Física Experimental IV

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 1, Experiência 1
Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Ed. Basílio Jafet, sala 100

Alguns recados da disciplina

- Plantão de dúvidas de análise
  - Toda quinta-feira, das 13:00 às 15:00 em uma sala de laboratório
- Critérios de aprovação
  - 3 experimentos + 1 projeto da turma
  - Média dos experimentos + nota do projeto + participação individual
  - Ver site para detalhes como as notas são calculadas
- Cada aula teórica → tarefas ***mínimas*** para serem entregues
  - Síntese a ser entregue até a segunda-feira (10:00) anterior à próxima aula
  - Não serão tolerados atrasos
  - Não há re-entrega de sínteses

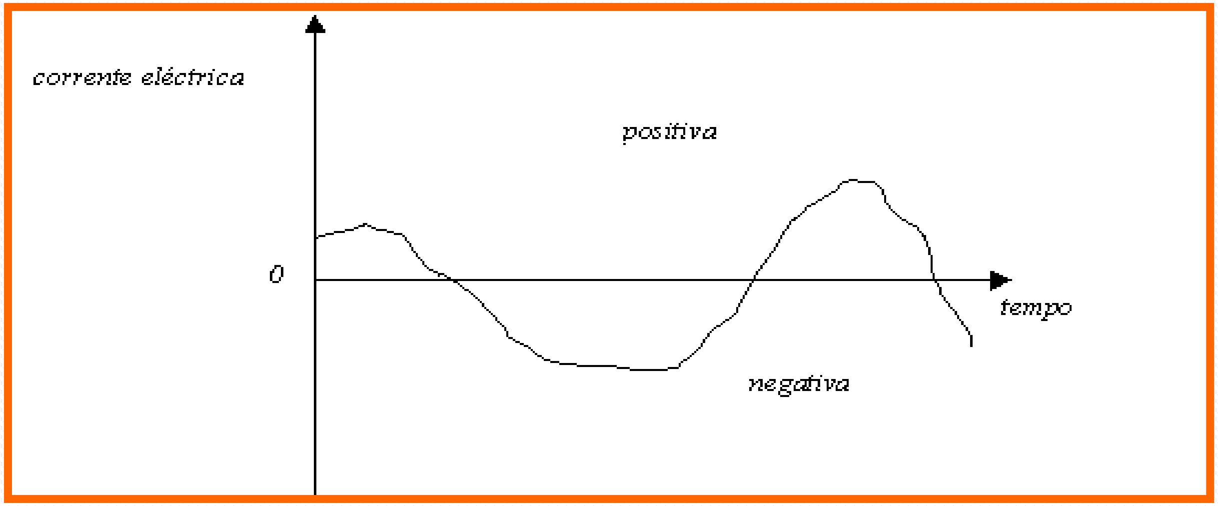
Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 4 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e Análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

Tensões e Correntes Alternadas

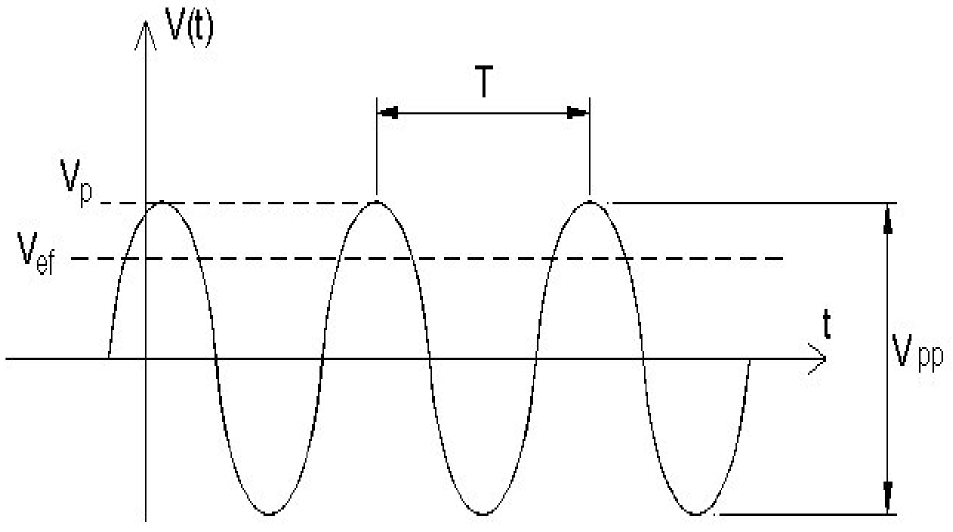
- Tensão alternada: qualquer tensão que varia no tempo



- Na prática trabalhamos com tensões harmônicas simples
  - Veremos no lab4 que qualquer tensão dependente do tempo é uma superposição de tensões harmônicas simples

Tensões Harmônicas Simples

- Aquelas descritas por uma função harmônica simples de freqüência bem definida, ou seja:



$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0)$$

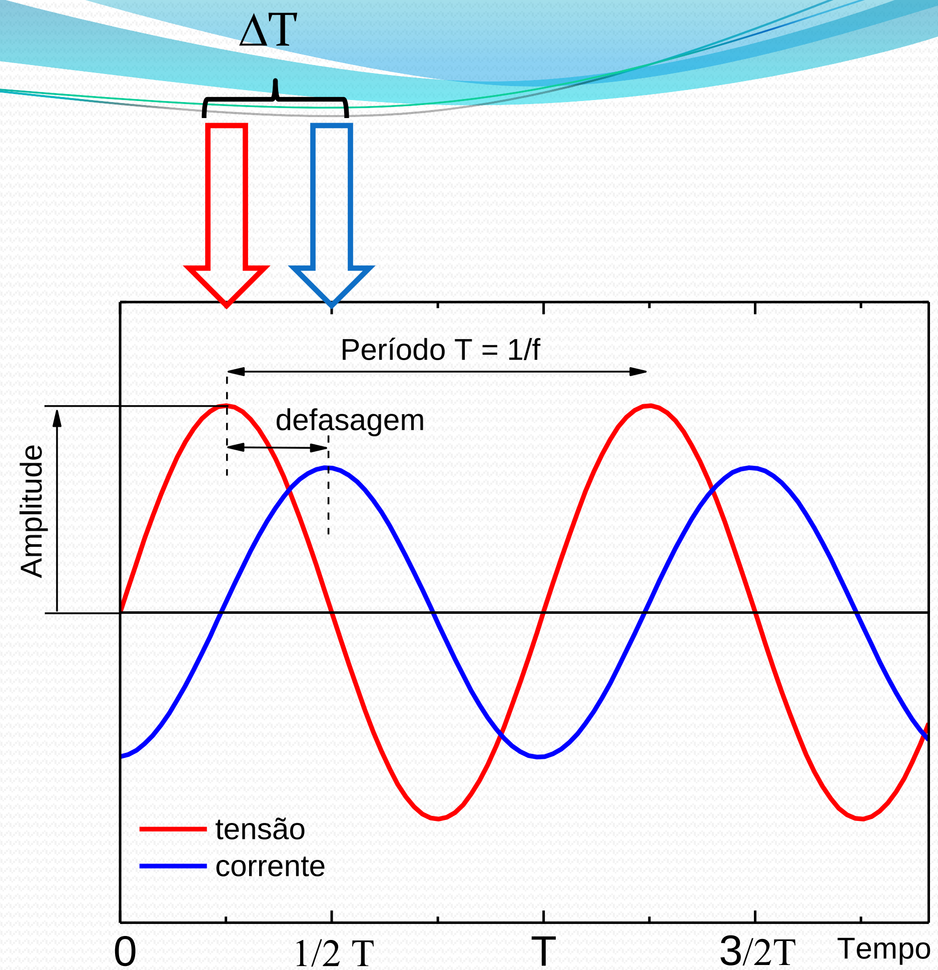
$$\omega = 2\pi f \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$V_{PP} = 2V_p \qquad V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

