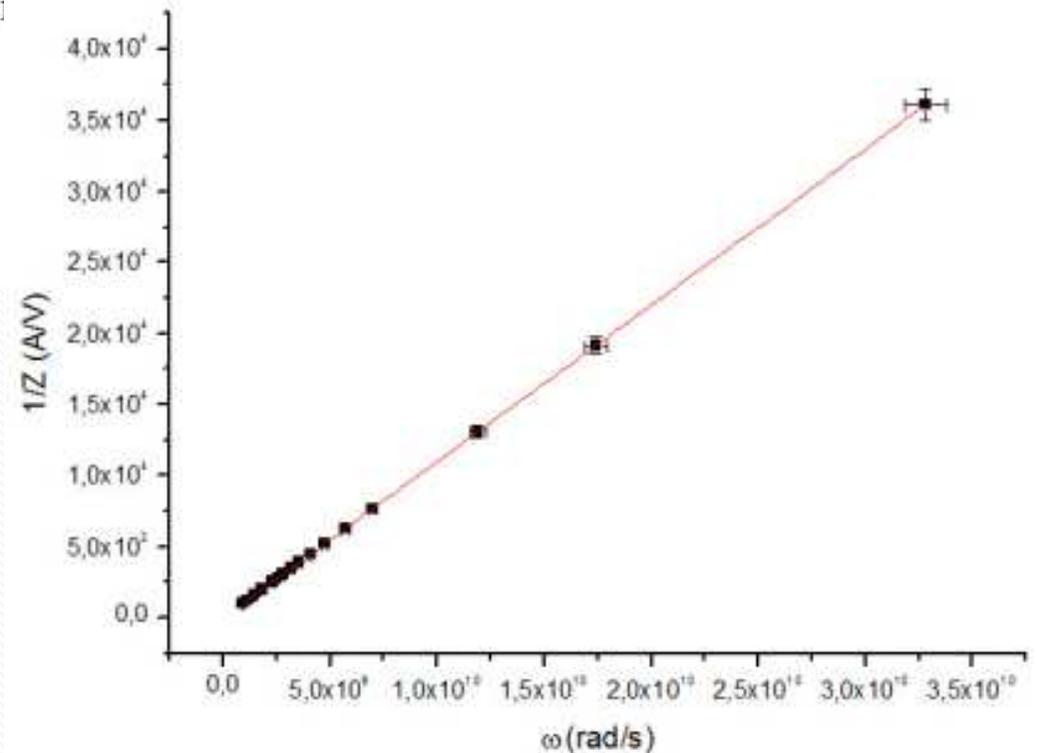
Através da equação 7, sendo  $R$  é o valor do resistor e  $C$  o valor do capacitor, foi encontrado a frequência de corte  $\omega_C = 447(17)$  Hz.

Sabendo que  $Z = \frac{1}{\omega C}$  foi feito o gráfico de  $1/Z$  em função de  $\omega$  (figura 4.1) e, a partir dele, calculado o valor da capacitância, comparando-a com a nominal. Pelo coeficiente angular do gráfico foi encontrado  $C_{exp} = 1,10(1) \mu F$ , valor compatível com o valor nominal do capacitor, o coeficiente linear do gráfico foi compatível com zero  $(1,8(36) \cdot 10^{-4})$ .

Usaram a fórmula para fazer o gráfico e depois “fitaram” o gráfico...

Problemas de lógica!!

Fig  
p1



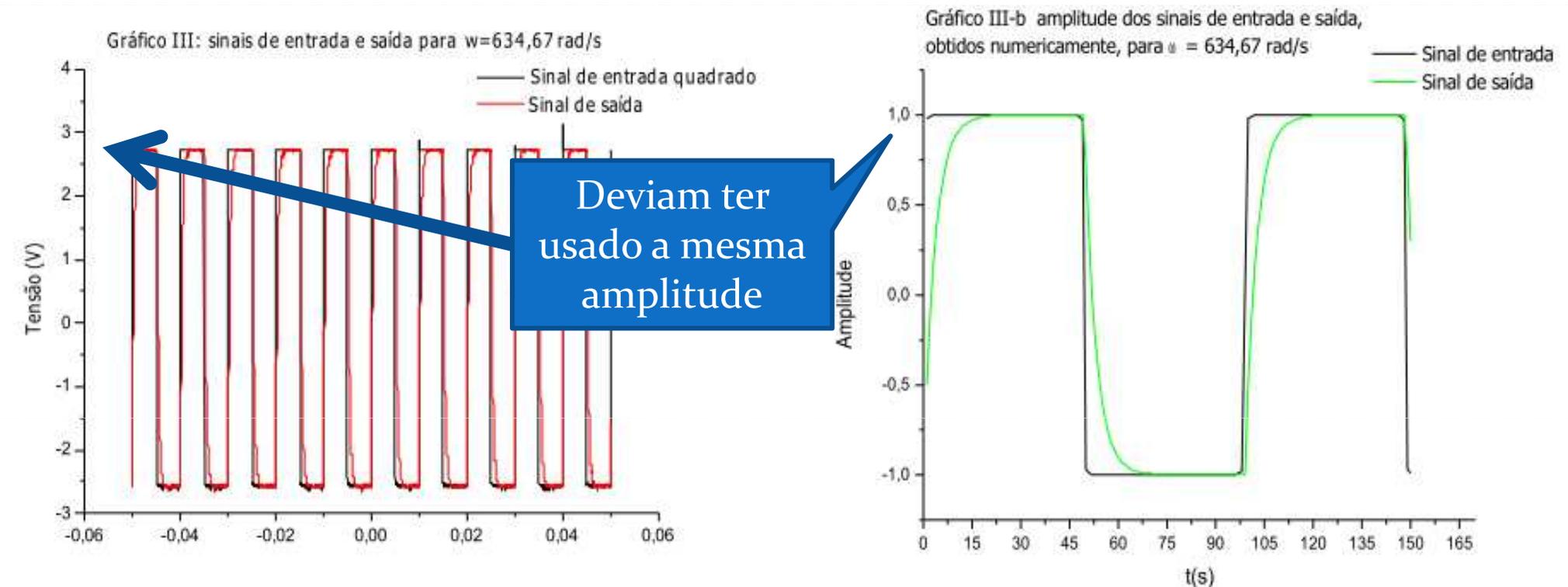
# Tarefas 2

Usando o mesmo circuito mas agora com **uma onda quadrada na entrada**, faça:

- Meça  $V_C$  e  $V_e$  no osciloscópio e salve os dados no pendrive para 3 frequências diferentes tais que:
  - $\omega \ll \omega_c$  (pelo menos 3 vezes)
  - $\omega \sim 2 \omega_c$
  - $\omega \gg \omega_c$  (pelo menos 30 vezes)
- Mostrar numericamente que  $V_C(t)$  pode ser obtido através da aplicação do ganho e fase para cada frequência que compõe onda quadrada de entrada
- Compare a sua previsão “teórica” com a medida experimental de  $V_C(t)$ .
  - Discuta o efeito da escolha do número de termos na série de fourier no seu resultado

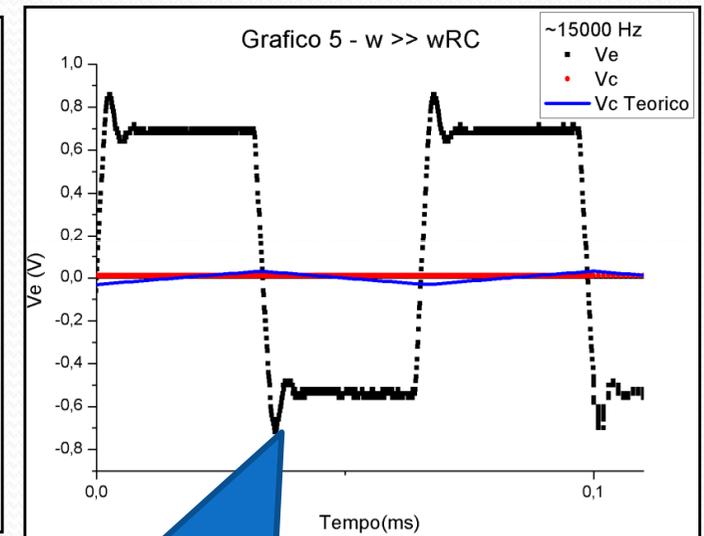
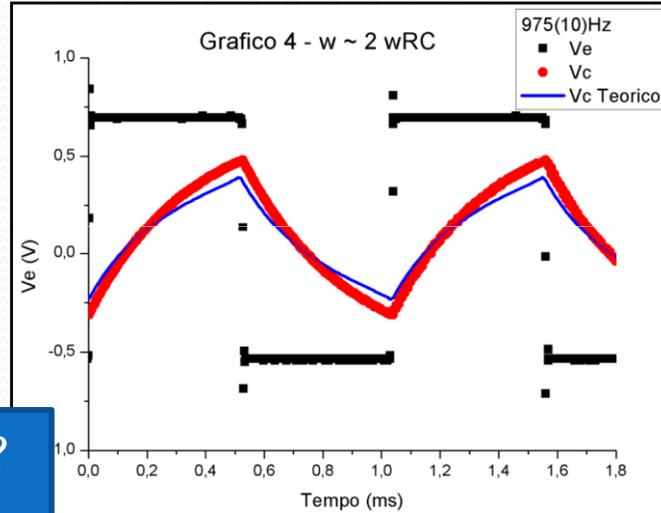
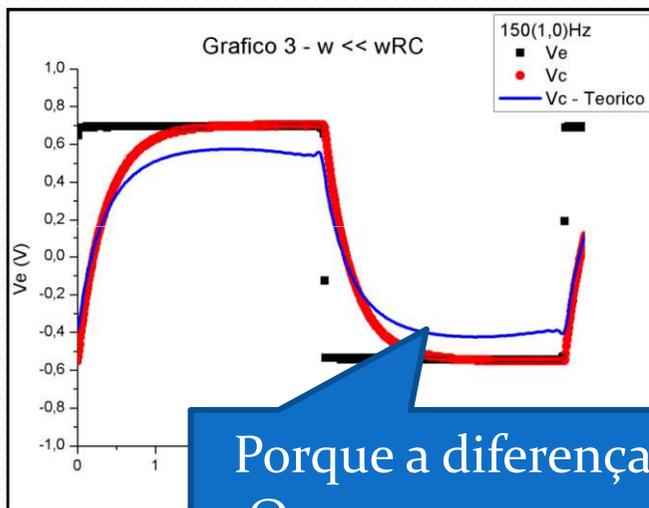
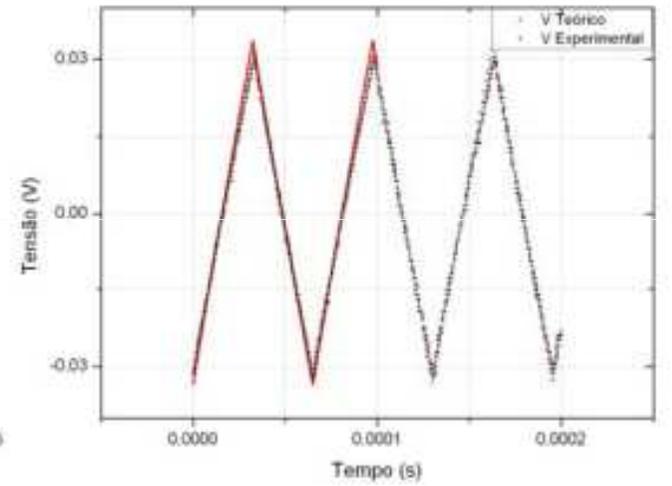
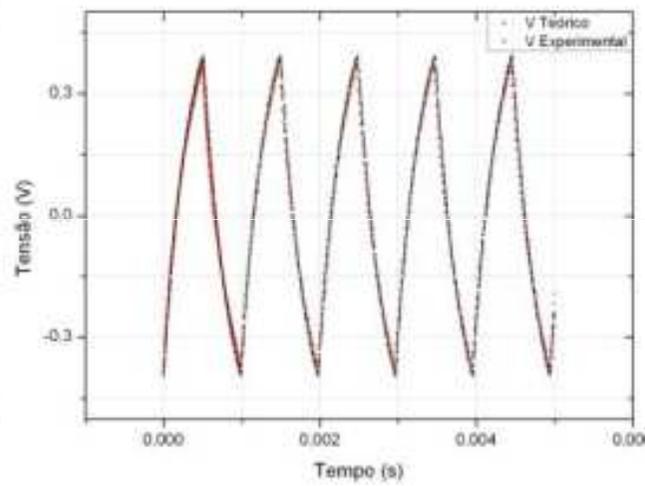
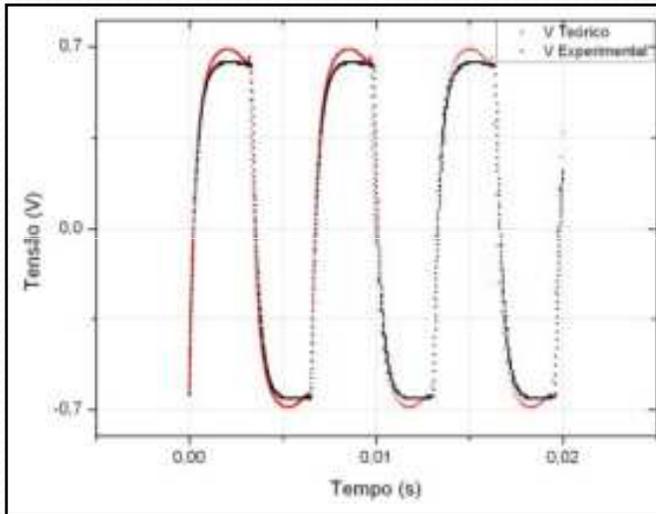
# Recomposição por Fourier

Fourier, mantendo o mesmo valor para  $\omega_c$  (consideramos o eixo do tempo um tanto arbitrário: tanto a adoção da simetria no osciloscópio quanto a limitação do número de pontos – e valores diferentes para  $t$  – na simulação). Os gráficos III, IV e V foram feitos a partir dos valores recebidos pelo osciloscópio. A seguir, foi simulada numericamente a mesma situação, e os resultados podem ser vistos nos gráficos III-b, IV-b e V-b.



O resultado parece bom, mas não dá para ter certeza pois não colocaram no mesmo gráfico

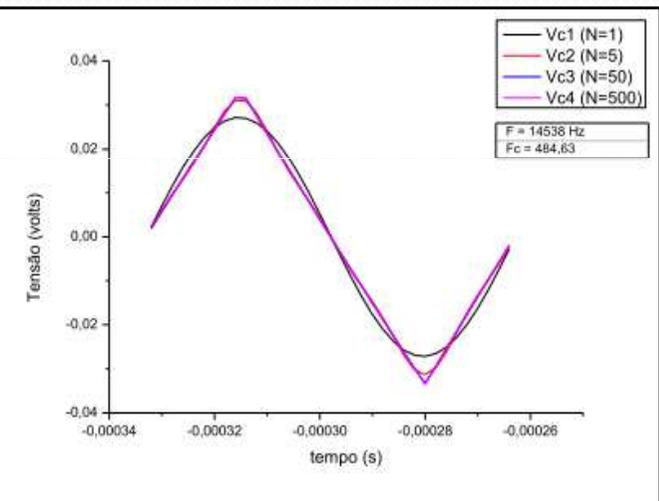
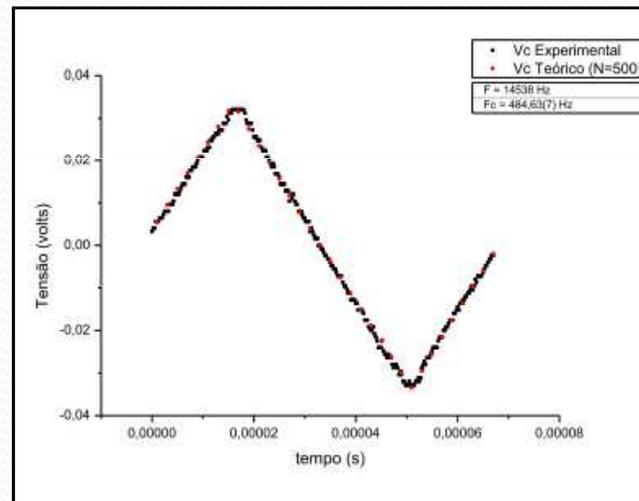
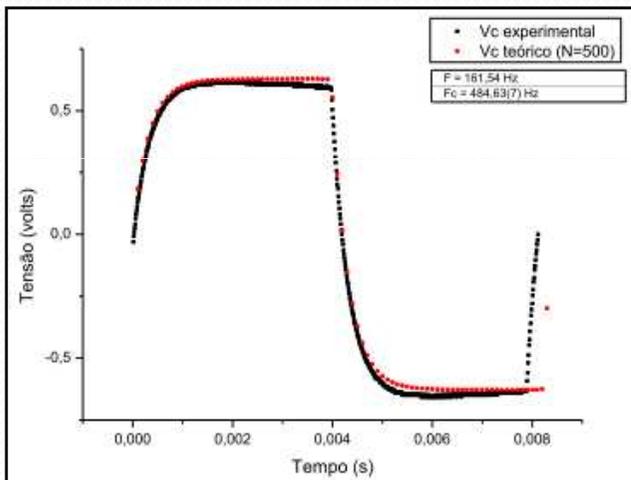
# Outros grupos



Porque a diferença?  
Que  $wc$  usaram na  
recomposição?

