Correntes Alternadas

Parte 2 – Indutância Mútua

Aula 11

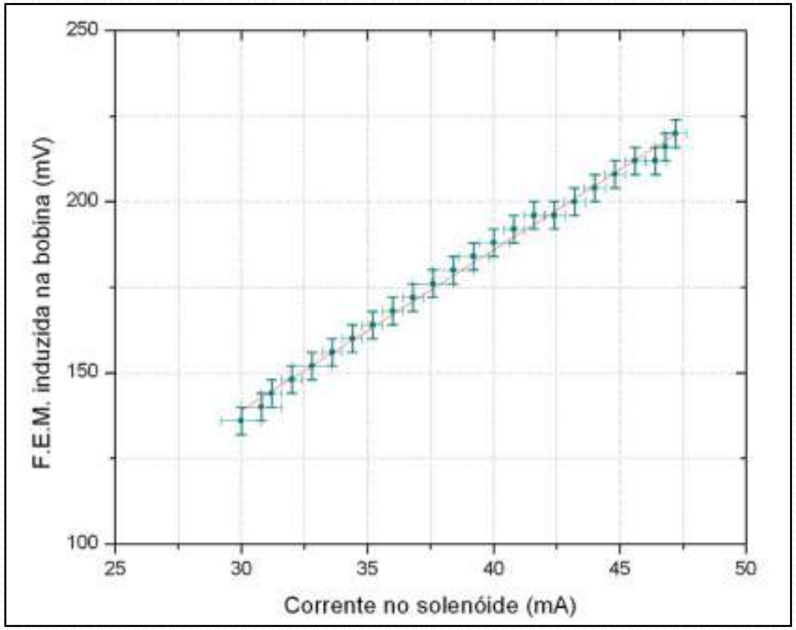
Prof. Henrique Barbosa
Edifício Basílio Jafet - Sala 100
Tel. 3091-6647
hbarbosa@if.usp.br

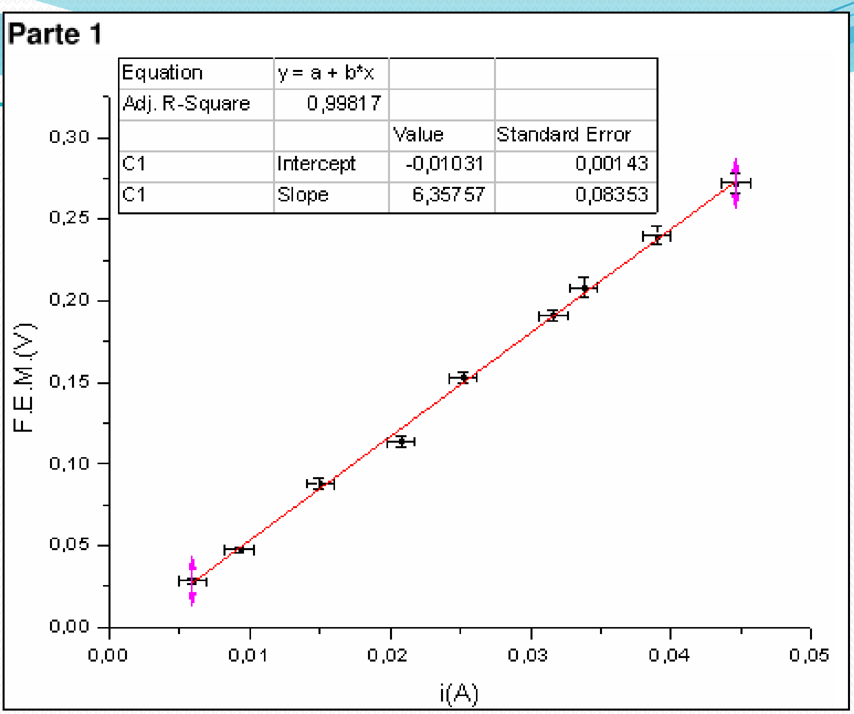
http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

Tarefas da semana (1)