V_P é a tensão máxima ou tensão de pico ou amplitude, **ω** é a freqüência angular e **ϕ_o** é a fase da tensão alternada no instante **t=o**

A fase

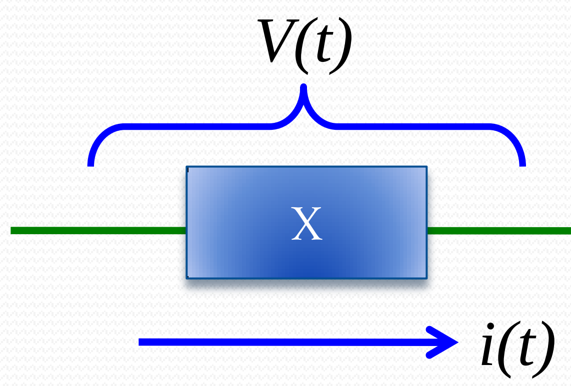
- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não estão necessariamente em fase:



$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

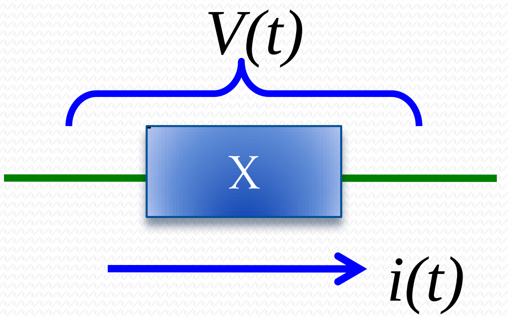
$$V(t) = V_P \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$



Exemplo 1: Resistor Ôhmico

Em um resistor ôhmico simples, a relação entre tensão e corrente é:



$$R = \frac{V_P}{i_P} = cte$$

$$i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

$$V(t) = R \cdot i(t) = R i_P \cos(\omega t)$$

A fase entre tensão e corrente é nula

Exemplo 2: Capacitor Ideal

Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Além disso, carga e corrente estão relacionados

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

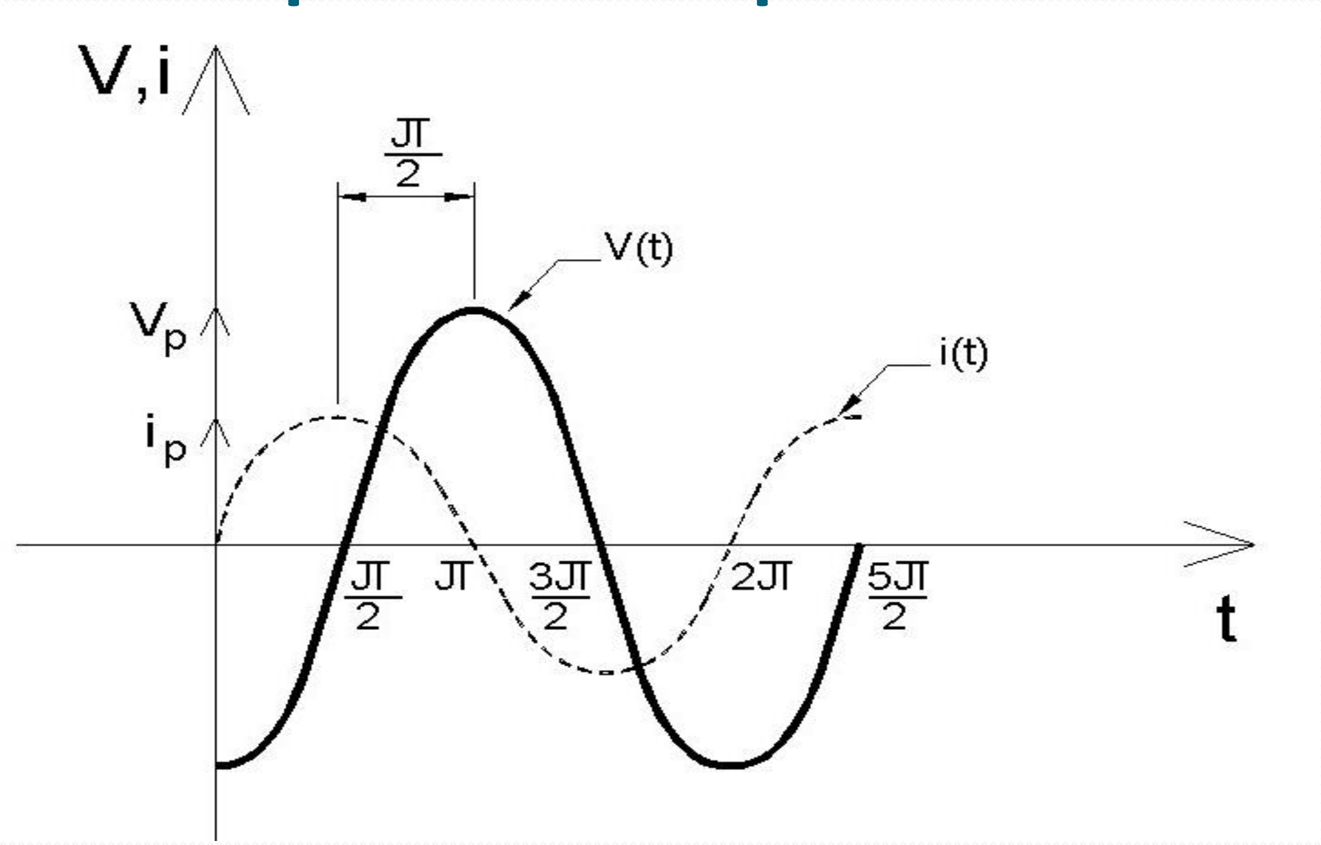
A fase não é nula!