Com  $V_e$  não dá para  
ver a comparação...

# Bom Trabalho



Das figuras 4 , 5 e 6 que comparam o valor teórico com o experimental, nota-se que utilizando 500 termos na série de Fourier a função teórica possui uma aproximação boa com a experimental, já que há intersecção na maioria dos pontos; a incerteza utilizada está dentro do ponto. É possível observar da figura 4, que a diferença entre os  $V_C$  é maior observado do que em relação as figuras 5 e 6, tal efeito tem como motivo o fato de o sinal de entrada  $V_E$  ter formato levemente trapezoidal, não se comportando perfeitamente como uma onda quadrada. Da figura 7 é possível visualizar o efeito do número  $N$  de termos da série de Fourier e a convergência para uma única curva. Isto pode ser concluído principalmente analisando a diferença de  $N=50$  e  $N = 500$ , que não são visíveis.

# Tarefas 3

- Para o caso  $\omega \gg \omega_c$  e onda de entrada quadrada, mostre com os dados obtidos que o sinal de saída é proporcional a integral do sinal de entrada
  - Neste caso, como a entrada é um sinal quadrado, significa que a saída será um triângulo, certo?
  - Deduza a afirmação acima e mostre que as “inclinações” medidas e teóricas da onda triangular na saída são compatíveis

# Circuito Integrador

Sabemos que:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$

Com:

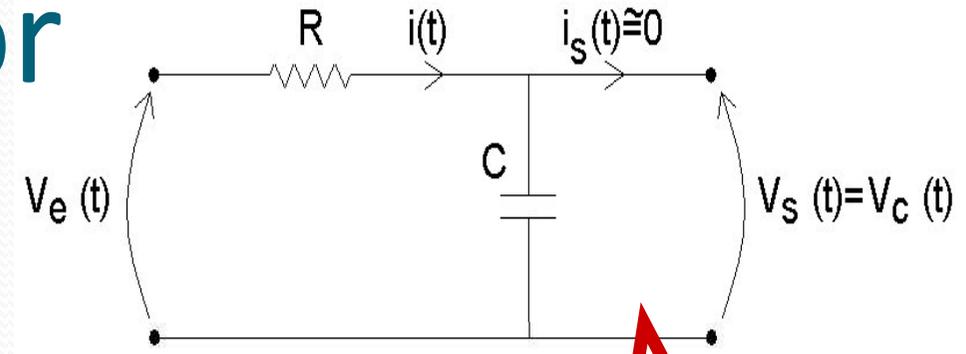
$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \phi_G = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Se  $\omega \gg \omega_c$ , então:

$$G_0 \approx \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^2}} = \frac{\omega_c}{\omega} \quad \phi_G = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Ou seja:

$$\hat{G} = \frac{1}{\omega RC} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega RC}$$

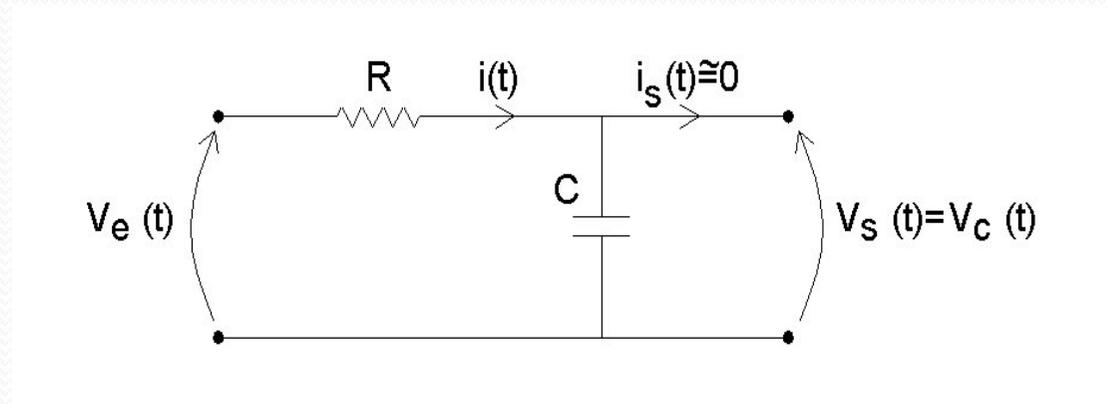


**Circuito especial**

# Circuito Integrador

- Então:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = \frac{1}{j\omega RC}$$



- Ou seja:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{j\omega RC} \hat{V}_e$$

- Lembrando que:  $\hat{V}_e = V_e e^{j\omega t}$

- E que:  $\int \hat{V}_e dt = \frac{1}{j\omega} V_e e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \hat{V}_e$

- Temos que:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

No limite que  $\omega \gg \omega_c$ ,  $G_0 \rightarrow 0$  e o circuito acima funciona como integrador da tensão de entrada

# Da teoria....

Como:

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt$$

Então:

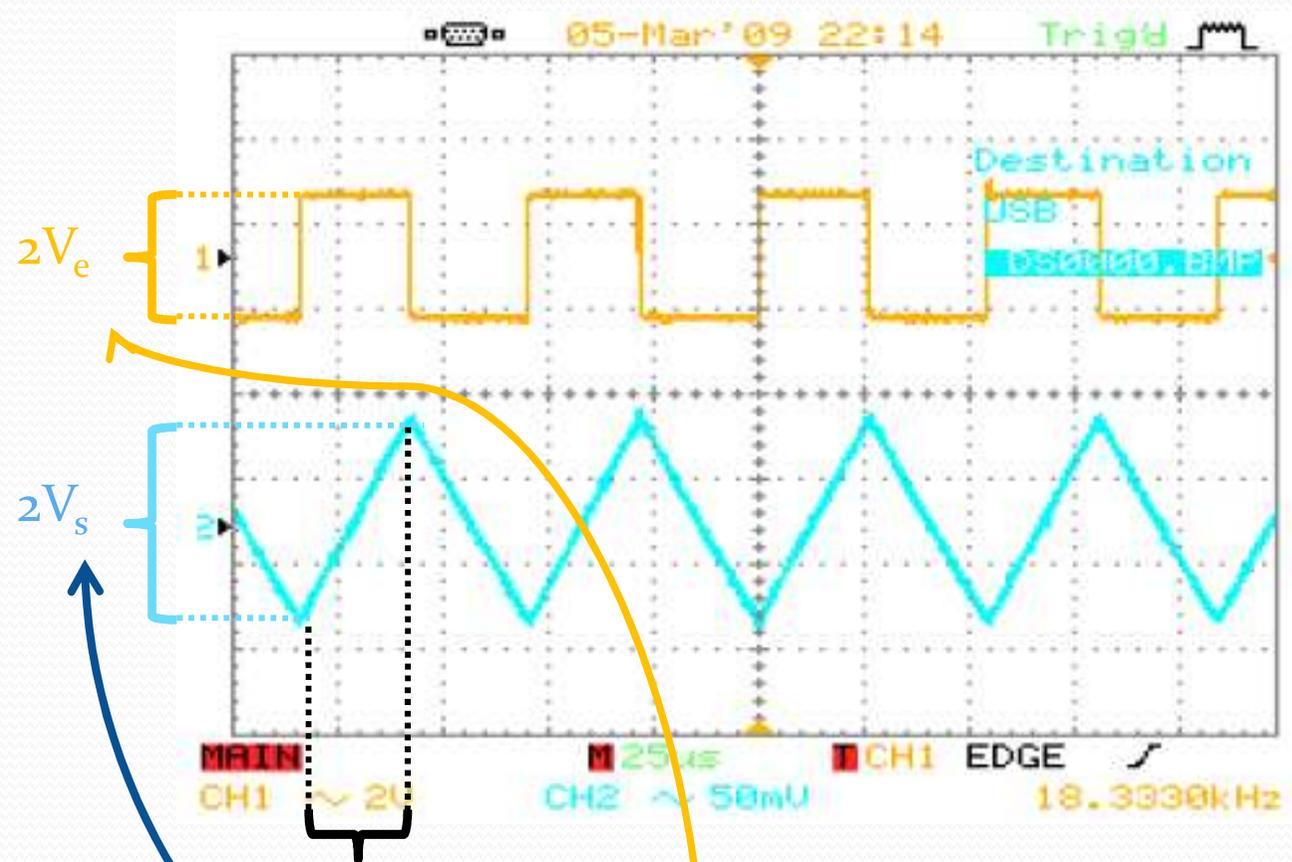
$$\frac{d\hat{V}_s}{dt} = \frac{1}{RC} \hat{V}_e$$

E como:

$$d\phi_s / dt = 0$$

Temos:

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{1}{RC} V_e \Rightarrow \text{inclinação} = \frac{2V_s}{T/2} = \frac{V_e}{RC}$$



# Inclinação do triângulo



$$V_c = \frac{1}{RC} \int_0^t V_e dt \Leftrightarrow \frac{d}{dt} V_c = \frac{1}{RC} V_e$$

Nota-se que, conforme a frequência aumenta, o sinal de saída vira uma onda triangular. Pela equação 3 deve haver uma compatibilidade entre o coeficiente angular da reta que compõe o triângulo e o valor de  $V_e/RC$ . Foi obtido o valor de 1,787(15) V/s para o coeficiente angular e 1,934(15) V/s para  $V_e/RC$ , dando um desvio relativo de 7,6%, o que indica uma boa compatibilidade.

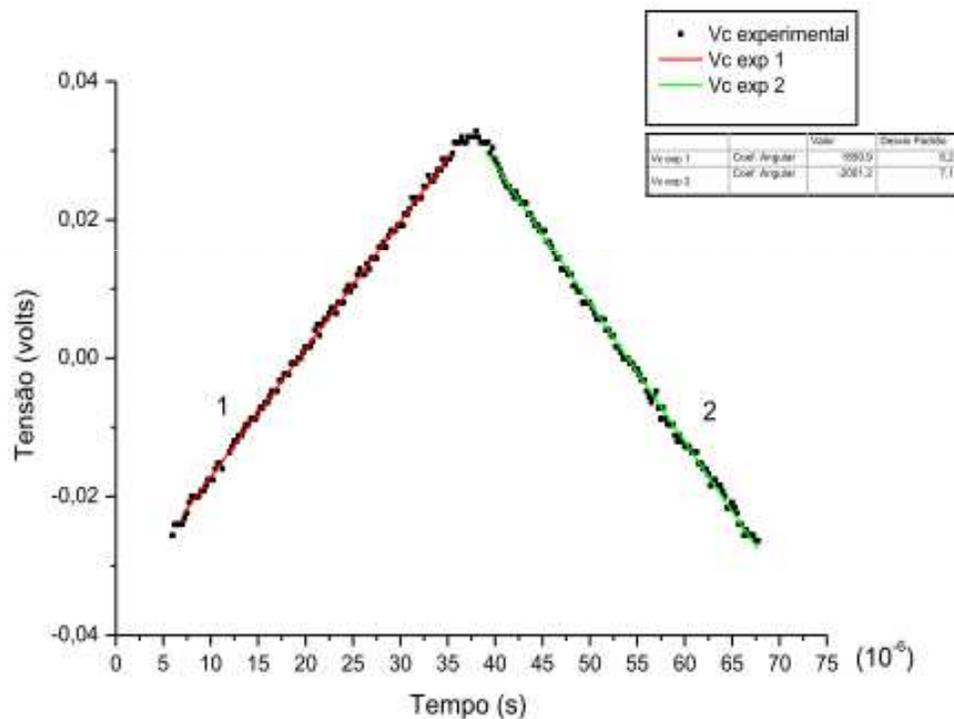
claro que não! se não comparar com as incertezas das duas grandezas, 7% de desvio pode estar muito longe de ser compatível.

## 4. Conclusões

Usem um teste estatístico como t-student...

# Outros resultados

Por fim, para o caso onde  $\omega \gg \omega_c$ , tem-se que  $V_c = \frac{1}{RC} \int V_e dt$ . Ou seja, o sinal no capacitor é uma onda triangular já que é a integral de uma onda quadrada. Segue então que  $\frac{dV_c}{dt} = \frac{V_e}{RC}$  é o *coeficiente angular* de  $V_c$ . A tabela 1 e a figura 8 mostram as comparações realizadas dos coeficientes angulares dos  $V_c$  teóricos e experimentais.



**Tabela 01** – A tabela abaixo compara os valores dos coeficientes angulares do  $V_c$  teórico e experimental.

	Teórico	Experimental
Coef. Angular 1	1851 (6)	1851(92)
Coef. Angular 2	-2001 (1)	-1961 (89)

# Resultados dos vários grupos

	Inclinação experimental (V/s)	Inclinação teórica (V/s)
H01		
H02	1.787 (15)	1.934 (15)
H03	1792 (5) 1855 (5)	2090 (120)
H04		
H05	1851 (6) -2001 (1)	1851 (92) -1961 (89)
H06		



Discussão extra

1. Experimental x Teórico

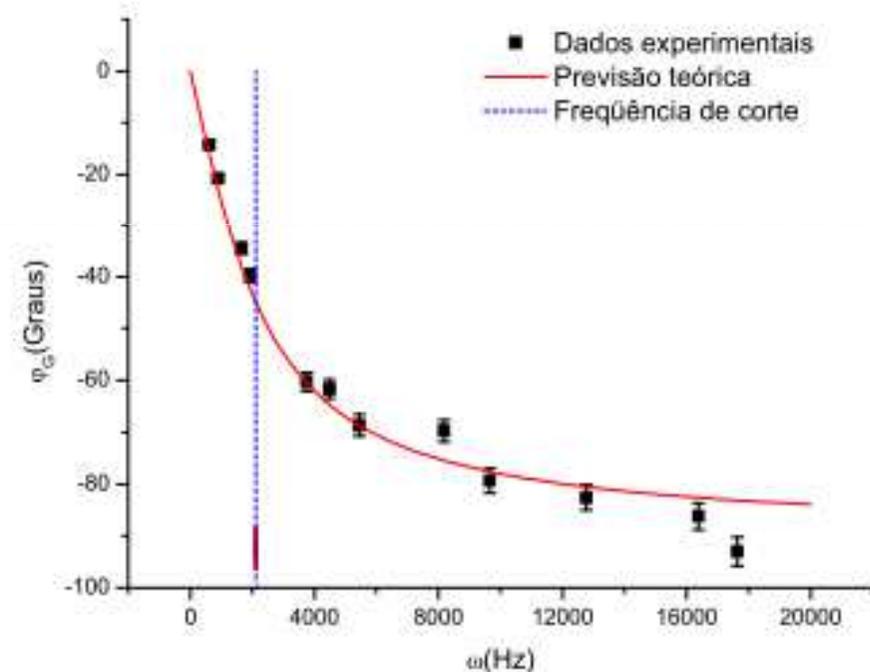
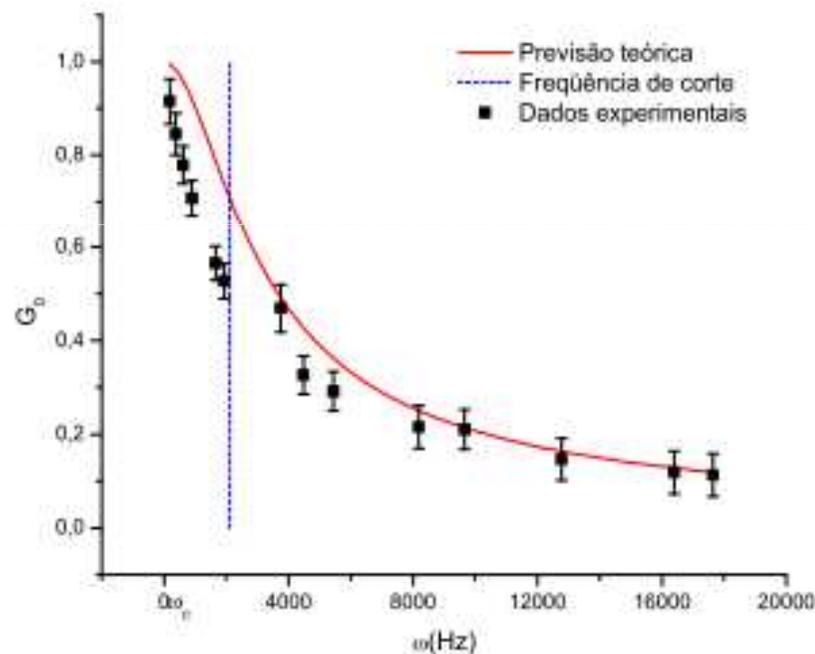
# Comparar Medidas e Teoria

## Filtro RC

- Gráfico de  $G_0$  em função de  $\omega$ 
  - Comparar com o esperado teoricamente

O que significa comparar com a teoria ?