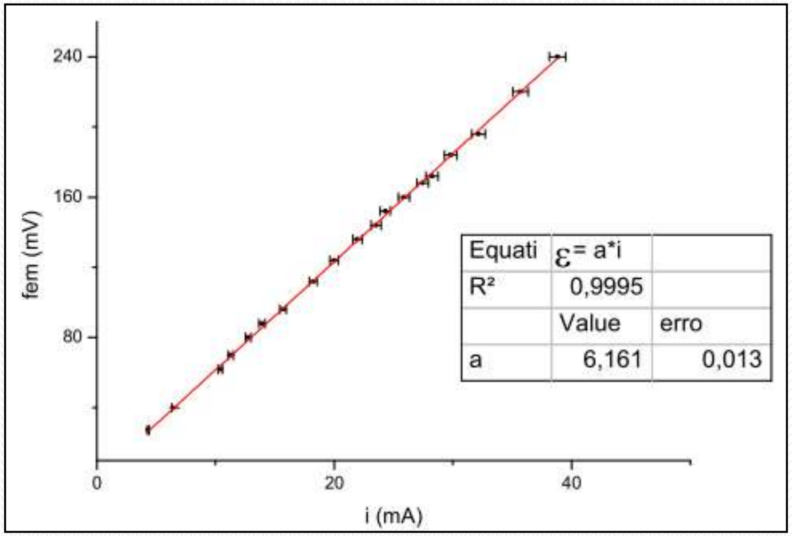
- **Calibração da bobina sonda em carretel:**
  - Usando a bobina sonda de área desconhecida, fazer gráfico da **f.e.m.** induzida em função da corrente no solenóide.
  - Ajustar os dados com a função apropriada e determinar a área efetiva da bobina sonda em carretel e compare com os resultados dos colegas.
  - Medir a defasagem entre o campo magnético (corrente) e a **f.e.m.** na bobina sonda (só precisa fazer para um valor de corrente, certo?).
  - Anotar número da bobina sonda que utilizou → **procure usar a mesma nas próximas aulas.**

F.E.I. x Corrente

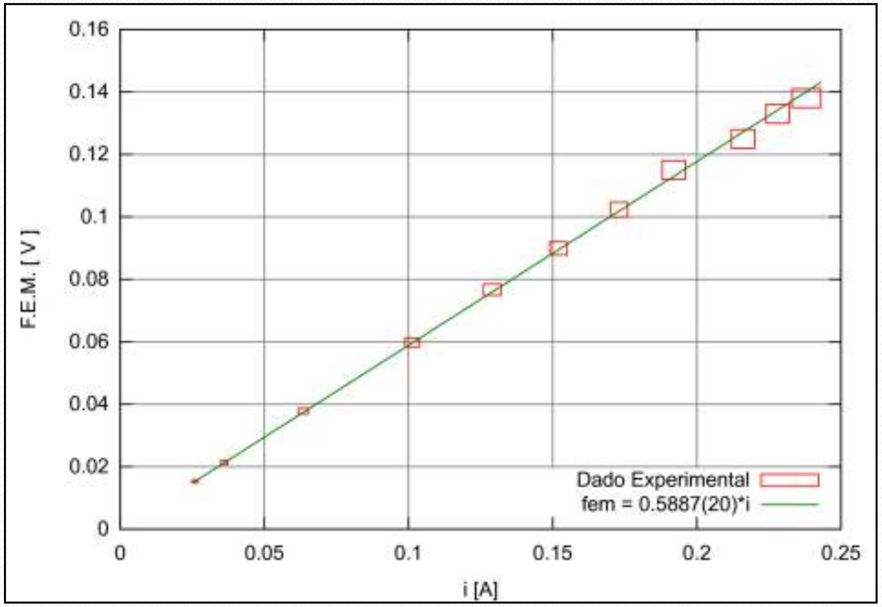




Equation	y = a + b*x		
Adj. R-Square	0,99817		
		Value	Standard Error
C1	Intercept	-0,01031	0,00143
C1	Slope	6,35757	0,08353