Portanto:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = -\omega C V_p \sin(\omega t) = \omega C V_p \cos(\omega t - \pi / 2)$$

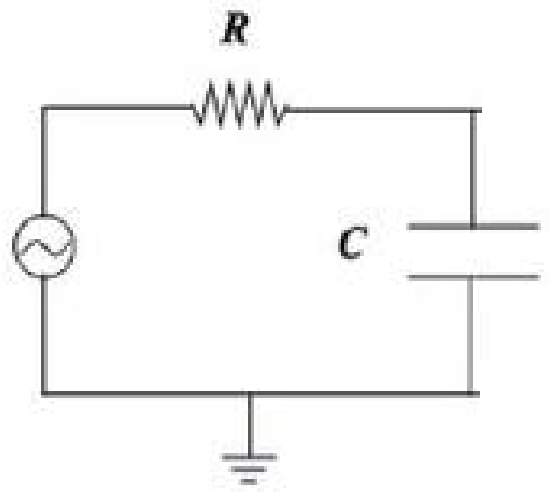
Exemplo 2: Capacitor Ideal



a corrente está adiantada de π/2 em relação à tensão aplicada ao capacitor (Atenção: a defasagem de π/2 é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).

Exemplo 3: circuito RC

- Capacitor e resistor em série a uma fonte de tensão



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \sum_{malha} V_i = 0$$

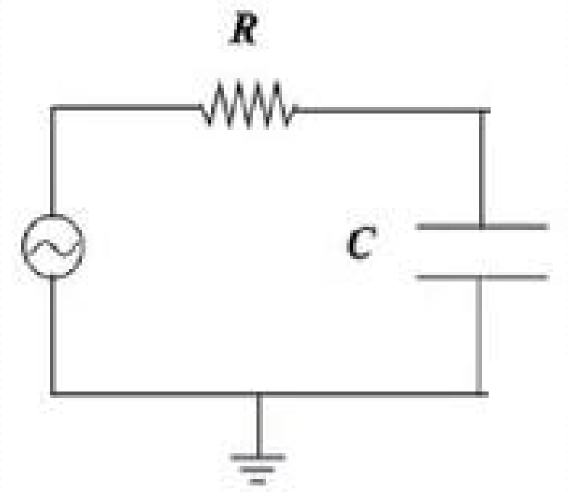
$$V_e(t) = V_R(t) + V_C(t) \Rightarrow V_e(t) = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} \quad \text{sendo } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$V_e(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \rightarrow V_e(t) = RC \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

$$\boxed{V_e = \frac{1}{\omega_0} \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

Exemplo 3: circuito RC

- Se a tensão de entrada for harmônica



$$V_e(t) = V_e \cos(\omega t) \rightarrow V_e(t) = \mathrm{Re}[\hat{V}_e(t)]$$

$$\text{com}\, \hat{V}_e(t) = V_e e^{j\omega t}$$

- Podemos resolver a e.d. Na sua forma complexa e tomar a parte real da solução

$$V_e(t) = \frac{1}{w_0}\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \Rightarrow \boxed{\hat{V}_e(t) = \frac{1}{w_0}\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t)}$$

((Números Complexos))

$$\hat{C} = a + b\,j \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C} = C\,e^{j\alpha} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

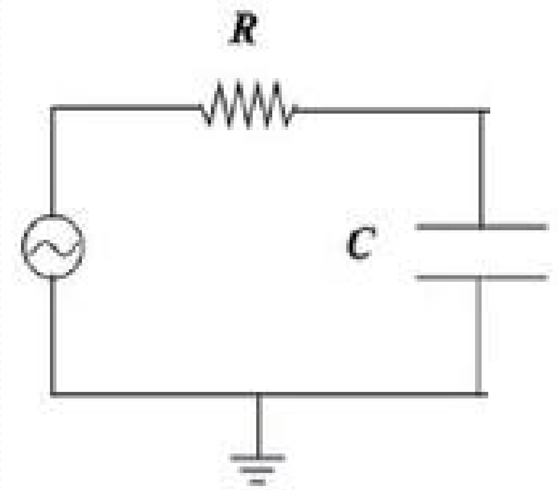
$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega\,e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas nesta notação são apenas multiplicações e divisões

Exemplo 3: circuito RC



- A solução mais geral para a tensão no capacitor é

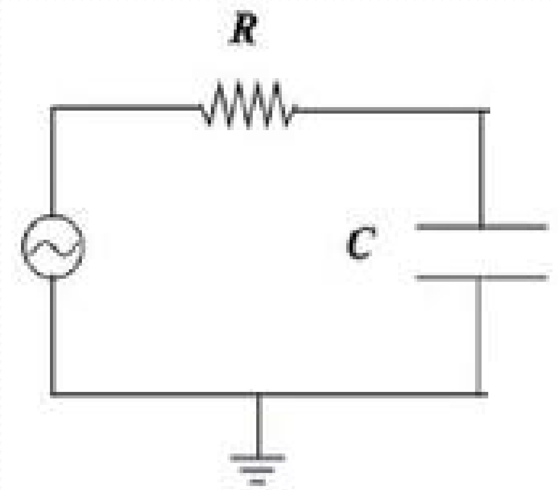
$$\hat{V}_C(t) = \hat{V}_C e^{j\omega t}$$

- Substituindo na e.d.

$$V_e e^{j\omega t} = j\frac{\omega}{\omega_0}\hat{V}_C e^{j\omega t} + \hat{V}_C e^{j\omega t} \Rightarrow \hat{V}_C = \frac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

ou seja $\boxed{\hat{V}_C(t) = \dfrac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} e^{j\omega t}}$

Exemplo 3: circuito RC



- Trabalhando um pouco essa solução

$$\hat{V}_C(t) = \frac{V_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} e^{j\omega t}$$

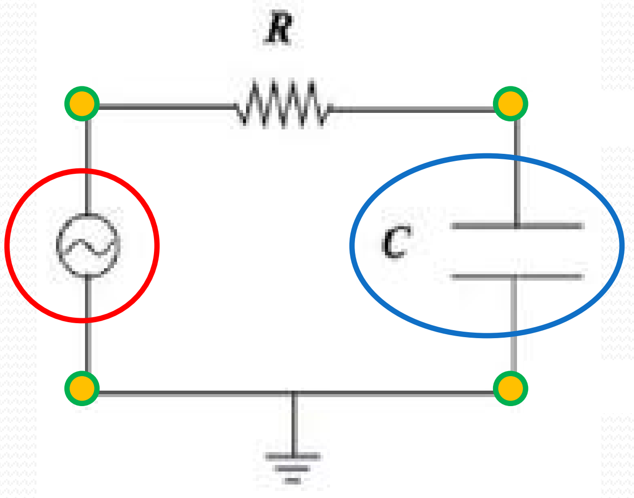
- Podemos escrever

$$\hat{V}_C(t) = V_C e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{com} \quad V_C = \frac{V_e}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

de modo que $\boxed{V_C(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{V}_C(t)\right] = V_C \cos(\omega t + \varphi)}$

Exemplo 3: circuito RC

- Se pensarmos em termos de quadrupolos:



- Sinal de entrada = V_e
- Sinal de saída = V_s

$$\hat{V}_C(t) = \frac{\hat{V}_e}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \hat{G} = \frac{\hat{V}_{saida}}{\hat{V}_{entrada}} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

O ganho relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada... Ou seja, resume o funcionamento do quadrupolo.