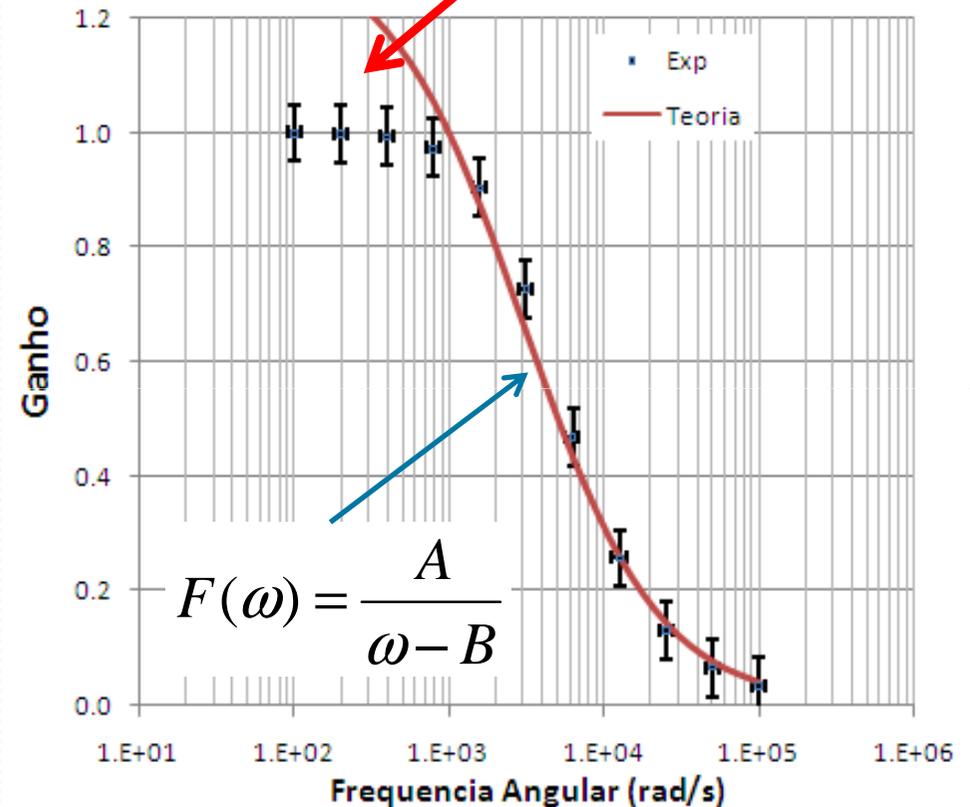
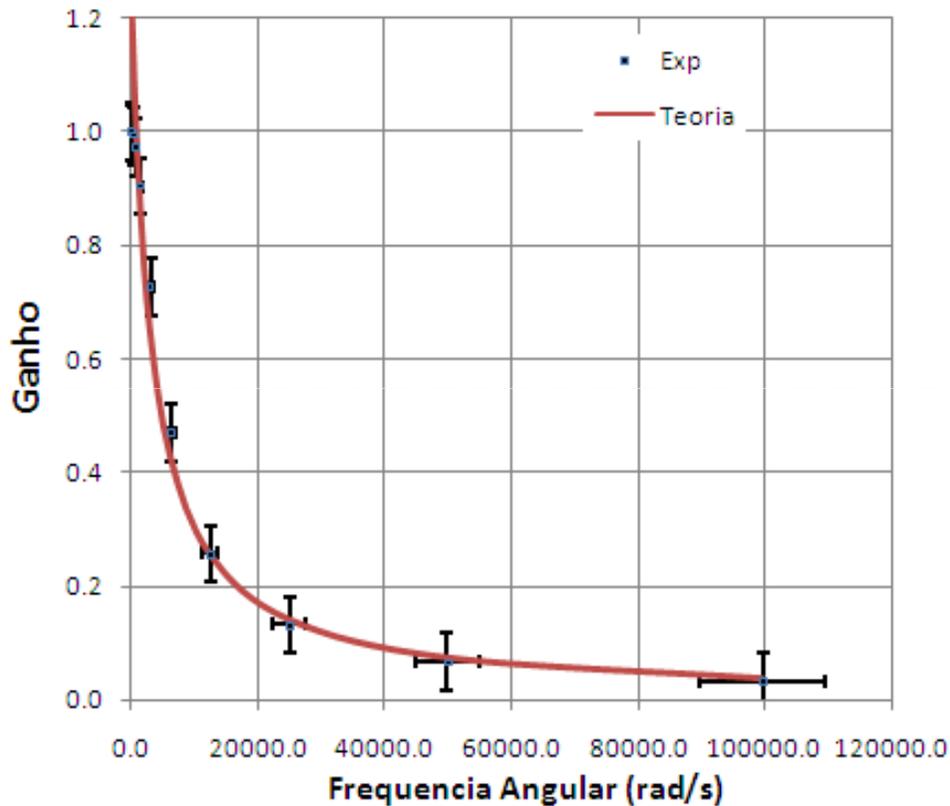
Será que uma comparação visual é suficiente ?



# Comparação Visual

- Este ajuste está:
  - Bom ?
  - Muito bom ?
  - Perfeito?

Mesmo gráfico mas na escala apropriada. Completamente errado para baixas frequências!



Que outros métodos aprendemos nos lab1, 2 e 3 ?

# Comparar Medidas e Teoria

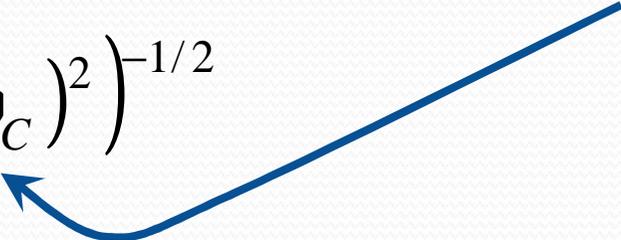
- Ajustar os dados à função desejada
  - Comparar o valor experimental de  $\omega_c$  com aquele esperado teoricamente

$$\omega_c^{\text{exp}} \text{ é compatível com } \omega_c = \frac{1}{RC} \quad ??$$

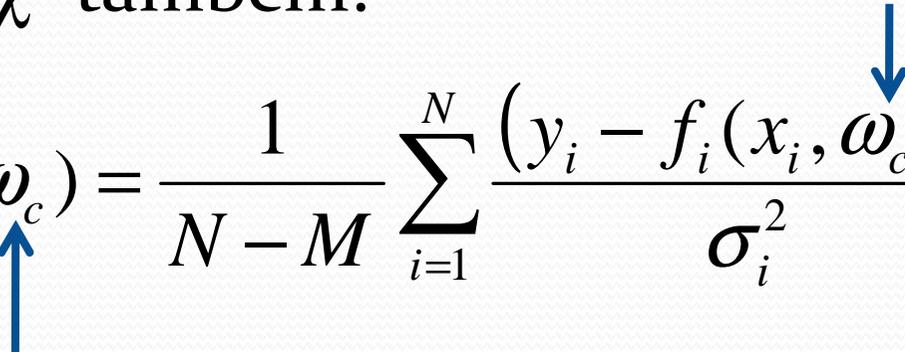
- Para a comparação fazer sentido, o erro em  $\omega_c^{\text{exp}}$  deve ser pequeno. Como assegurar isso?
  - Tomada de dados  $\Rightarrow$  Escolher como fazer as medidas
  - Quantos pontos? Em que região medir? Porque?

# Mínimos Quadrados

- Neste caso, nossa função só tem  $M=1$  parâmetros:

$$G_0(\omega) = \left(1 + (\omega / \omega_c)^2\right)^{-1/2}$$


- Portanto o  $\chi^2$  também:

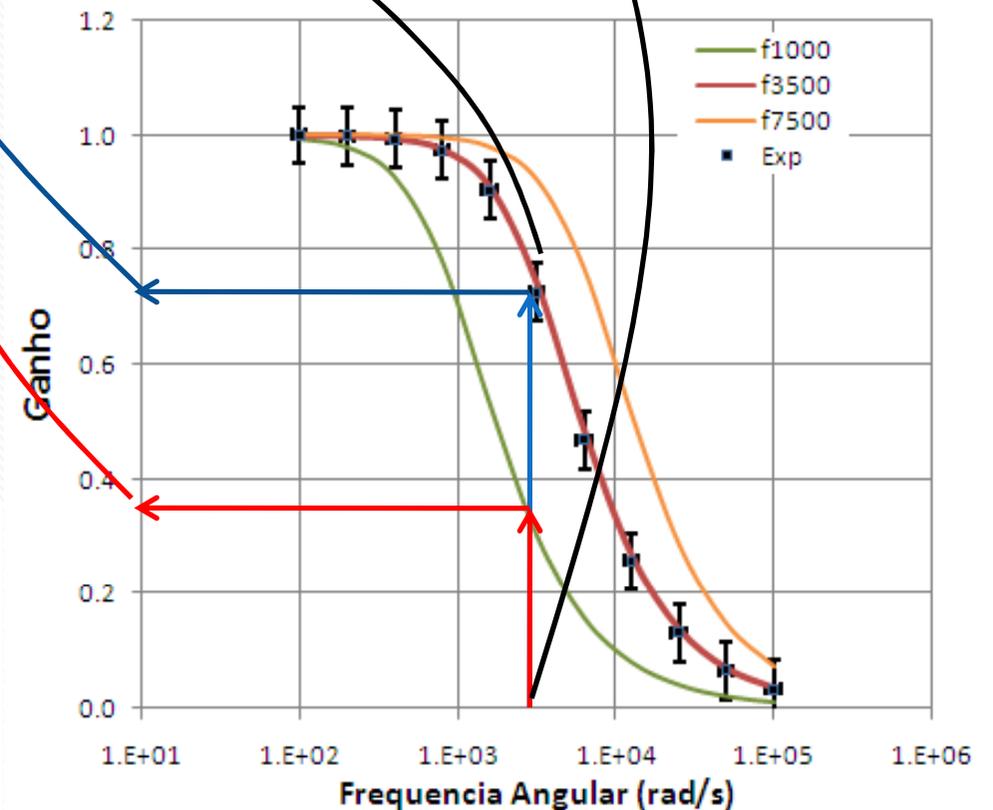
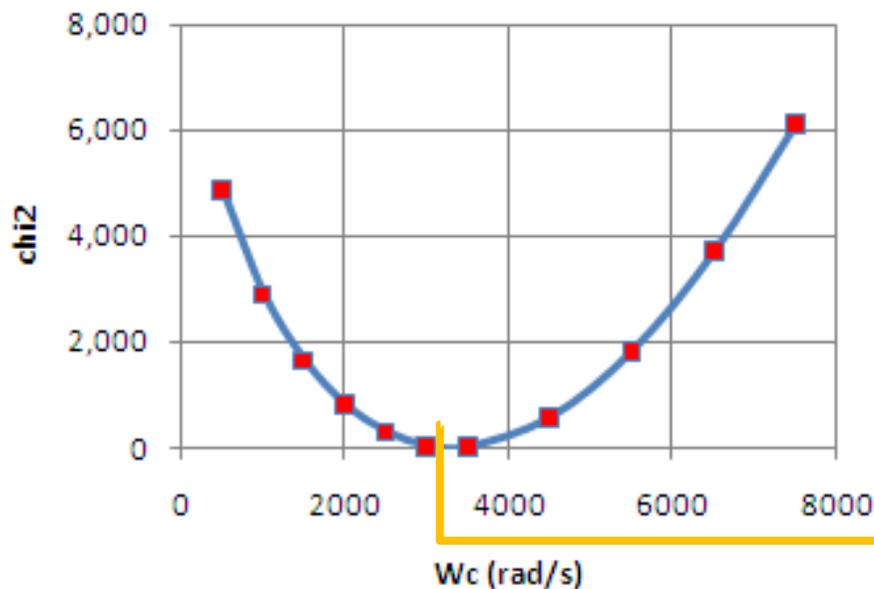
$$\chi^2(\omega_c) = \frac{1}{N - M} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f_i(x_i, \omega_c))^2}{\sigma_i^2}$$


- Além disso, como  $\chi^2$  depende dos erros  $\sigma_i$ , ele também é uma variável aleatória. O interessante é que sua média vale 1 e sua variância vale 2.
  - **Os erros precisam ser gaussianos e independentes!**

# Analizando $\chi^2$

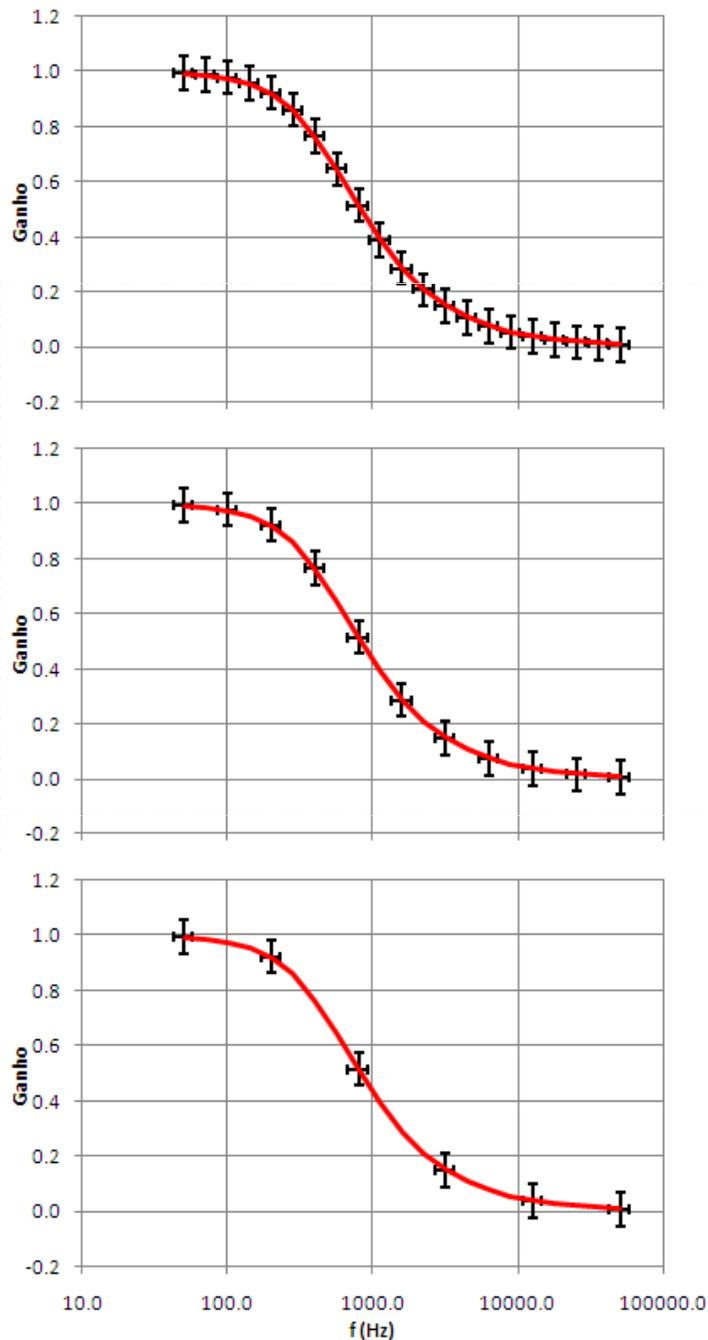
$$\chi^2(\omega_c) = \frac{1}{N - M} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f_i(x_i, \omega_c))^2}{\sigma_i^2}$$

Repetindo o processo para vários valores diferentes de  $\omega_c$ , podemos construir um gráfico de  $\chi^2$  x  $\omega_c$ .