Equati	ε= a*i	
R^2	0,9995	
	Value	erro
a	6,161	0,013



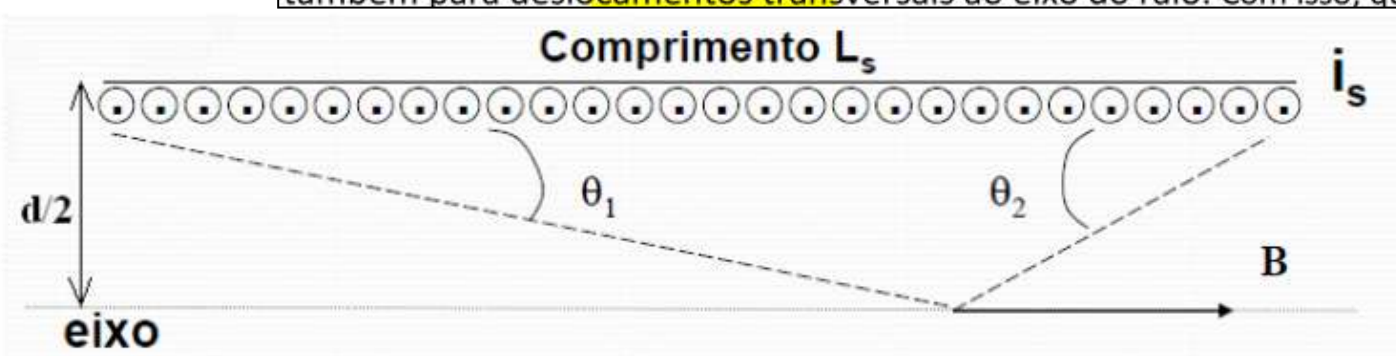
Correção do solenóide finito

- A correção era pequena:
  - θ~11graus
  - cos θ~0.98

~1

$$B_{sm} = \frac{\mu_0 . N_S}{L_S} . \left(\frac{cos\theta_1 + cos\theta_2}{2} \right) . i_{sm}$$

Pelo fato da bobina sonda ter sido colocada próxima ao meio do solenoide , então podemos considerar que $cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \sim 1$, isso é factível pois nas medições a variação da f.e.i. era muito pequena por deslocamentos no eixo do raio do solenoide próximo ao meio, e também para deslocamentos transversais ao eixo do raio. Com isso, quando fizermos o



ok

Figura 1: Arranjo interno do solenóide

A bobina sonda foi posicionada no centro do solenóide, ou seja, 40 cm dentro do solenóide e há 8,2 cm das extremidades do diâmetro, com essas medidas verificamos que os valores de θ_1 e θ_2 eram os mesmos, esse valor foi calculado a partir do $cos\left(tg^{-1}\frac{8,2}{40}\right)$, obtendo assim o valor de 0,979.

ok

Como calcular a área efetiva?

Seja

$$\varepsilon_{bm} = A_{bef} w \frac{\mu_0 N_s}{L_s} cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) i \qquad (1)$$