Impedância de um elemento

- A solução da equação diferencial no espaço complexo e posterior uso da parte real como solução física do problema sugere a criação de um análogo à lei de Ohm nesse formalismo.

Impedância Complexa e Real

A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

Z_0 é a impedância REAL do elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a tensão e corrente causada pelo elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e Reatância

- Da definição de impedância complexa:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos escrever também que:

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

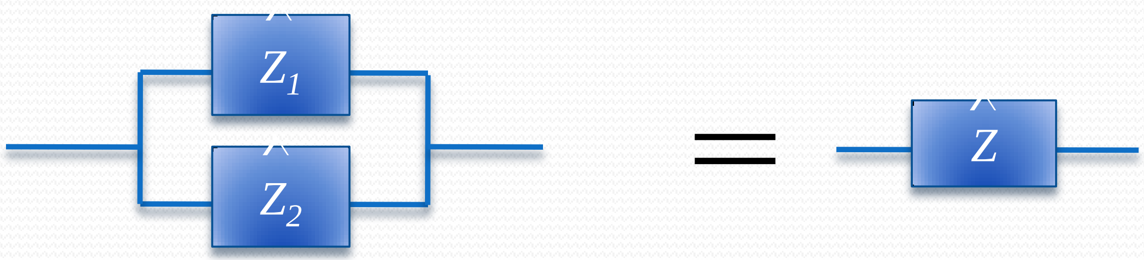
- E reatância deste bipolo (X)

$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

- As grandes vantagens deste formalismo são:
  - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
    - Multiplicações e divisões de exponenciais
  - Associações de bipolos tornam-se simples
    - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$

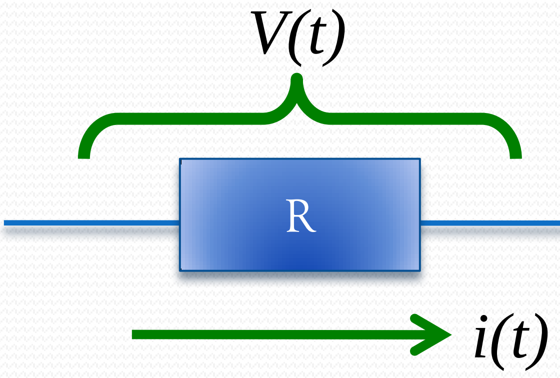


$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}$$

Aplicação 1: Resistor

- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Mas sabemos que $R = V/i$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

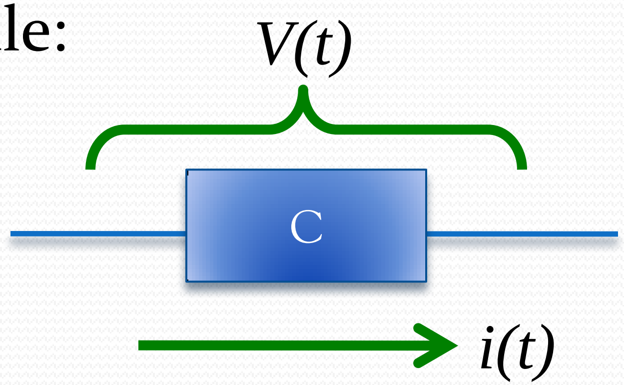
$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

Aplicação 2: Capacitor

- Sabemos (do começo da aula) que $$V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$
- Se a corrente complexa for dada por: $$\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$$
- Fica fácil demonstrar que $$\hat{V}(t) = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$$
- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$



Aplicação 2: Capacitor

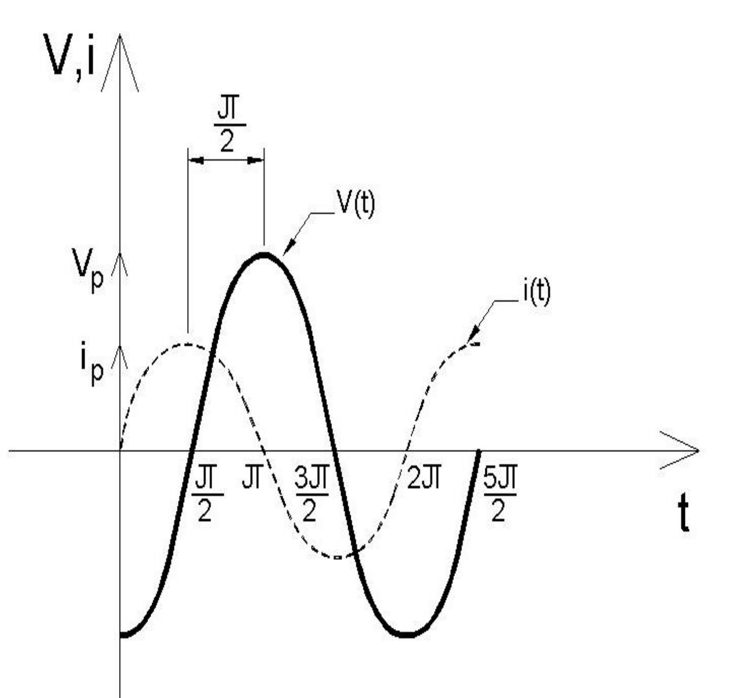
- Ou seja $$\hat{Z} = -\frac{j}{\omega C}$$

- Mas lembrando que: $$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Comparando as duas expressões temos que:

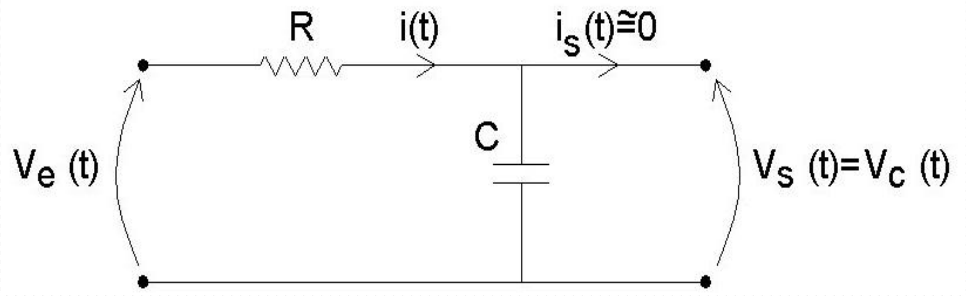
$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de π/2 em relação à corrente



Aplicação 3: circuito RC

- Seja o circuito ao lado:



- A tensão no capacitor é:

$$\hat{V}_C = \hat{i} \cdot \hat{Z}_C$$

- A tensão de entrada é:

$$\hat{V}_e = \hat{Z}_{total} \cdot \hat{i} \quad = (\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}$$

- E o "ganho" no circuito é dado por:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} \quad = \frac{\hat{Z}_C \cdot \hat{i}}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}} = \frac{-\dfrac{j}{\omega C}}{(R - \dfrac{j}{\omega C})} \quad = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

Mesma solução encontrada resolvendo a eq. diferencial....