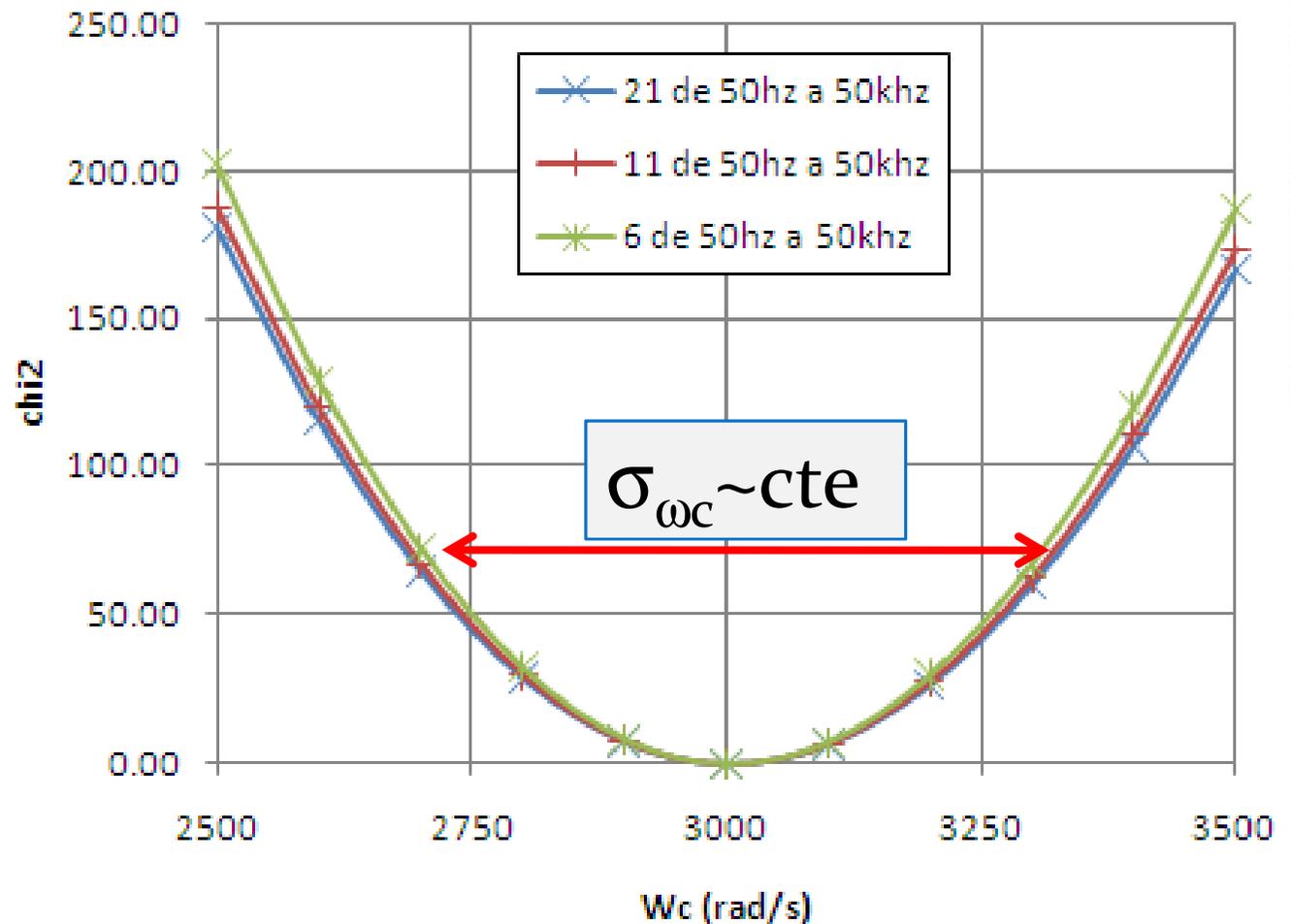


Escolhemos o  $\omega_c$  que minimiza o  $\chi^2$

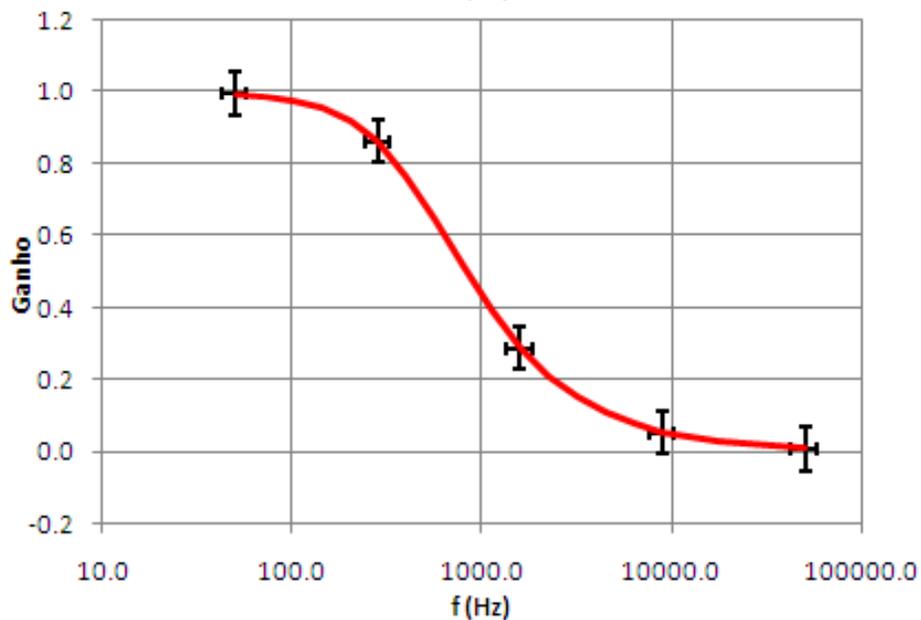
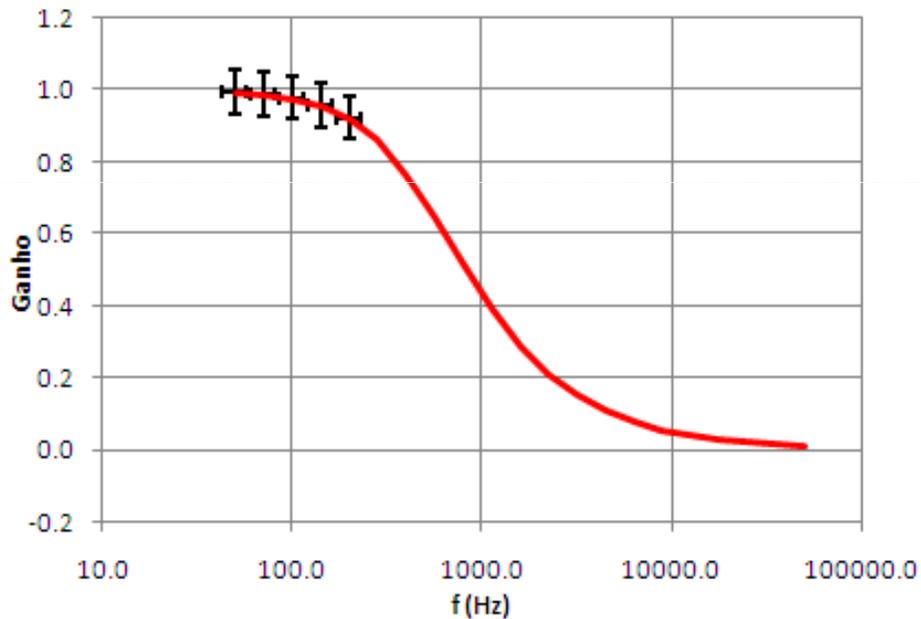
# Número de Pontos?



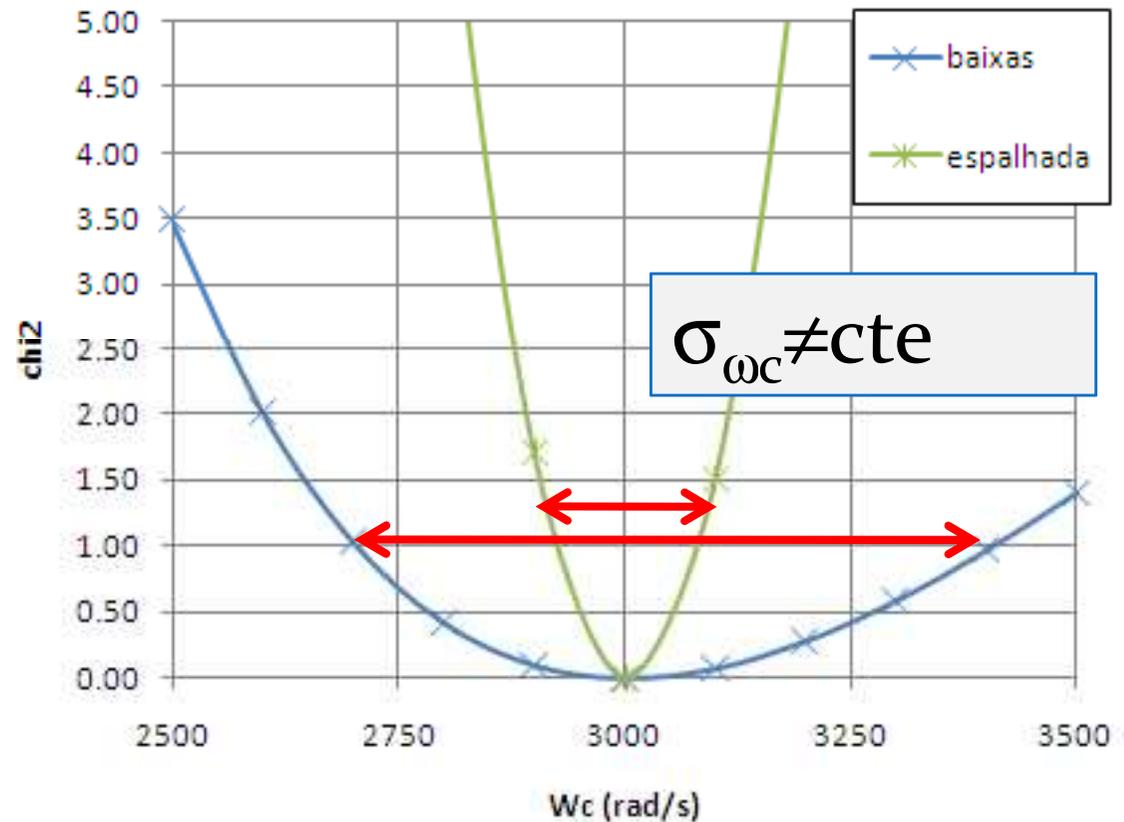
Pode-se tomar poucos pontos, desde que eles estejam suficientemente distribuídos ao longo da região em que a função varia!



# Que região medir?



Analisando a distribuição  $\chi^2$  pode-se determinar que região medir e como espaçar os dados coletados!





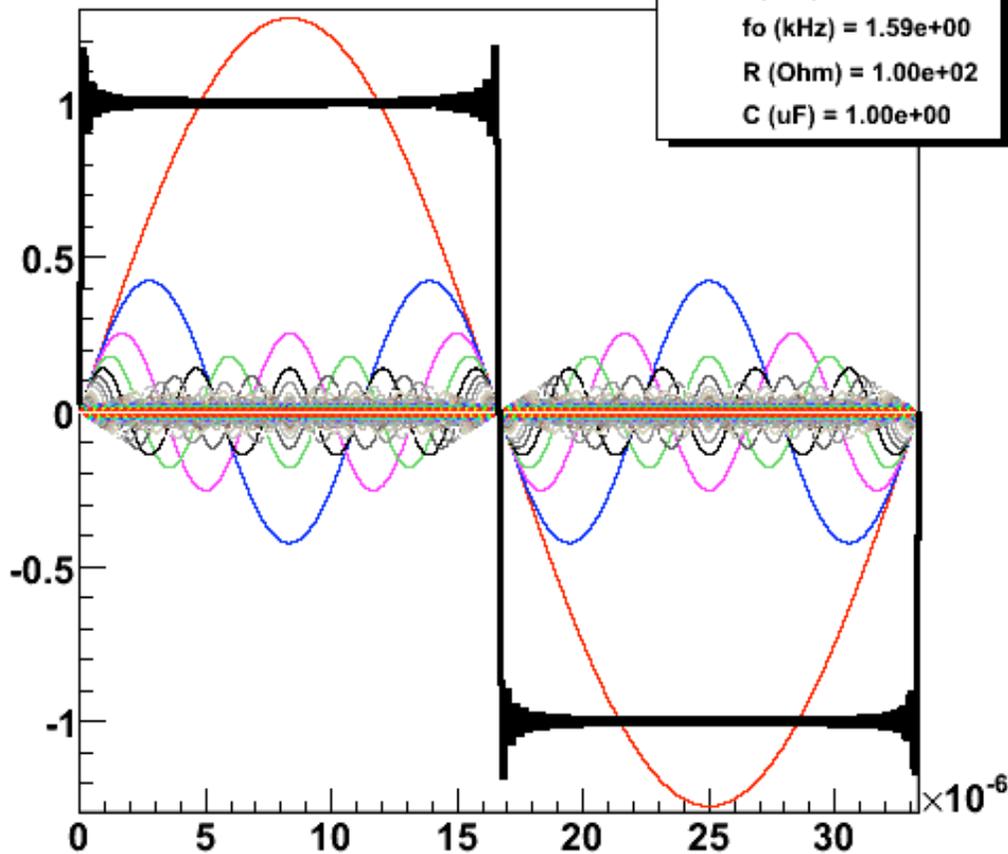
# Discussão extra

## 2. Fourier

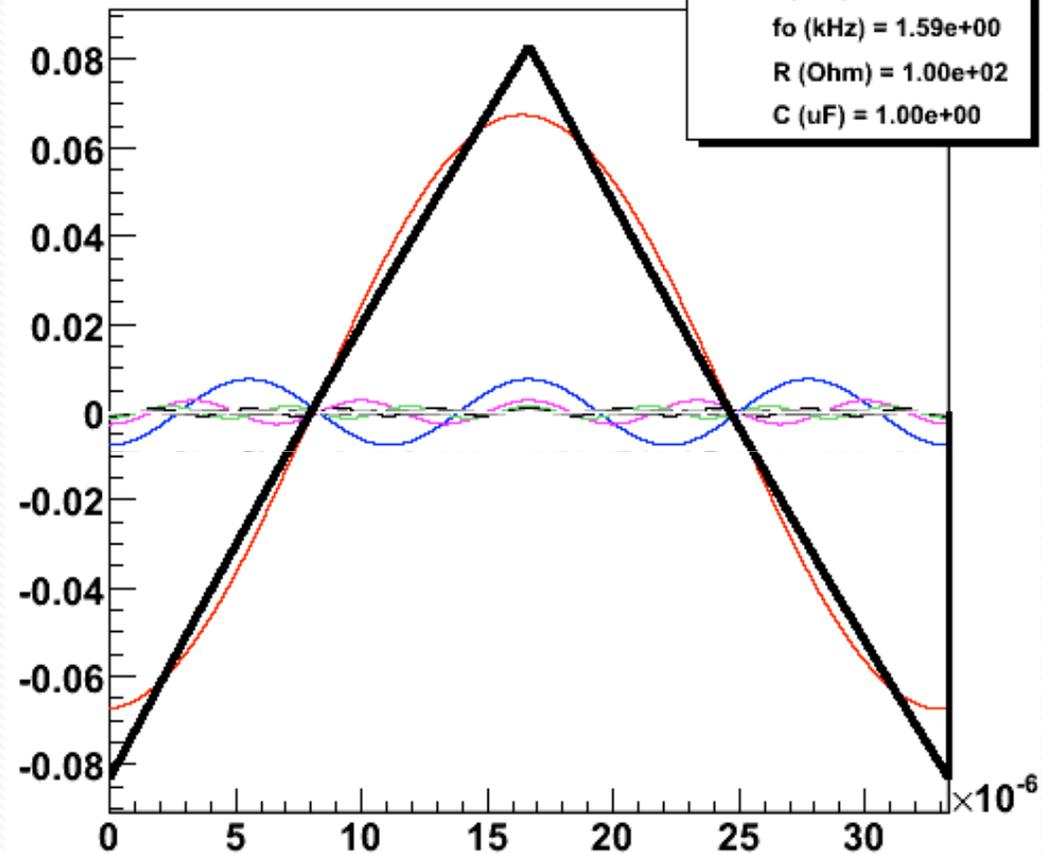
# Filtro RC ( $R=1$ , $C=1\mu\text{F}$ ) $F_c \sim 1.5\text{kHz}$

30000Hz

Onda quadrada N = 100



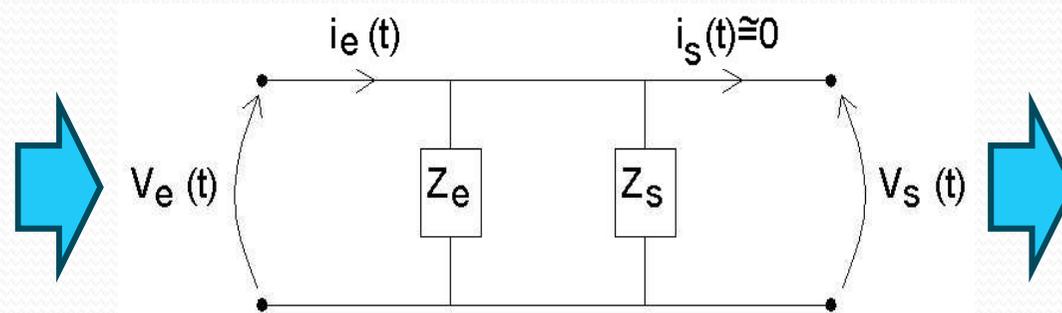
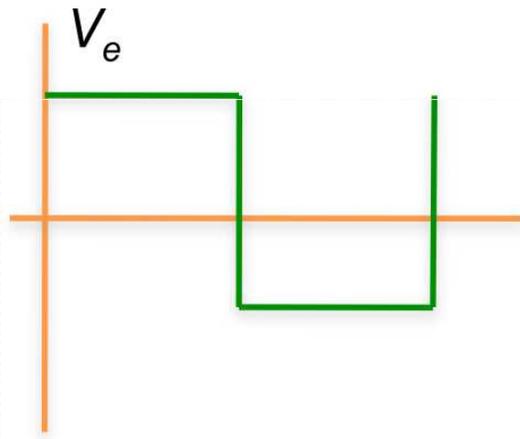
Onda quadrada apos filtro RC N = 100



# Resultado

- Nessa série de imagens o que vemos é:
  - À medida que aumentamos a frequência, o circuito passou de um bom filtro passa-baixa a um bom integrador.
- E isso foi simulado com um programa que:
  - decompõe a onda quadrada da entrada numa série de Fourier
  - aplica a cada componente da onda quadrada o ganho e a fase
  - soma tudo e recompõe a onda na saída.
- Então podemos simular o que o circuito **RC** escolhido faz com um algoritmo, graças a Fourier

# Exemplo: Onda quadrada



?

$$V_e = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t) + \\ \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t) + \\ \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t) + \\ \dots \end{cases}$$