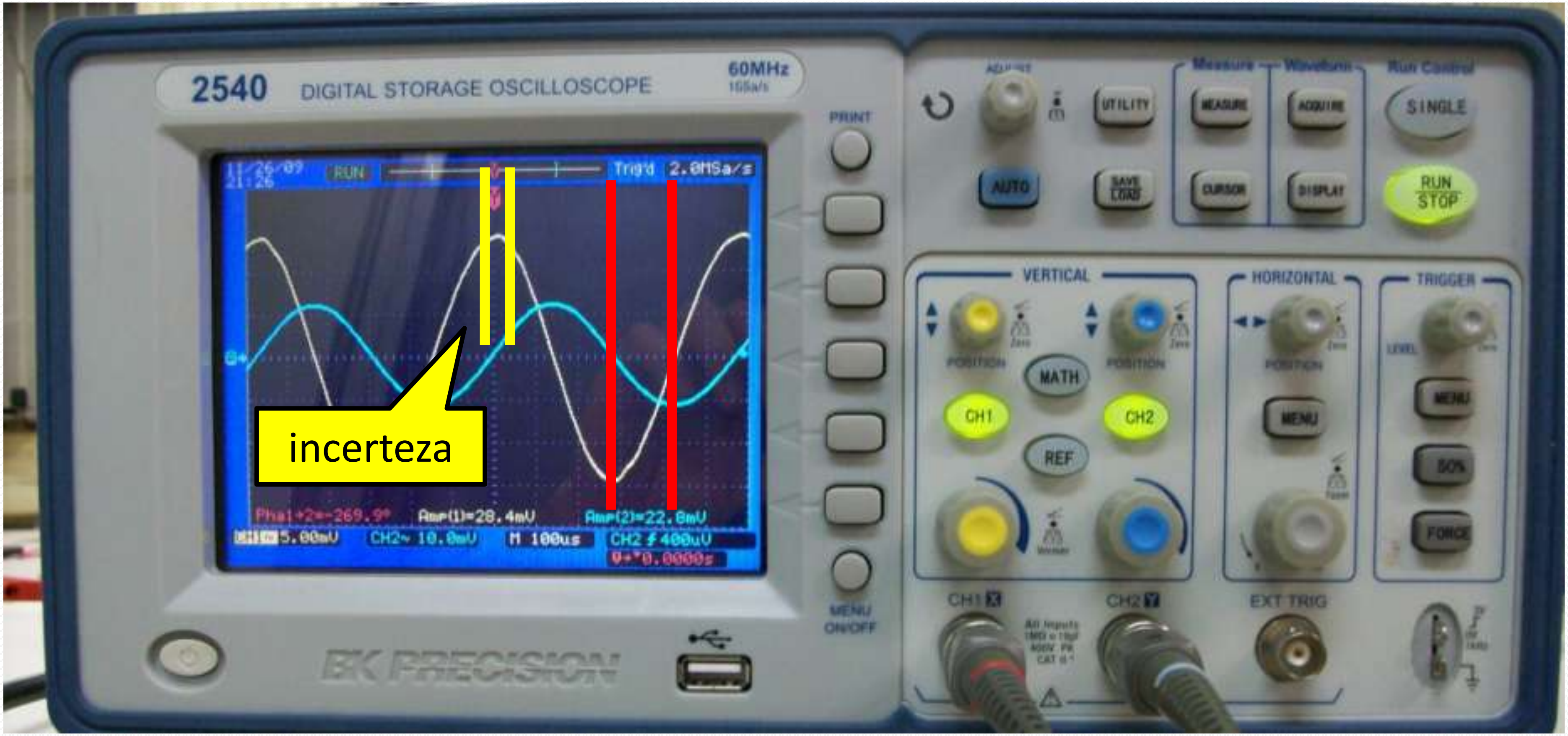
Pelo fato da bobina sonda ter sido colocada próxima ao meio do solenoide , então podemos considerar que $cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \sim 1$, isso é factível pois nas medições a variação da f.e.i. era muito pequena por deslocamentos no eixo do raio do solenoide próximo ao meio, e também para deslocamentos transversais ao eixo do raio. Com isso, quando fizermos o ajuste de f.e.i. por i, a área efetiva da bobinha sonda será

$$A_{bef} = \frac{aL_s}{w\mu_0 N_s} \qquad (2)$$

Onde a é o coeficiente angular do ajuste.

Como calcula a defasagem?

Medindo a defasagem entre as ondas da fem e da tensão no resistor, mediu-se o valor de Δx=80 (4) μs, sendo que o comprimento de onda medido foi λ= 330 (4) μs e a razão é Δx/ λ=0,242(12), sendo o esperado 0,25, isto é, defasagem de 90°, e com isso o resultado é compatível em uma incerteza.