MUITO MAIS FÁCIL!

((Ganho))

Qual a interpretação de um ganho complexo ??

$$\hat{G} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}} \qquad \hat{G} = G_0 e^{j\phi_G}$$

A parte real do ganho muda a amplitude do sinal:

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}^* \hat{G}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_C)^2}}$$

E a parte imaginária introduz uma fase

$$\phi_G = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[\hat{G}]}{\mathrm{Re}[\hat{G}]}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_e(t) &= V_e \cos(\omega t) \\ V_s(t) &= V_e G_0 \cos(\omega t + \phi_G) \end{aligned}}$$

Joseph Fourier(1768-1830)

- Aos 12 anos foi estudar no *Ecole Royale Militaire of Auxerre*
- Aos 14 anos concluiu os estudos dos 6 volumes do *Bézout's Cours de mathematique*
- Aos 15 ganhou um prêmio por seus estudos do livro *Bossut's Méchanique en général*
- Aos 19 entrou no mosteiro beneditino de St. B
  virar padre, mas continuou estudando matemá
  batina aos 21
- Aos 22 tornou-se professor na *Ecole of Auxerre*
- Quanto completou 26, foi fundada a *Ecole Nor*
  Fourier estava na primeira turma. Teve como p
- Aos 27 foi indicado para uma cadeira da *Ecole*
  (dir. Carnot e Monge) => Ecole Polytechnique

http://www.shsu.edu/

Joseph Fourier(1768-1830)

- Aos 29 substituiu Lagrange na cadeira de análise e mecânica
- Aos 30 assumiu o posto de conselheiro científico no exército de Napoleão que invadiria o Egito. Monge e Malus também estavam na equipe.
- Durante sua estada no Cairo trabalhou como administrador, criando instituições de educação. Também fez explorações arqueológicas.
- Aos 31 retornou a Paris, mas a contra gosto foi nomeado por Napoleão prefeito de Grenoble. Trabalhou então na drenagem dos pântanos da Borgonha e na rodovia ligando Grenoble a Torino.
- Foi durante este tempo em Grenoble que ele fez seu trabalho científico mais importante: S*obre a propagação de color em corpos sólidos.*
- Fourier introduziu séries infinitas de funções para resolver a equação de transferência de calor em uma placa de metal.

http://www.shsu.edu/~icc_cmf/bio/fourier.html

Série de Fourier (1807)

- Só haviam soluções particulares para fontes de calor senoidal. A idéia foi modelar uma fonte de calor complicada como uma combinação linear de senos e cossenos.
- Objeções da banca (não aprovou o trabalho):
  - Laplace e Lagrange não aceitaram a derivação teórica
  - Biot, Poisson e Laplace reclamaram que ele não citou o paper de 1804 de Biot (que hoje sabemos estar errado)
- Em 1811 o prêmio anual do Instituto de Ciências de Paris iria para quem resolvesse a equação de transporte de calor e Fourier submeteu o tratado de 1807.
- O comitê formado por Lagrange, Laplace, Malus, Hauy e Legendre deram o prêmio para Fourier pois só havia +1 concorrente:
  - *... the manner in which the author arrives at these equations is not exempt of difficulties and that his analysis to integrate them still leaves something to be desired on the score of generality and even rigour.*

http://www.shsu.edu/~icc_cmf/bio/fourier.html

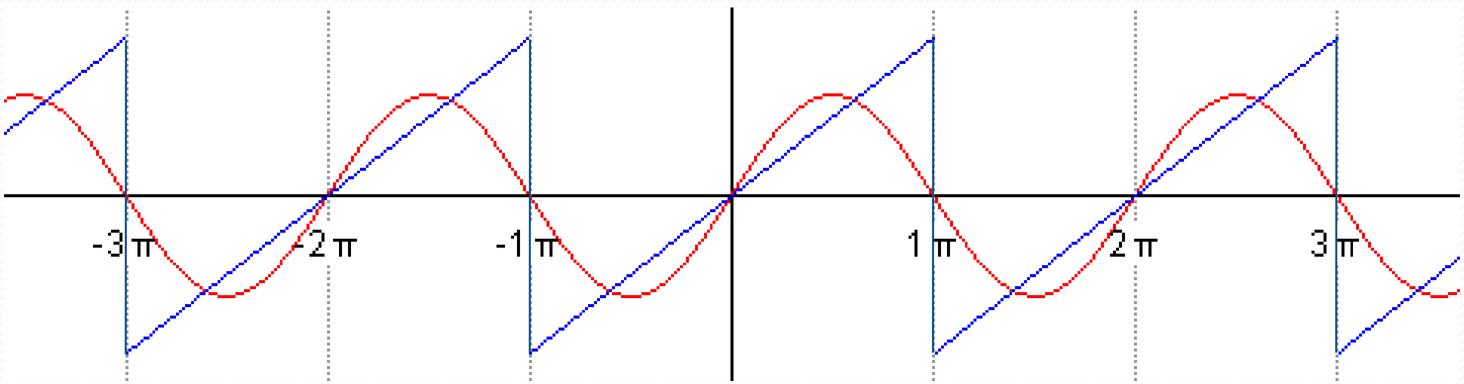
Séries de Fourier

- Funções trigonométricas podem ser combinadas de tal forma a representar qualquer função matemática

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- As constantes a_n e b_n podem ser obtidas a partir de:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$