$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}(-\omega/\omega_c)$$



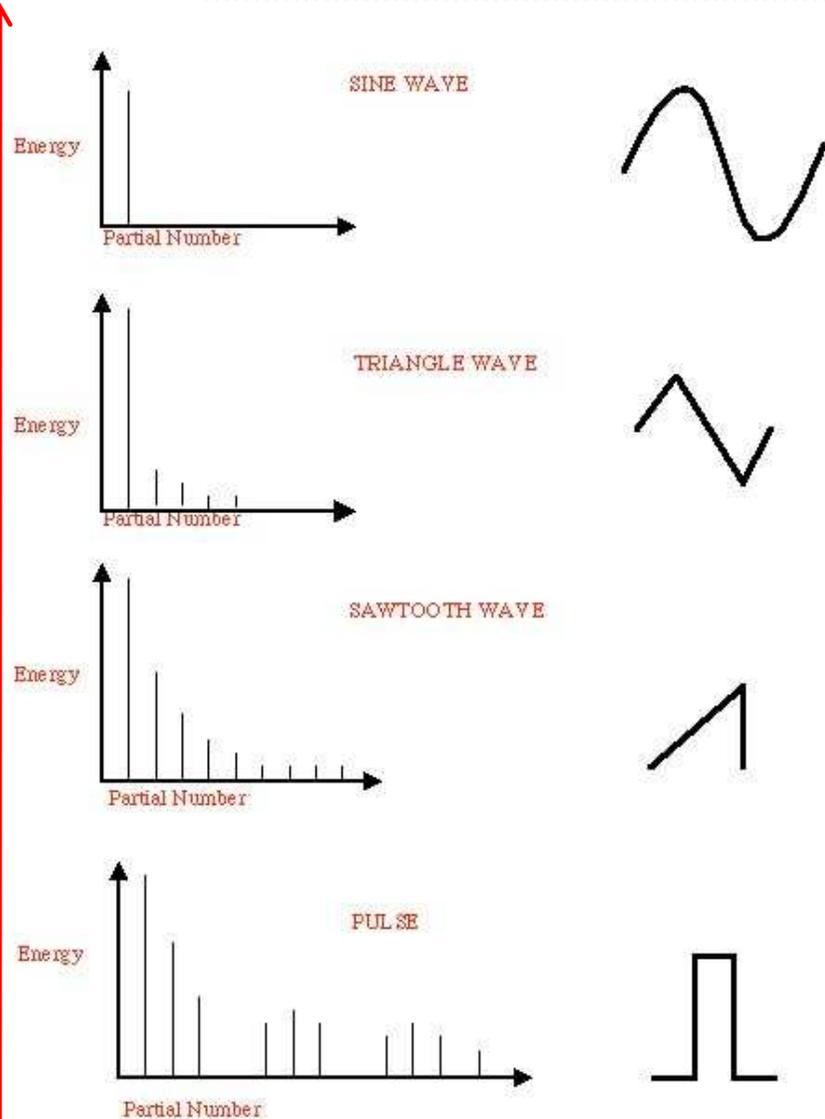
$$V_s = \begin{cases} G_\omega \frac{4V_0}{\pi} \sin(\omega t + \phi_\omega) + \\ G_{3\omega} \frac{4V_0}{3\pi} \sin(3\omega t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega} \frac{4V_0}{5\pi} \sin(5\omega t + \phi_{5\omega}) + \\ \dots \end{cases}$$

# Como Analisar as Frequências de um Sinal

- Análise de Fourier ou transformada de Fourier
  - É um gráfico no qual o eixo-X representa a frequência da componente de Fourier e o eixo-Y mostra a amplitude daquela componente
  - Deste modo pode-se ver claramente qual a contribuição de cada harmônica para o sinal final e podemos projetar os circuitos com o mínimo de interferência
  - Abre inúmeras possibilidades para tratamento de sinais e imagens.
- Métodos numéricos de obtenção para sinais discretos
  - FFT " Fast Fourier Transform

# Como encontrar a série de Fourier para um sinal?

Amp (V)



Um seno puro só tem uma frequência, então sua transformada é uma função delta de Dirac!

Transformada direta:

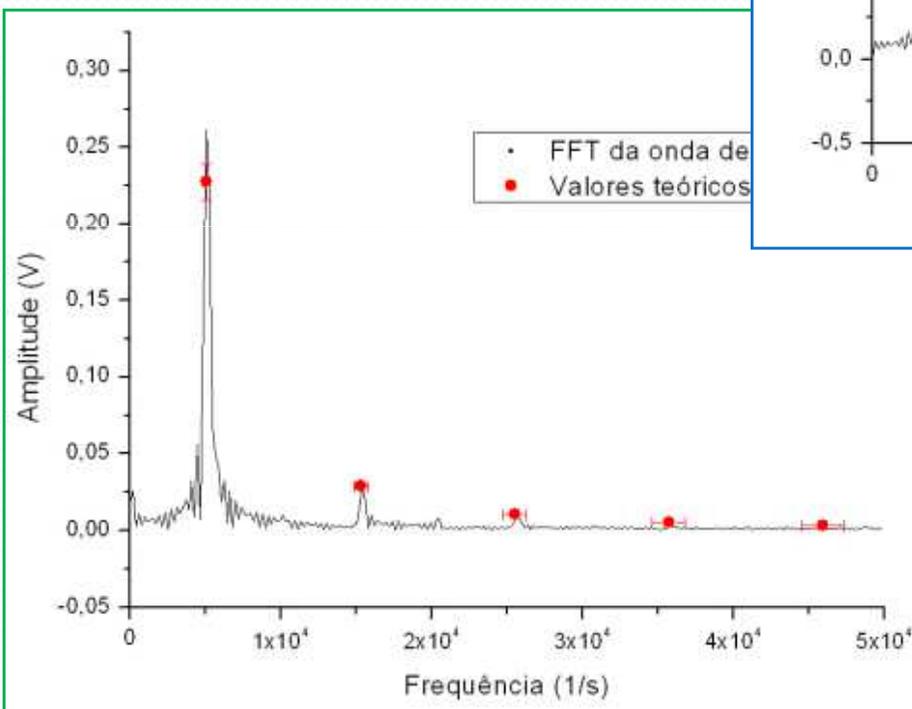
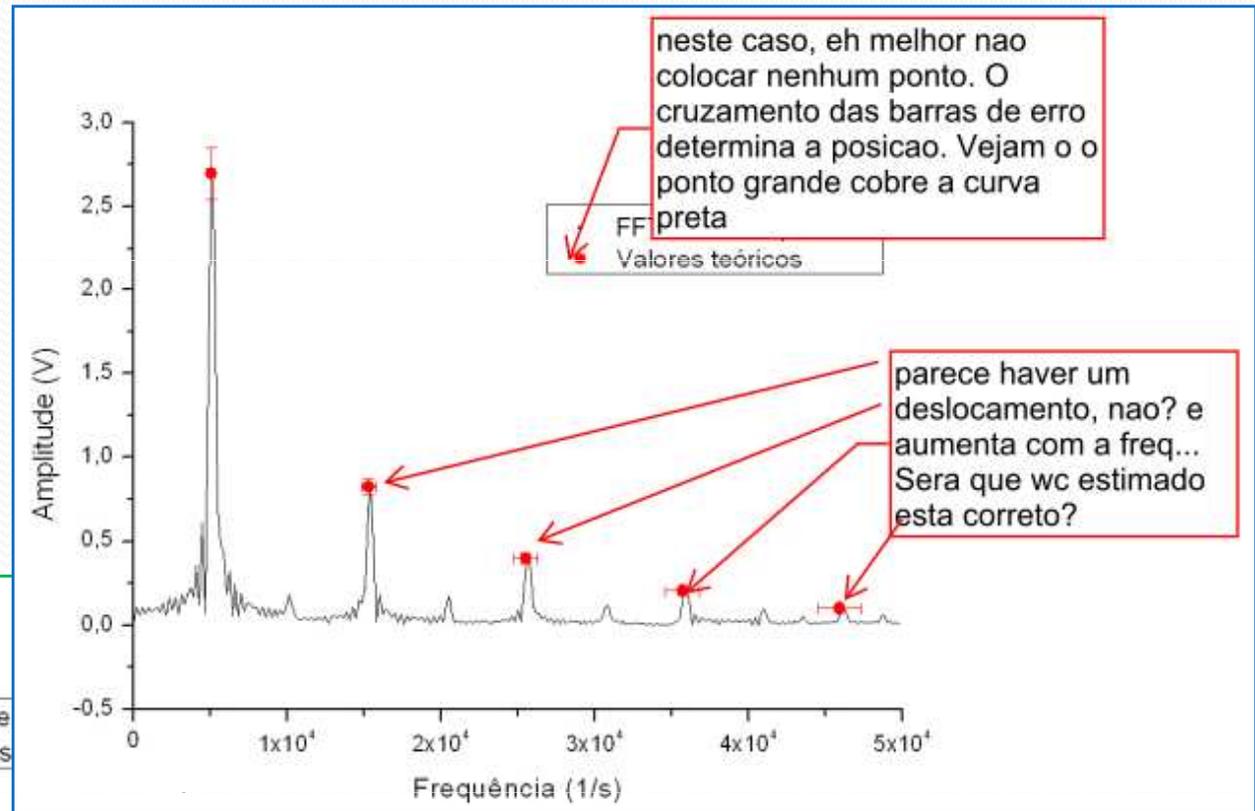
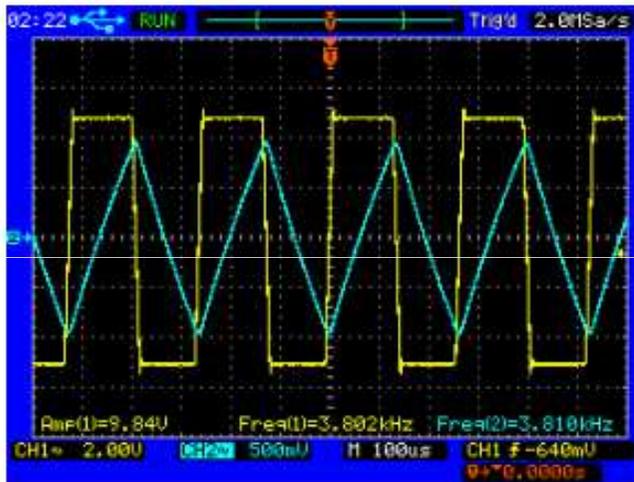
$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Transformada inversa:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

f (Hz)

# Resultado do ano passado



$$Quad(t) = V_0 \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

$$Trian(t) = V_0 \frac{8}{\pi^2} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{9} + \frac{\sin(5\omega t)}{25} + \dots \right]$$



# Discussão extra

## 3. Potência dissipada

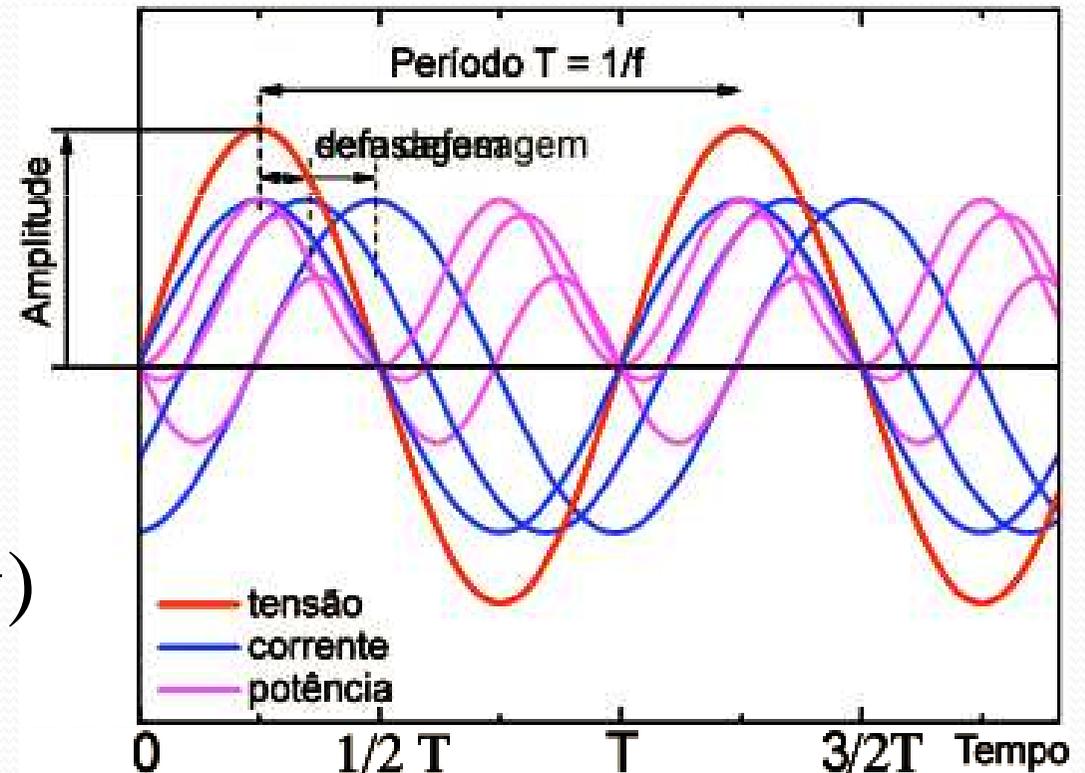
# Potência Instantânea

- Instantaneamente:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = V_P i_0$$

$$\sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t)$$



- Depende da fase entre corrente e tensão e pode ser negativa!

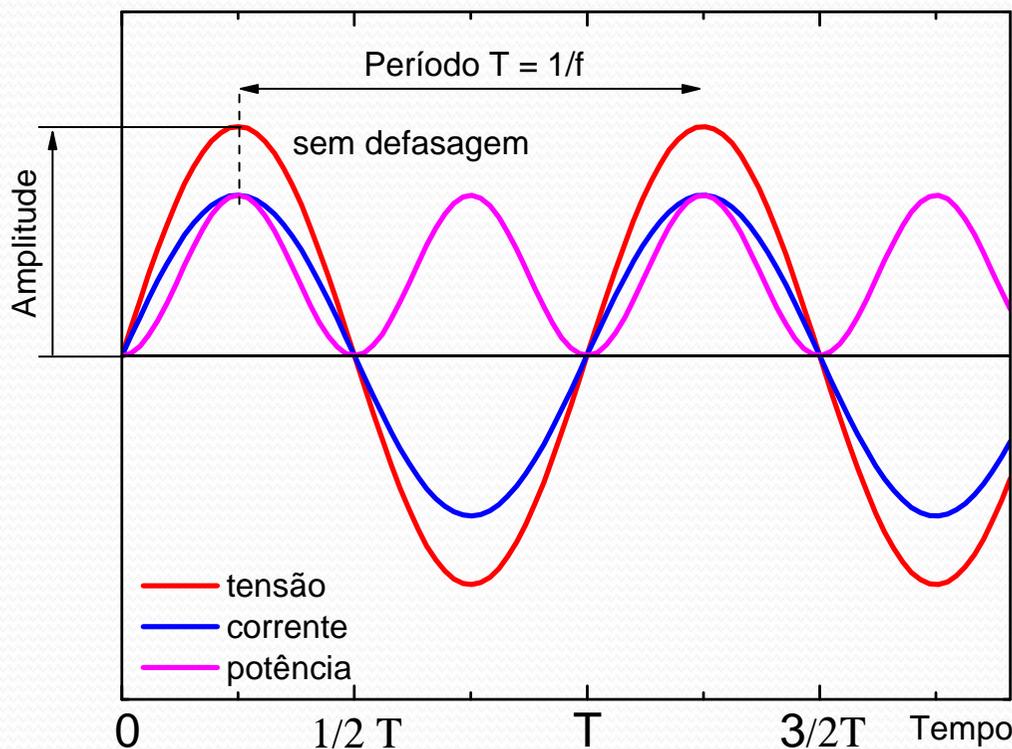
Potência positiva é aquela consumida

Potência negativa é aquela fornecida

# Exemplo 1: Resistor Ôhmico

- A potência instantânea é:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = R \cdot i_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) > 0, \text{ sempre}$$