Séries de Fourier

Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

Use a fórmula de Euler e substitua na expressão anterior

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

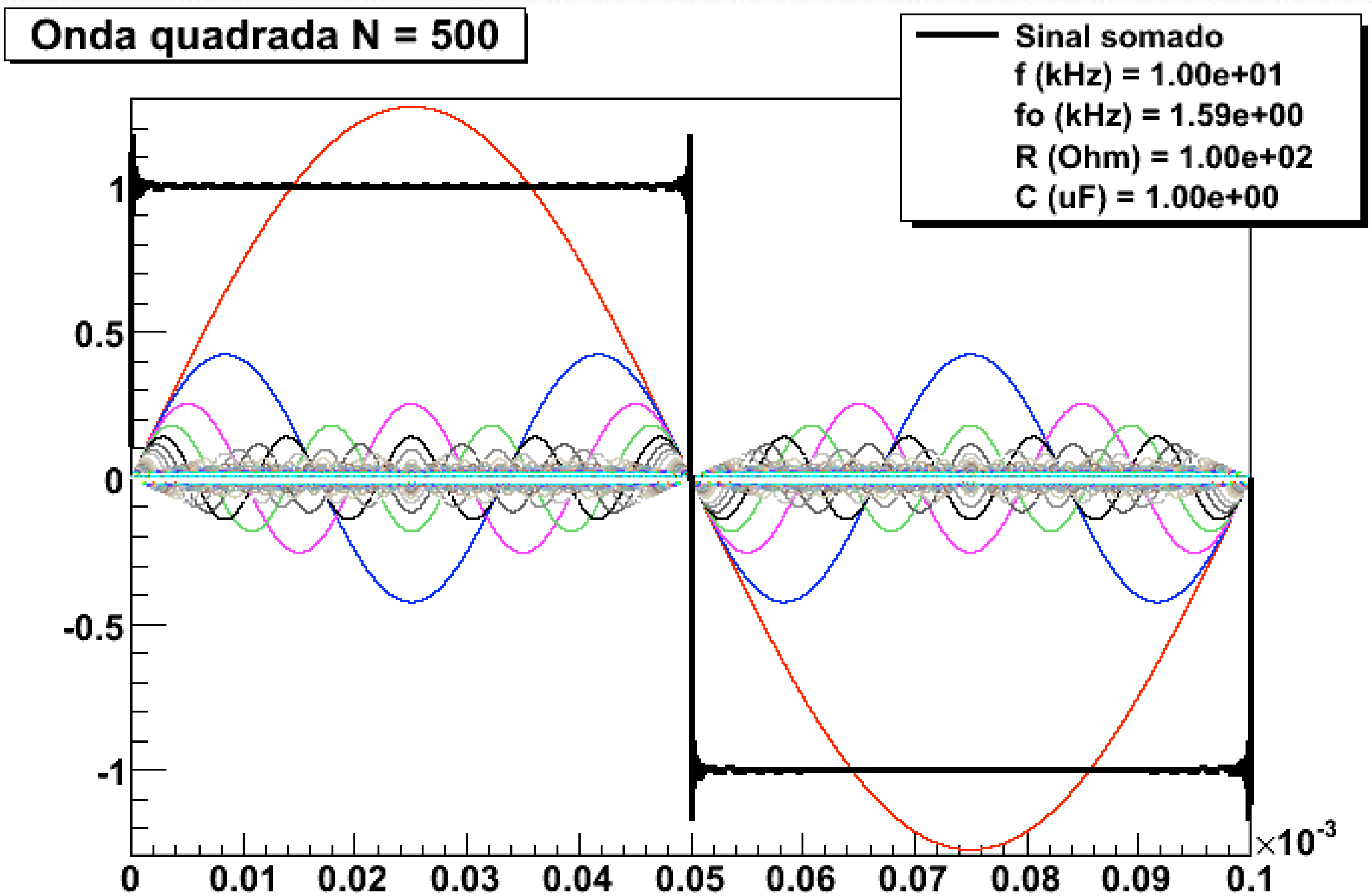
As constantes a_n e b_n da expressão tradicional podem ser obtidas como:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{com}\, n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = j\left(c_n - c_{-n}\right), \text{com}\, n = 0,1,2,\ldots$$

Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \cdots\right]$$



De volta ao circuito RC

- Se o sinal de entrada for quadrado, como resolvemos a equação diferencial?

$$\hat{V}_e(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t), \text{ mas } \hat{V}_e(t) = \sum_n v_n^e e^{j\omega_n t}$$

- Substituindo

$$\sum_n v_n^e e^{j\omega_n t} = \frac{1}{\omega_0}\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t), \text{ e fazendo } \hat{V}_C(t) = \sum_n \hat{v}_n^C e^{j\omega_n t}$$

$$\sum_n v_n^e e^{j\omega_n t} = \sum_n \left[\left(j\frac{\omega_n}{\omega_0} + 1 \right) \hat{v}_n^C e^{j\omega_n t} \right]$$

De volta ao circuito RC

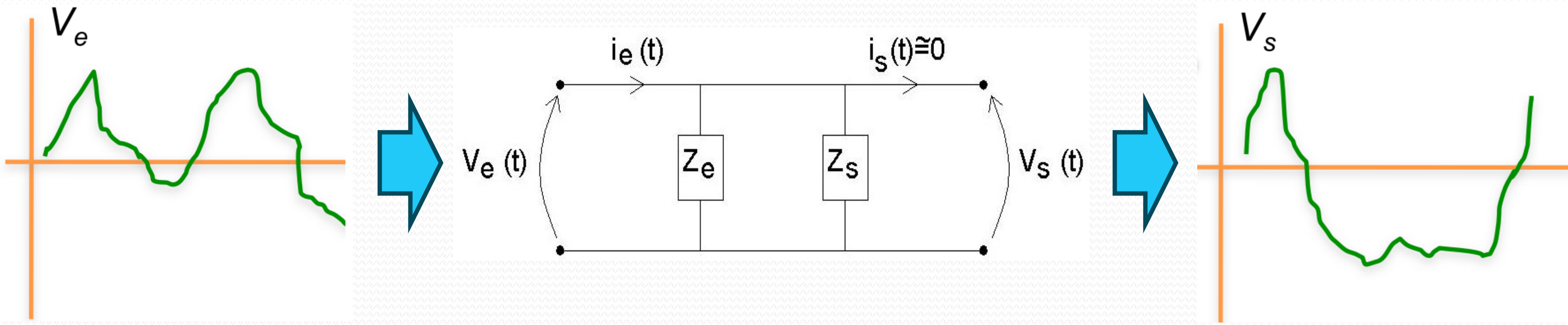
- Esta equação pode ser desmembrada em um sistema de equações diferenciais:

$$v_n^e e^{j\omega_n t} = \left(j\frac{\omega_n}{\omega_0} + 1 \right) \hat{v}_n^C e^{j\omega_n t}, \mathrm{n} = 1{,}2{,}...$$

- Cuja solução é:

$$\hat{v}_n^C = \frac{v_n^e}{j\frac{\omega_n}{\omega_0} + 1}, \mathrm{n} = 1{,}2{,}...$$

O que o circuito faz no sinal?



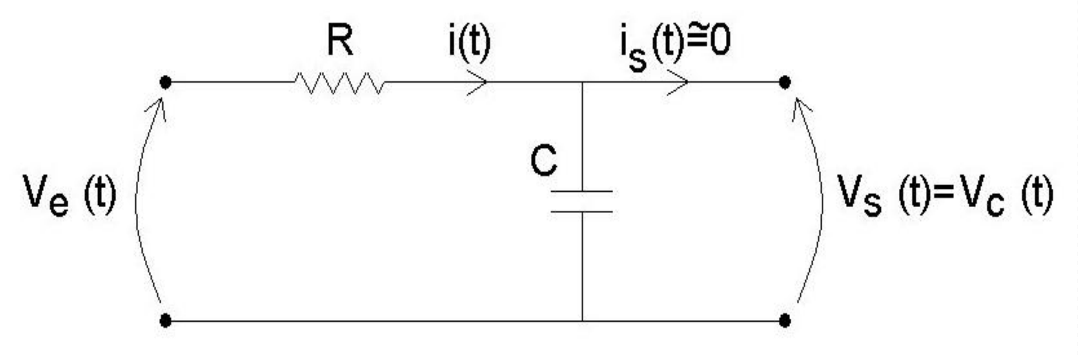
$$
\begin{aligned}
V_{entrada} = {} & V_1^S \sin(\omega_1 t) \\
& + V_1^C \cos(\omega_1 t) \\
& + V_2^S \sin(\omega_2 t) \\
& + V_2^C \cos(\omega_2 t) \\
& + \cdots \\
& + V_N^S \sin(\omega_N t) \\
& + V_N^C \cos(\omega_N t)
\end{aligned}
$$

$$
G_i = G(\omega_i, R, C)
$$
$$
\phi_i = \phi(\omega_i, R, C)
$$

$$
\begin{aligned}
V_{Saida} = {} & V_1^S G_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\
& + V_1^C G_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\
& + V_2^S G_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\
& + V_2^C G_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\
& + \cdots \\
& + V_N^S G_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \\
& + V_N^C G_N \cos(\omega_N t + \phi_N)
\end{aligned}
$$

Para esta aula

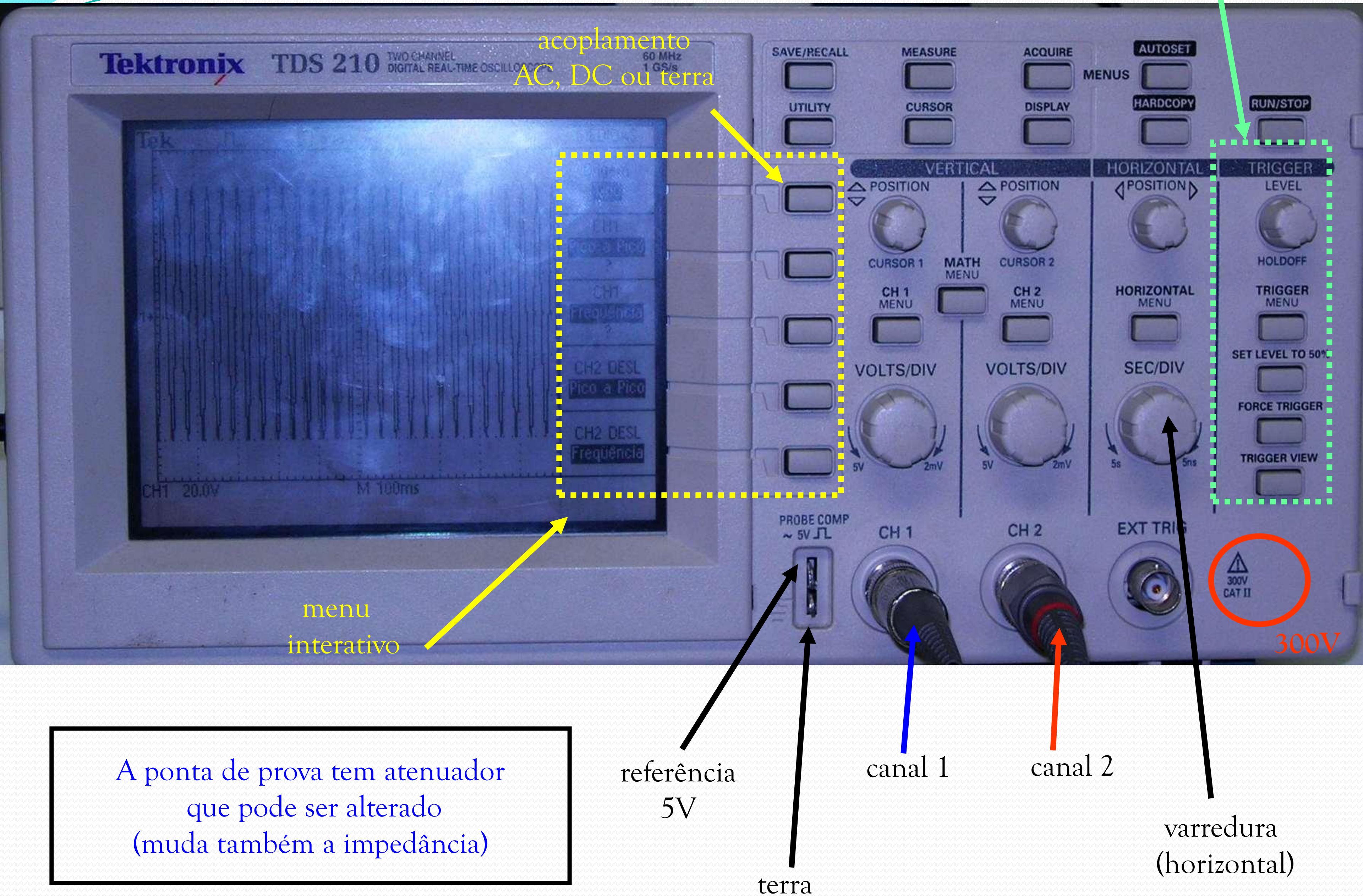
- Vamos estudar o filtro **RC**:



- **Objetivos:**
  - Obter experimentalmente o ganho (G_0 e Φ_G) em função da freqüência (ω) e comparar com a previsão teórica.
  - Estudar o comportamento deste circuito para um sinal de entrada quadrado.