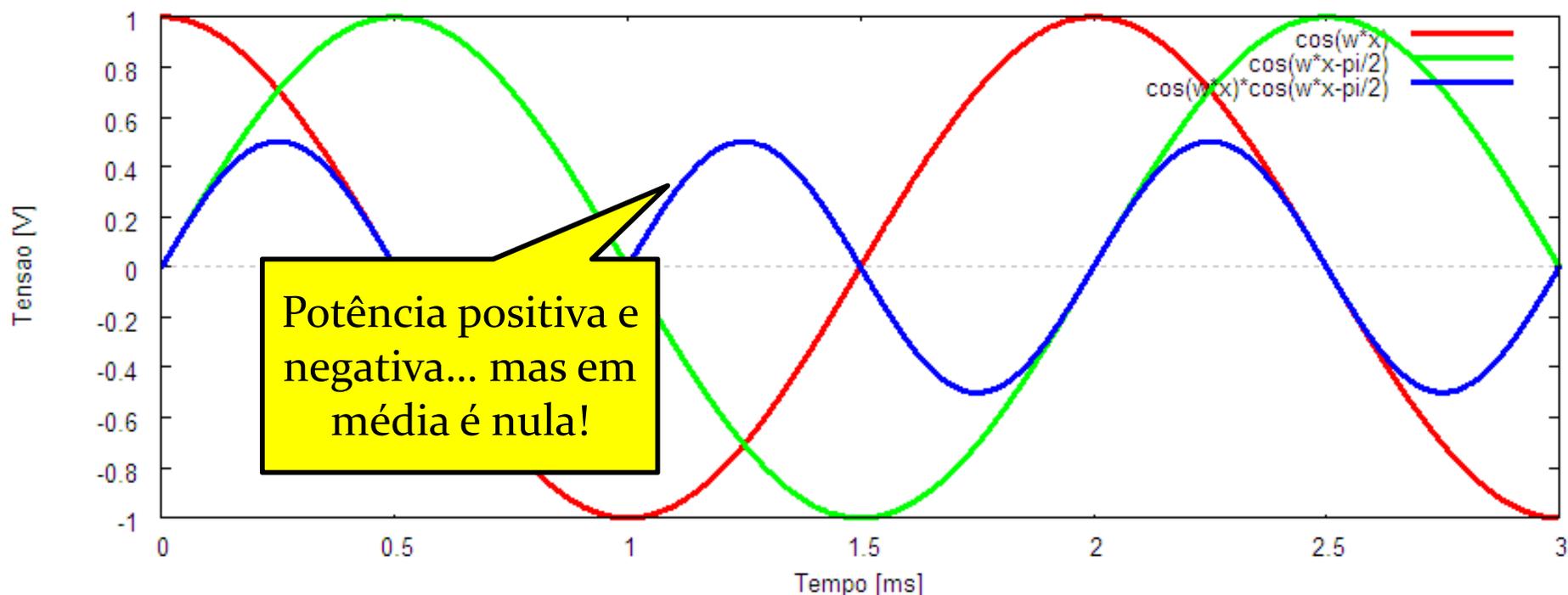


- A potência varia no tempo, mas é sempre positiva o que significa que **o resistor sempre consome potência**

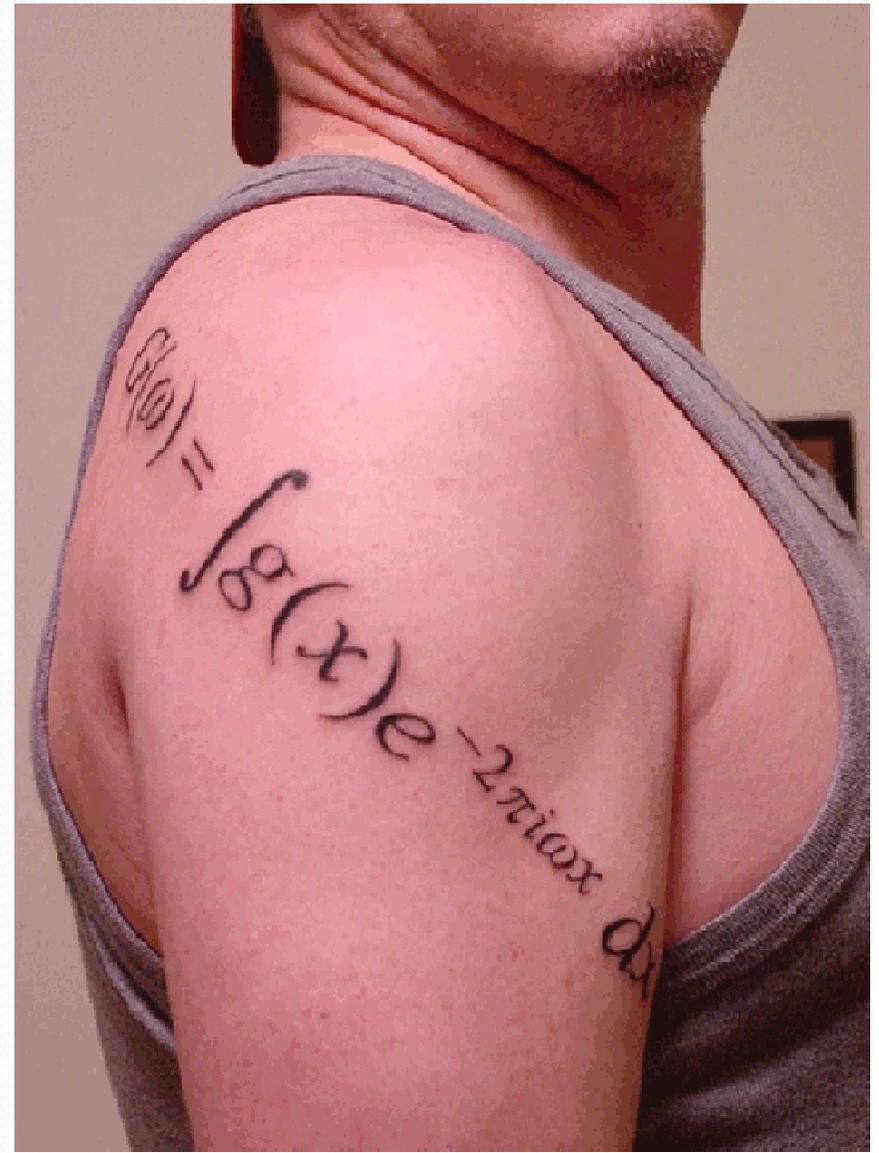
# Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como:

$$P(t) = i_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



# Esta Semana...



# Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados
- 4 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e Análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

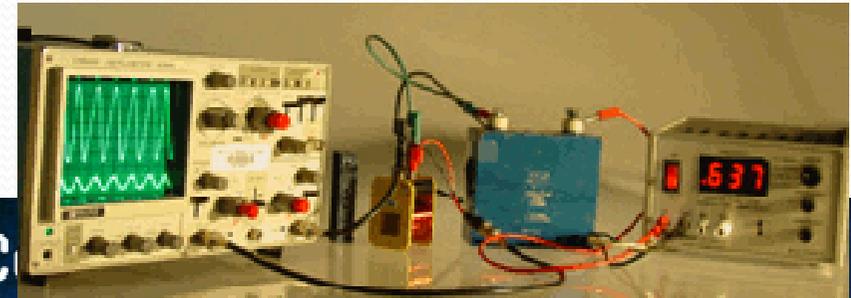
# Ressonância em Circuito RLC



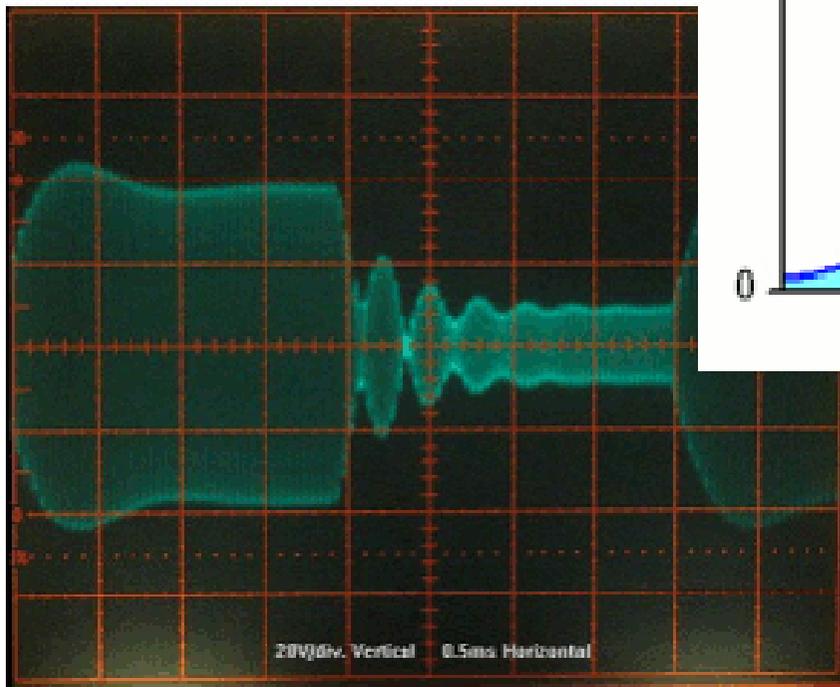
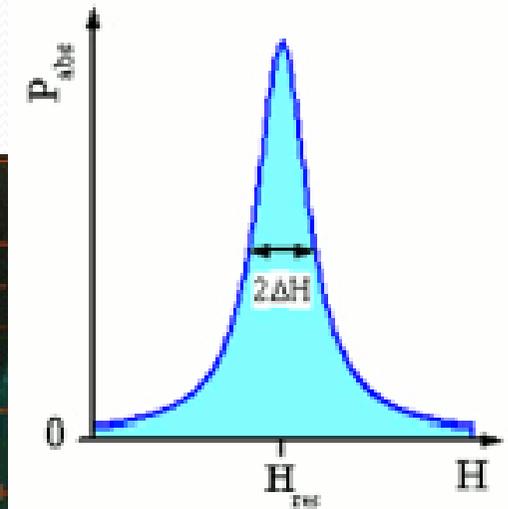
- **Ressonância:**

ocorre em todo tipo de fenômeno ondulatório

- ondas mecânicas
  - Em todo tipo de meio
- Ondas eletromagnéticas



C  
Mixed by  
**Dekker**



# O Indutor



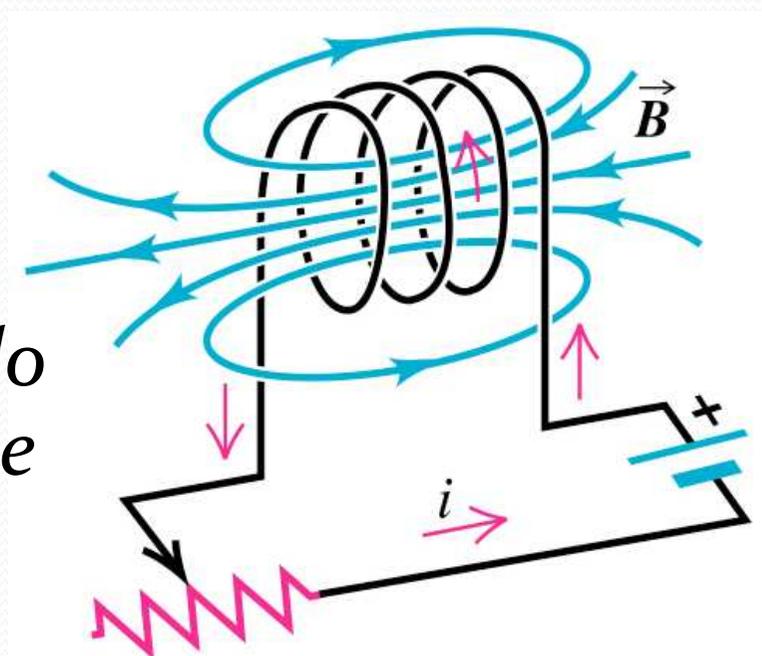
- Ao passar uma corrente elétrica por um indutor, um campo magnético é criado proporcional a corrente

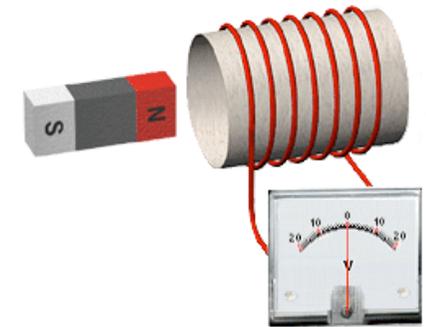
$$B \propto i$$

- Se a corrente for variável no tempo, o campo também será! O que nos faz lembrar da lei de Faraday:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

*A tensão elétrica  $\mathcal{E}_L$  nos terminais do indutor é proporcional à variação de fluxo magnético através dele.*





Kieran Mckenzie

# O Indutor

- Como a única coisa que varia é a corrente:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -cte\frac{di(t)}{dt}$$

- Vamos chamar a constante de **L**, ou indutância, e a força eletromotriz induzida,  $\mathcal{E}_L$ , que é a queda de tensão no indutor, será  $V_L$ :

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

L é a indutância, medida em Henry (H)

- Em notação complexa, a corrente passando pelo indutor é:

$$\hat{i} = i_L e^{j\omega t}$$

# Indutor – Notação Complexa

- E a tensão será então:

$$V_L = L \frac{di}{dt} = j\omega L i_L e^{j\omega t}$$

- Assim a impedância é dada por:

$$\hat{Z}_L = \frac{\hat{V}_L(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{j\omega L i_L e^{j\omega t}}{i_L e^{j\omega t}} = j\omega L$$

Reatância indutiva

- Ou, usando a fórmula de Euler:

$$\hat{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Portanto a tensão está adiantada de  $\pi/2$  em relação a corrente

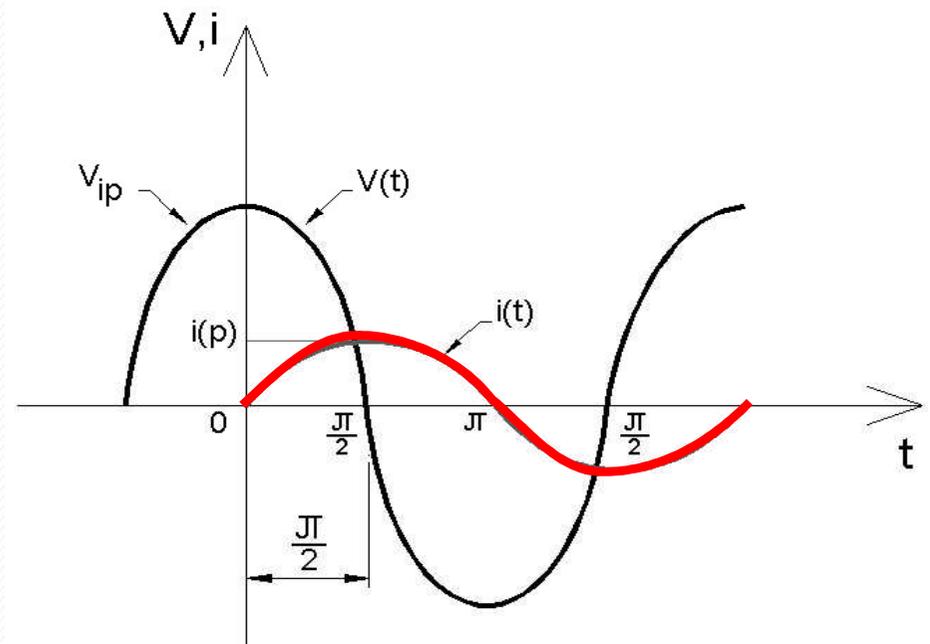
# A fase da tensão

Corrente:  $\hat{i}(t) = i_L e^{j\omega t}$

- Indutor:

$$\hat{V}_L(t) = \hat{Z}_L \hat{i}(t) \quad \text{adiantada}$$

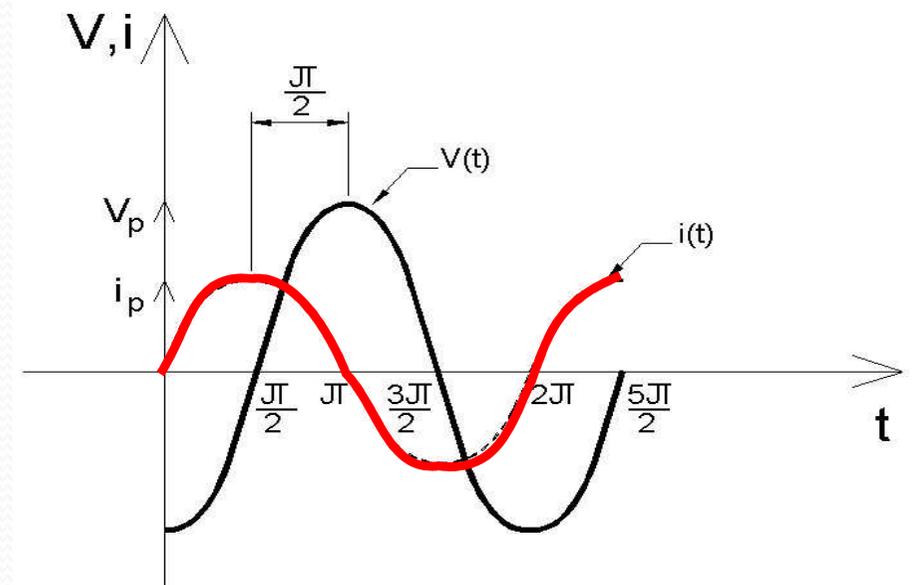
$$= \omega L i_L \exp \left[ j \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$



- Como era no capacitor?

$$\hat{V}_C(t) = \hat{Z}_C \hat{i}(t) \quad \text{atrasada}$$

$$= \frac{1}{\omega C} i_c \exp \left[ j \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

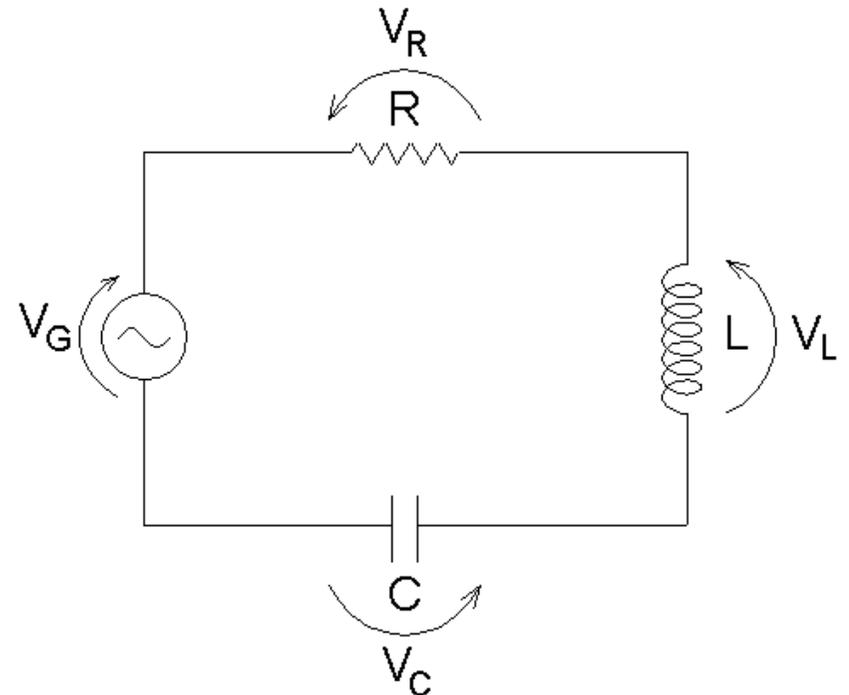


# Circuito RLC

- Já sabíamos tudo sobre capacitores
- Agora sabemos tudo sobre indutores

O próximo passo é óbvio... Vamos juntar tudo!

Dado um sinal de entrada  $V_g(t)$ , qual a tensão em cada um dos elementos e qual a corrente no circuito?



# Circuito RLC

A equação básica é:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = V_G(t)$$

No indutor temos:

$$V_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$$

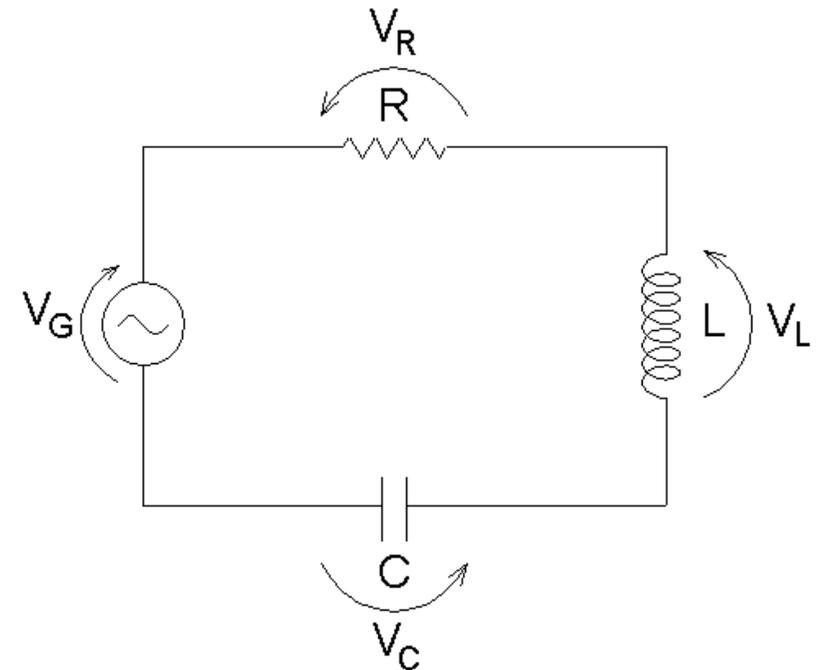
No resistor temos:

$$V_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$$

No capacitor temos:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$V_G(t) = V_0 \cos(\omega t)$$



# A Equação do Circuito RLC

Substituindo tudo na equação se obtém:

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = V_o \cos(\omega t)$$

A solução para  $q(t)$  é a solução geral da homogênea mais uma solução particular da equação acima.

- Solução da homogênea
  - comportamento transitório do circuito (quando ele é ligado ou desligado): oscilador harmônico amortecido
- Solução particular
  - comportamento em regime estacionário, depois que o comportamento transitório desaparece: oscilador forçado

A dedução pode ser encontrada no capítulo 2 de Mecânica de K. R. Symon e nas notas de aula do curso FAP-212, aulas 4 e 5.

# Caminho mais fácil...

- Como é um **circuito em série** a impedância complexa total do circuito é a soma das impedâncias complexas de cada elemento:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- A **impedância real** será:

$$Z = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- E a **fase** será:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{Im}[\hat{Z}]}{\operatorname{Re}[\hat{Z}]} = \omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}$$

$$\hat{Z} = Ze^{j\phi}$$

# A Corrente no Circuito RLC

- Sendo a tensão de entrada:  $\hat{V}_G = V_G e^{j\omega t}$
- A corrente pode ser escrito como:

$$\hat{i} = \frac{\hat{V}_G}{\hat{Z}} = i_0 e^{j(\omega t - \phi_i)}$$

- Portanto:

$$\hat{i} = \frac{V_G e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V_G}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

A fase da corrente ( $\phi_i$ ) vem da impedância total ( $\phi$ ).

# Tensões Nos Elementos

- Agora o problema está resolvido, pois como a corrente é a mesma em todo o circuito, podemos calcular a tensão no:

- Resistor:

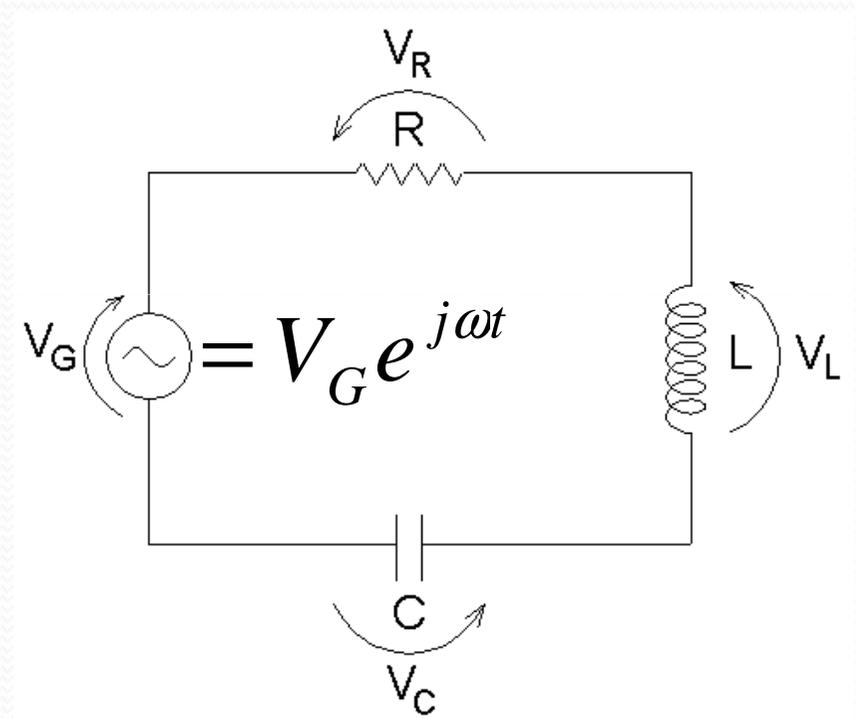
$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

- Capacitor

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

- Indutor:

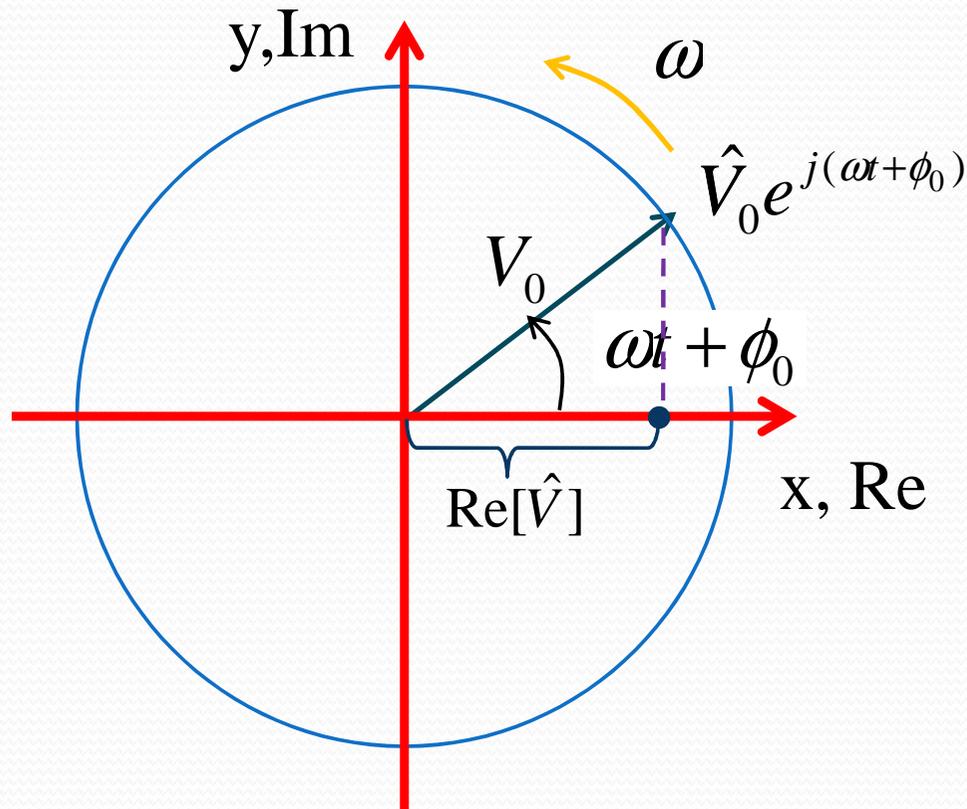
$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$



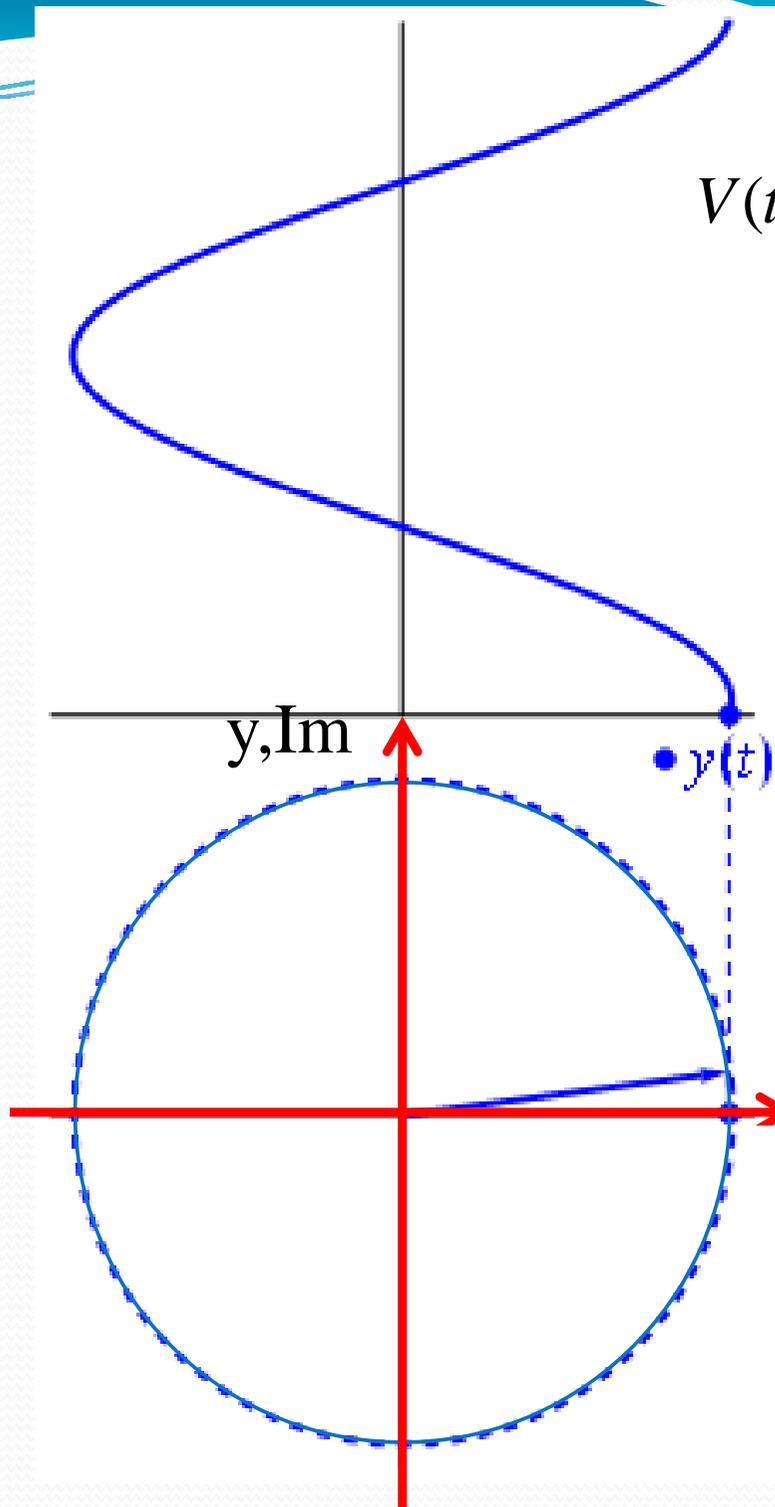
# Fasores e Correntes Alternadas

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V(t) &= \text{Re}(\hat{V}(t)) \\ &= V_0 \cos(\omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

- Mas o que esta acontecendo realmente?
  - O número complexo  $V(t)$  muda de posição no plano complexo com o passar do tempo (mov. Circular uniforme).

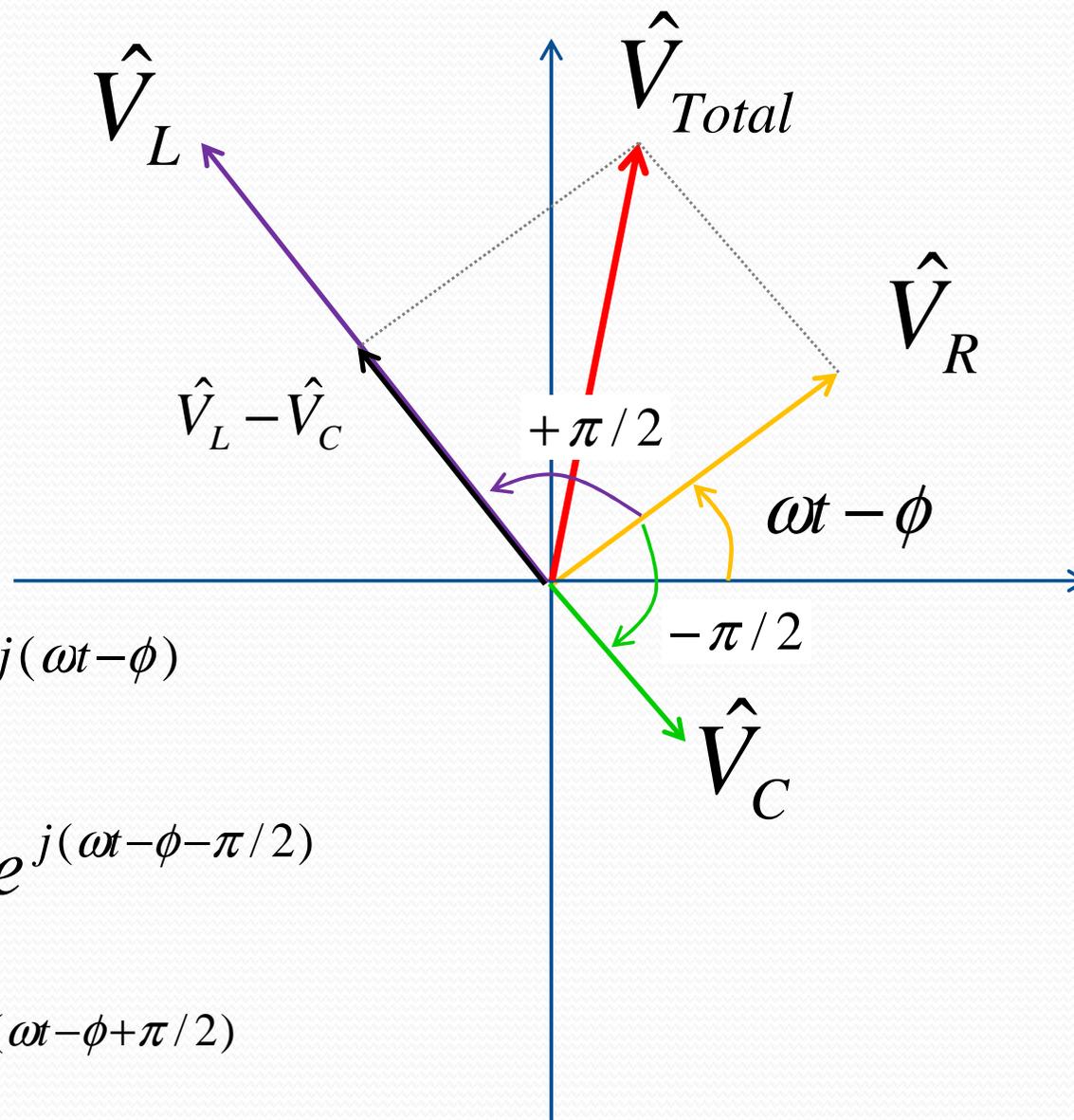


$$V(t) = \text{Re}(\hat{V}(t)) \\ = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$



# Fasores e o Circuito RLC

- Mas e o capacitor e o indutor??