Para isto é preciso conhecer **R** e ***C***.
Não confiar nos valores nominais

Osciloscópio



A ponta de prova tem atenuador
que pode ser alterado
(muda também a impedância)

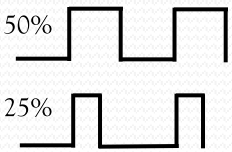
Gerador de audio

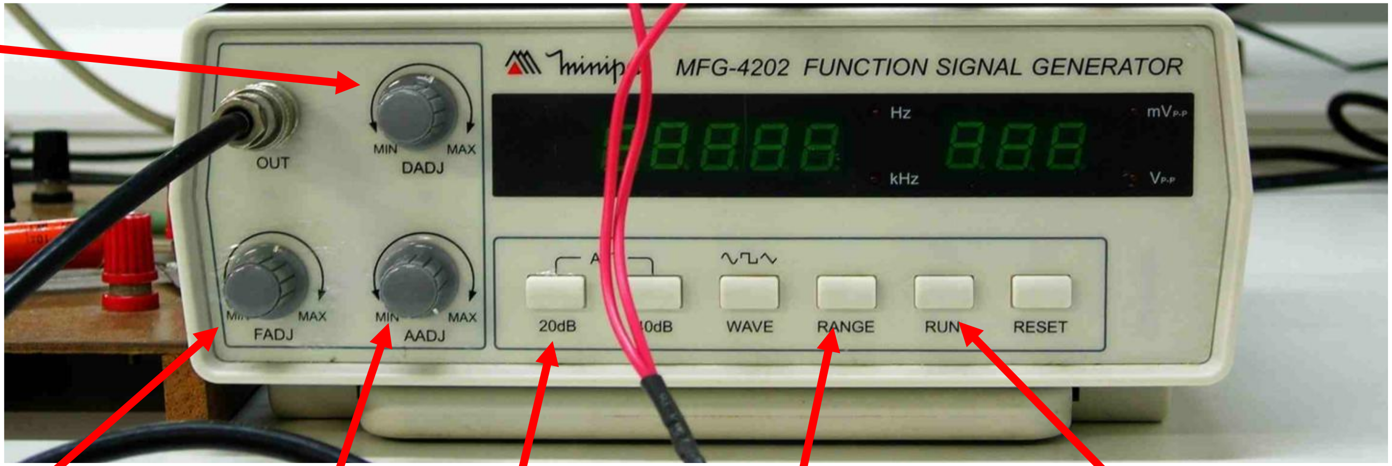
IMPORTANTE!

RESISTOR

CAPACITOR

Duty cycle ADJust





Frequency ADJust

Amplitude ADJust

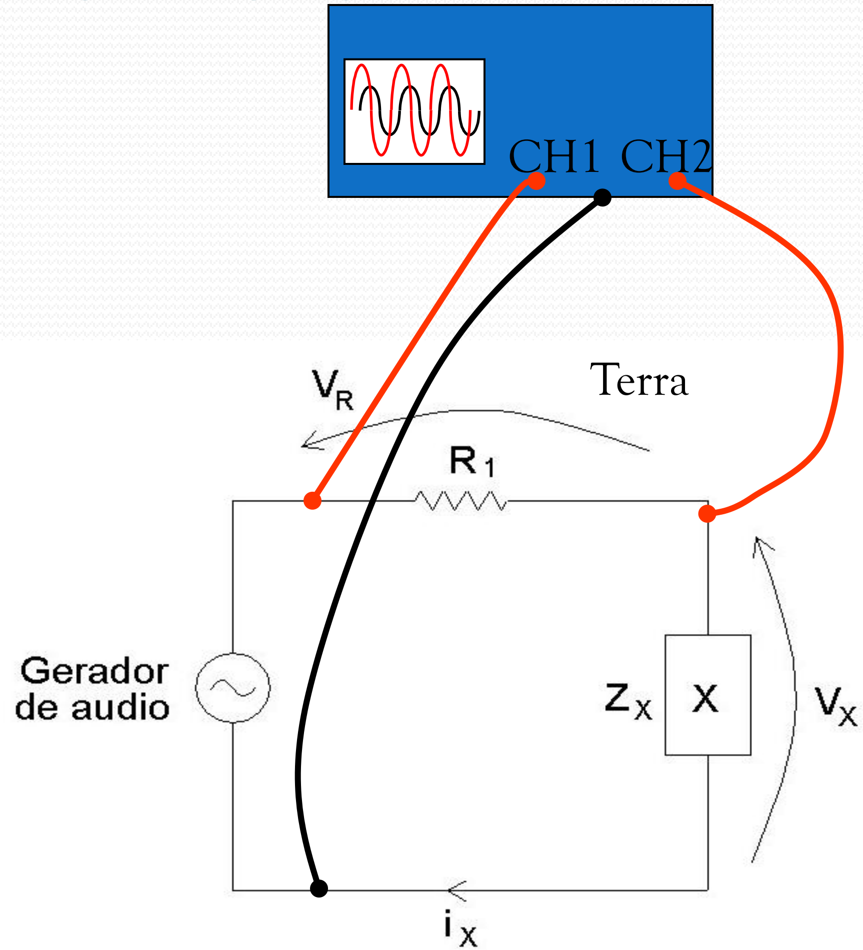
atenuador

intervalo de frequências

Executa parâmetro

Cuidados Experimentais

- Instrumentos de medida:
  - Osciloscópio
    - Canal 1: Ve
    - Canal 2: Vc
  - Cuidado com ruídos
    - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído
  - Não confundir freqüência temporal (f) com freqüência angular (ω)



Tarefas 1

Montar um circuito RC com freqüência de corte ~500Hz. Usando um **sinal de entrada senoidal** e $V_{saida}=V_C$ fazer:

- Gráfico de G_0 em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente
  - Fazer ajustes necessários e tratamento estatístico
- Gráfico de ϕ_G em função de ω
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
  - Fazer ajustes necessários e tratamento estatístico
- Lembre-se de medir valores $\omega << \omega_c$ até $\omega >> \omega_c$ para poder fazer um bom ajuste. **Vejam tutorial no meu site!**

Tarefas 2

Usando o mesmo circuito mas agora com **uma onda quadrada na entrada**, faça:

- Meça $\mathbf{V_C}$ e $\mathbf{V_e}$ no osciloscópio e <u>salve os dados no pendrive</u> para 3 freqüências diferentes tais que:
  - $\omega << \omega_c$ (pelo menos 3 vezes)
  - $\omega \sim 2\,\omega_c$
  - $\omega >> \omega_c$ (pelo menos 30 vezes)
- Mostrar numericamente que $\mathbf{V_C(t)}$ pode ser obtido através da aplicação do ganho e fase para cada freqüência que compõe onda quadrada de entrada
- Compare a sua previsão "teórica" com a medida experimental de $\mathbf{V_C(t)}$.
  - Discuta o efeito da escolha do número de termos na série de fourier no seu resultado

Tarefas 3

- Para o caso $\omega >> \omega_c$ e onda de entrada quadrada, mostre com os dados obtidos que o sinal de saída é proporcional a integral do sinal de entrada
  - Neste caso, como a entrada é um sinal quadrado, significa que a saída será um triângulo, certo?
  - Deduza a afirmação acima e mostre que as "inclinações" medidas e teóricas da onda triângular na saída são compatíveis

1. Síntese para dia 14/MARÇO as 10hs
2. O lab estará aberto qui/sex depois do carnaval
3. Usem o plantão de dúvidas para discutir a análise de dados com o prof. Suaide