$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$

# Ressonância em Corrente

- Algo passou quase despercebido.
  - A amplitude da corrente (e de todas as tensões) depende de uma maneira bastante peculiar da frequência.

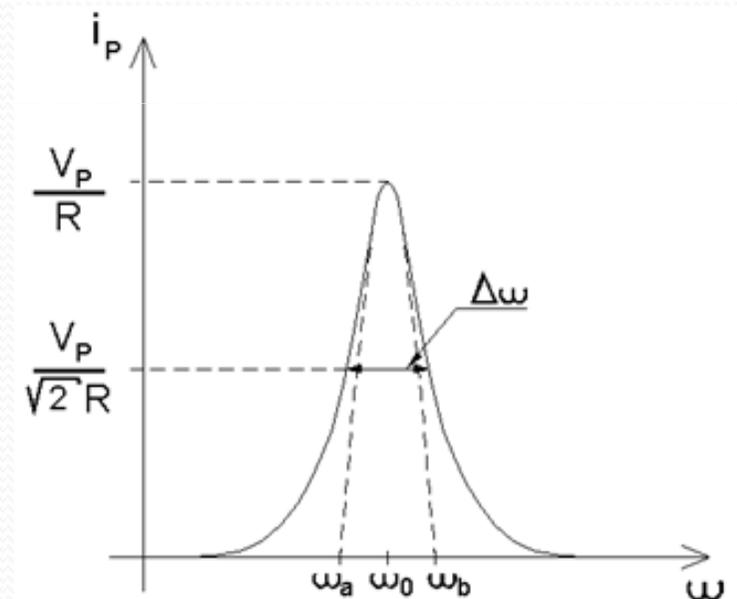
$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- A corrente é máxima quando:

$$\frac{di_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ e } \phi = 0$$

- **O circuito RLC é ressonante!**



# Ressonância em Carga

- Para a carga (tensão no capacitor) é diferente:

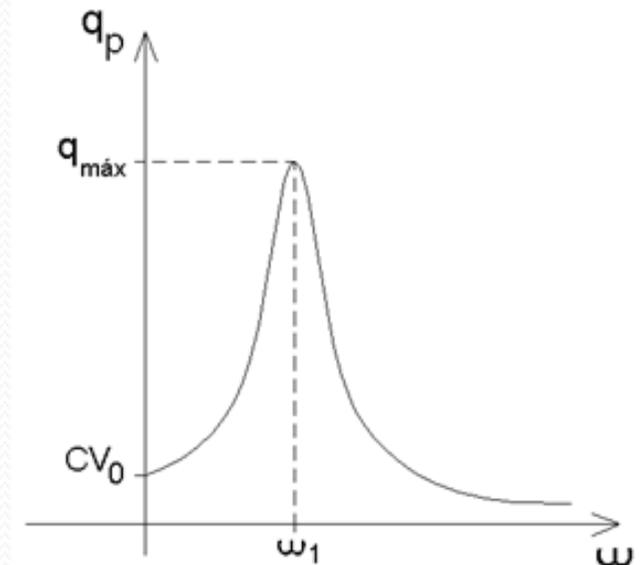
$$V_{C0} = \frac{i_0}{\omega C} = \frac{V_G}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- A tensão é máxima quando,  $dV_{C0} / d\omega = 0$ , portanto:

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[ \omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right] = 0$$

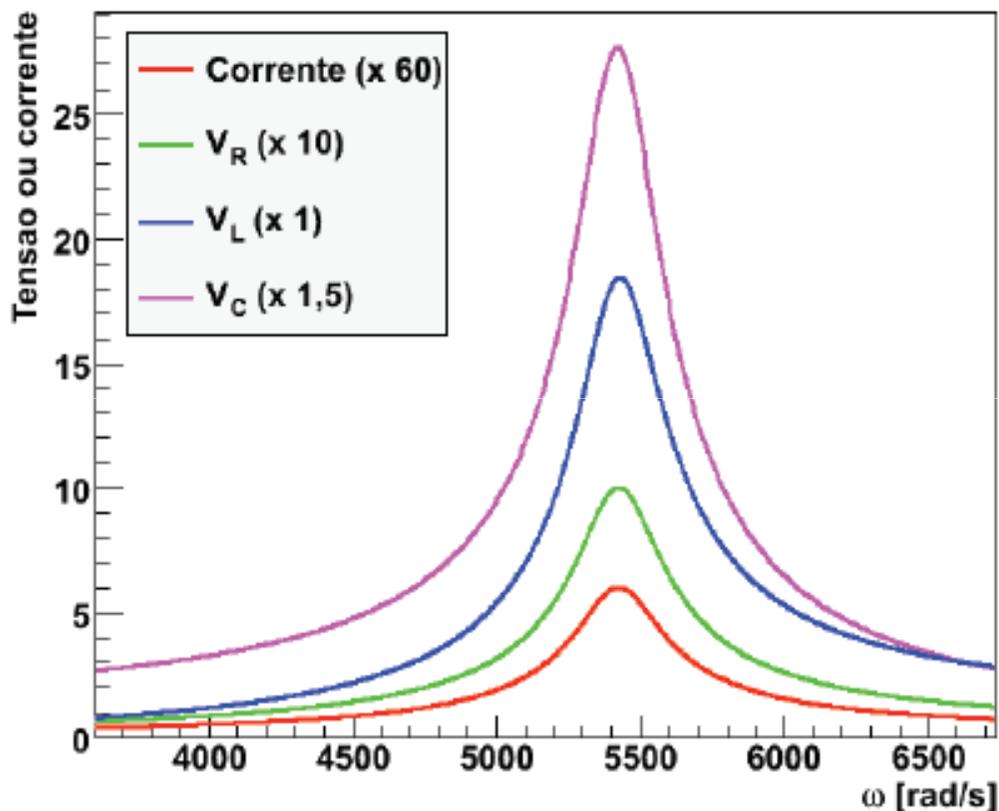
$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$

- O capacitor tem carga para  $\omega=0$
- As freq. de ressonância são diferentes!
- Pergunta: podemos medir essa diferença?



# Ressonância: Circuito RLC

- As tensões e correntes têm um máximo num valor definido  $\Rightarrow$  Ressonância



- O que define a posição são as constantes (R, L e C)
- A posição dos máximos não são necessariamente a mesma para todos os sinais (verifiquem o valor para a tensão no indutor)
- Mas o que define a altura e a largura dessas curvas?

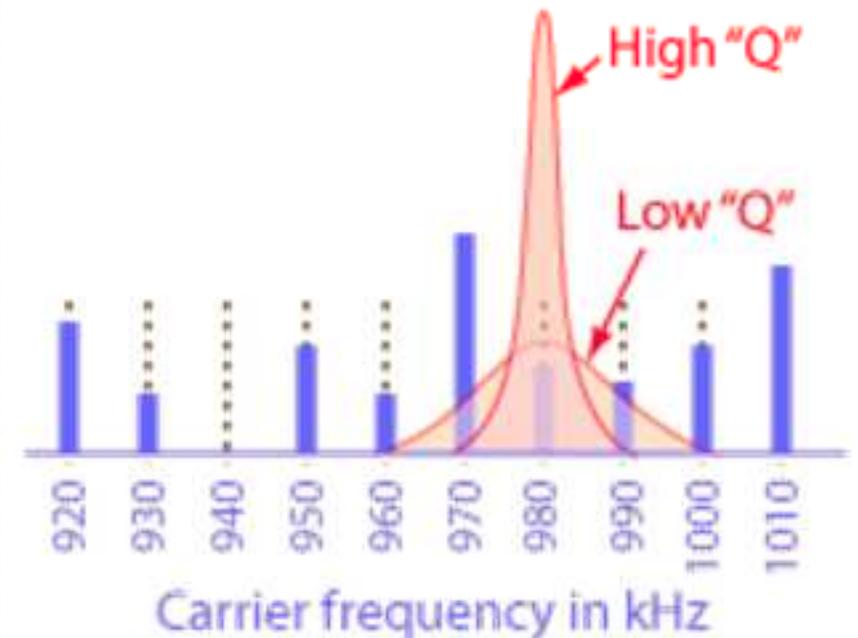
# Fator de Qualidade

- Um rádio AM usa um circuitos ressonantes RLC para selecionar a estação.
- A seleção tem que conseguir separar estações vizinhas, sem perder o sinal da estação que se quer ouvir.
- Os engenheiros definiram o fator de qualidade:

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = 2\pi \left[ \frac{U}{\Delta U} \right]_{\text{ressonância}}$$

U = Energia armazenada por ciclo

$\Delta U$  = Energia dissipada por ciclo



# Fator de Qualidade

- Fator de qualidade do circuito:

$$Q = 2\pi \left[ \frac{U}{\Delta U} \right]_{res} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \text{Largura em}$$

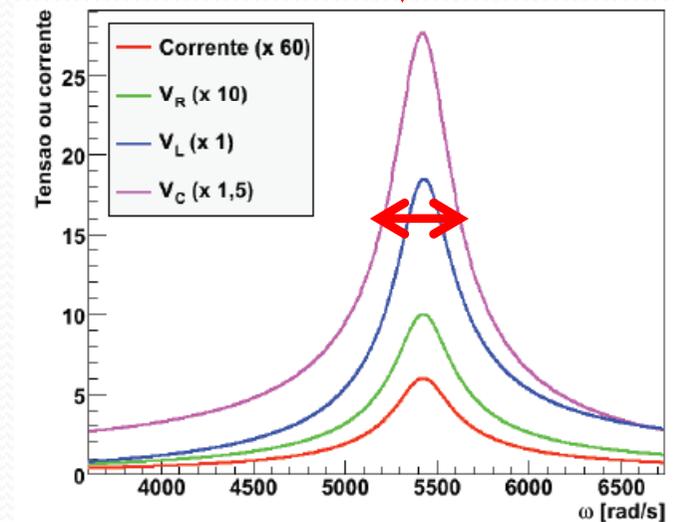
$$\begin{cases} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \text{ (curva } i \times \omega) \\ \frac{P_0}{2} \text{ (curva Pot } \times \omega) \end{cases}$$

- $U$  é a energia armazenada no circuito na condição de ressonância:

$$U = \frac{1}{2} Li_0^2 = \frac{1}{2} CV_{C0}^2$$

- $\Delta U$  é a energia dissipada pelo circuito durante um período de oscilação:

$$\Delta U = \bar{P}T = \frac{1}{2} Ri_0^2 T$$

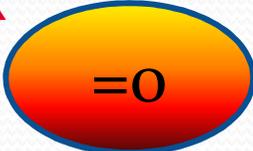


# Potência

- A potência entregue a um bipolo é o produto entre a tensão e a corrente.

$$\begin{aligned}P(t) &= V(t) \cdot i(t) \\ &= V_P \cos(\omega t) \cdot i_P \cos(\omega t - \phi) \\ &= V_P i_P \frac{1}{2} (\cos(2\omega t - \phi) + \cos(\phi))\end{aligned}$$

- no caso de correntes alternadas, o que vai interessar saber é a potência média dissipada num ciclo, em cada um dos elementos

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(\phi) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} V_P i_P \cos \phi\end{aligned}$$


# Ressonância em Energia

- ▶ Portanto a potência média absorvida pelo circuito **RLC** (veja também a apostila de **Corrente Alternada**) pode ser escrita como:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{G0} i_0 \cos \phi = \frac{V_{G0}^2}{2Z_0} \cos \phi$$

- ▶ Na condição de ressonância,  $\phi=0$  e  $Z_0=R$ , portanto, a potência média **por ciclo** vai ser **máxima**:

$$\bar{P} = \frac{V_{G0}^2}{2R}$$

O máximo da potência ocorre para a mesma frequência em que ocorre a ressonância para a corrente.

A ressonância de corrente é também chamada de ressonância de energia.

# Circuito RLC: Dissipação de Energia

- Você pode verificar isso!
  - Na condição de ressonância de corrente,  $\omega = \omega_0$  e:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow R$$

$$\text{tg } \phi_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \frac{1}{R} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Se  $\phi_0 = 0$ , corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo

- Portanto:

$$V_{G0} = R i_0$$

$V_{G0}$  é a tensão de pico aplicada pelo gerador e  $i_0$  é a corrente de pico no circuito

- Ou seja, se medir  $V_{G0}$  e  $i_0$  na ressonância você descobre qual é a resistência total, **R**, do circuito → Quanto vale R ??

# Para entregar – Parte 1

- Medir a curva de ressonância ( $i \times \omega$ ) e potência ( $P \times \omega$ ) para dois valores de resistência ( $R=1 \Omega$  e  $R=47 \Omega$ )
  - **Não altere a tensão do gerador durante as medidas.**
- Gráfico com as 2 curvas de corrente ( $i \times \omega$ )
  - Colocar também curvas teórica e ajustada
- Gráfico com as 2 curvas de potência ( $P \times \omega$ )
  - Colocar também curvas teórica e ajustada
- Determine o valor experimental da frequência de ressonância e compare com o valor previsto
- Determine o valor experimental de  $Q$ , para cada valor da resistência, e compare com os valores esperados
- Determine  $R$ ,  $L$  e  $C$  e compare com os valores nominais.
  - Há discrepâncias? Explique porque.

# Para entregar – Parte 2

- Meça  $V_C \times t$  e  $V_L \times t$  para a frequência de ressonância
  - Faça um gráfico de  $V_C \times V_L$  na frequência de ressonância
  - O que você esperaria obter caso os seus componentes fossem ideais?
  - O indutor é ideal? Você pode fazer um modelo simples para o indutor caso ele não seja ideal?
  - Da análise desse gráfico, obtenha os parâmetros físicos (valores e incertezas) das grandezas usadas no seu modelo.

# EXTRA

- Durante a análise dos dados você pode obter valores de  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Discuta a independência dos valores obtidos.
- Na análise de  $V_L \times V_C$  na ressonância você se questionou apenas se o indutor não seria ideal. Porque não se questionou o mesmo para o capacitor? Você tem evidências experimentais de que o capacitor é próximo ao ideal?
- Há outras resistências, além do resistor no circuito?

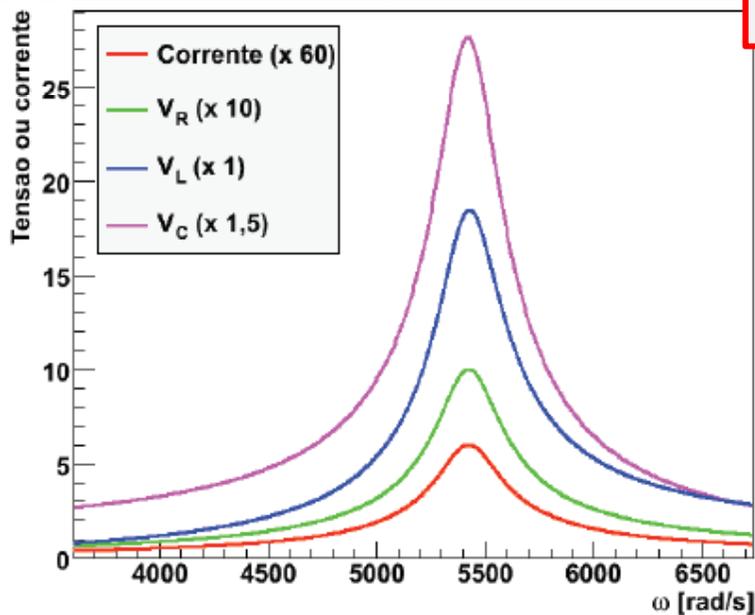
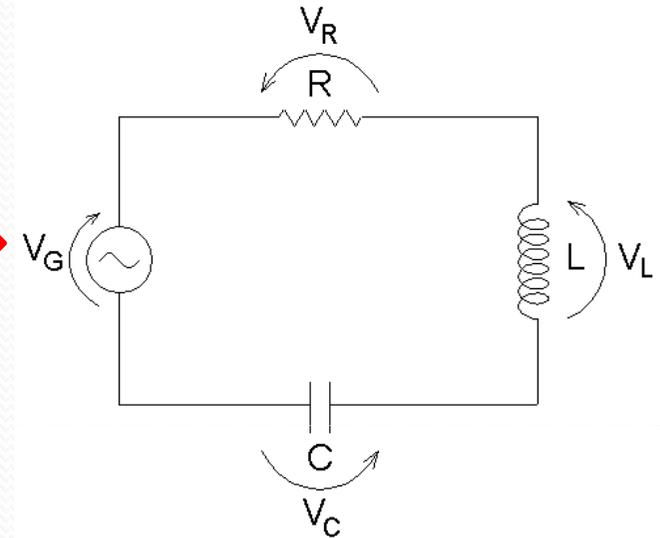
# Cuidados



Usar o abaixador de impedâncias do gerador de áudio!

Será que o gerador pode ser considerado ideal? Como saber se é? O que muda na teoria se não for?

O que vão medir?  
Onde colocar o terra?



Lembre-se de medir um número de pontos que permita obter curvas bem definidas