Comparação

	LS (cm)	DS (cm)	f (Hz)	NS	Def. (deg)	AreaEff (m2)
H1	**80.00 (5)**	**16.40 (5)**	3008 **(?)**	840 (10)	87 **(?)**	0.19 (9)
H2					-264.3 **(?)**	
H3	80.0 (2)		3014.9 (40)	840 (10)		0.246 (12)
H4					89.97 **(?)**	0.1533 (19)
H5					69 (3) 90 **(?)**	**4.67 (13) cm^2**
H6						**0197 (12) cm^2**
H7	80.0 (2)	16.4 (2)	3044 (10)	840 (10)	105 (2)	0.223 (15)
H8					96 (5)	0.257 (2)
H9					77.1 (14)	0.143 (91)
H10	80.0 (2)	16.4 (2)			92 (11)	0.220 (5)

Tarefas da semana (2)

- Para calibrar a bobina sonda com um solenóide a hipótese feita foi que o campo não varia dentro da área da bobina.
  - Verifique experimentalmente se isso é verdade. A posição da bobina, em relação à altura (diâmetro) dentro do solenóide afeta a medida? E o ângulo?
  - Explique como fez essa verificação e porque ela pode ser considerada confiável.
- Compare seu resultado com os de seus colegas.
- Comente.

- **Pergunta**: Deve existir alguma preocupação do alinhamento do solenóide com o campo magnético local? Porque?

Posição

Para verificar se o campo variava dentro da área do solenóide, a bobina foi movida radialmente e ao longo do eixo do solenóide e foi constatado que não havia alteração significativa na corrente induzida, as alterações maiores ocorreram apenas nas bordas do solenóide, a partir disso, pode-se concluir que o campo é constante dentro da área.

Porém, ao variar a bobina sonda os ângulos Θ_1 e Θ_2 sofriam alterações devido ao arranjo do solenóide e bobina, como já ilustrado na figura 1. A alteração desses valores interfere diretamente com o cálculo do valor da área, porém não gera mudanças muito significativas.

Pelo fato da bobina sonda ter sido colocada próxima ao meio do solenoide , então podemos considerar que $cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \sim 1$, isso é factível pois nas medições a variação da f.e.i. era muito pequena por deslocamentos no eixo do raio do solenoide próximo ao meio, e também para deslocamentos transversais ao eixo do raio. Com isso, quando fizermos o

Tabela 2 **-** Verificação da hipótese de não variação do campo magnético dentro da área da bobina.

Verificação da variação do campo dentro da área da bobina						
Medidas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Distância (cm)	4,50 (5)	16,50 (5)	31,80 (5)	34,00 (5)	37,40 (5)	45,40 (5)
Tensão (mV) (Campo B)	492,0 (6)	492,0 (6)	488,0 (8)	492,0 (6)	492,0 (6)	492,0 (6)

Campo da Terra

- Campo constante no tempo não produz variação no fluxo (a não ser que a geometria estivesse se movendo em relação a ele).

O campo magnético terrestre não interfere na força eletromotriz induzida na bobina sonda, por ser constante, portanto segundo a Lei de Faraday, esse campo não induz nenhuma força eletromotriz, isso ocorre, pois seu fluxo na área da bobina sonda não varia. Quando a bobina sonda é deslocada, o fluxo do campo magnético terrestre varia numa intensidade desprezível.

Não nos preocupamos com o campo magnético terrestre pois é a variação do fluxo que produz uma força eletromotriz induzida, e como o campo magnético terrestre em geral é constante, seu efeito pode ser desprezado.

- Não era porque o campo tinha aplitude insignificante!

Já quanto ao campo gravitacional terrestre, ele é muito menor do que o causado pelo solenóide, portanto não interfere significativamente nas medidas.

Tarefas da semana (3)

Campo magnético de valor desconhecido:

- O campo do solenóide utilizado foi calculado analiticamente fazendo algumas aproximações.
  - Será que isso não afeta a calibração da bobina?
  - Como é esse campo de fato?
- Mapear o campo do solenóide ao longo do eixo **de simetria**.
- Faça um gráfico desse campo em função da distância e superponha a ele:
  - o resultado analítico (precisa incluir a correção??)
  - e o resultado da simulação com o programa **F.E.M.M.**.
- Comente seus resultados.

$$\boxed{B_{sm} = \frac{\mu_0 . N_S}{L_S} . \left(\frac{cos\theta_1 + \ cos\theta_2}{2}\right) . i_{sm}}$$

Simulação do FEMM

Eixo de rotação== lateral esquerda

Solenoide é representado por um estreito retangulo bem comprido.

Nem pegou o campo no centro do solenoide!!

Esse grupo não usou simetria cilindrica!

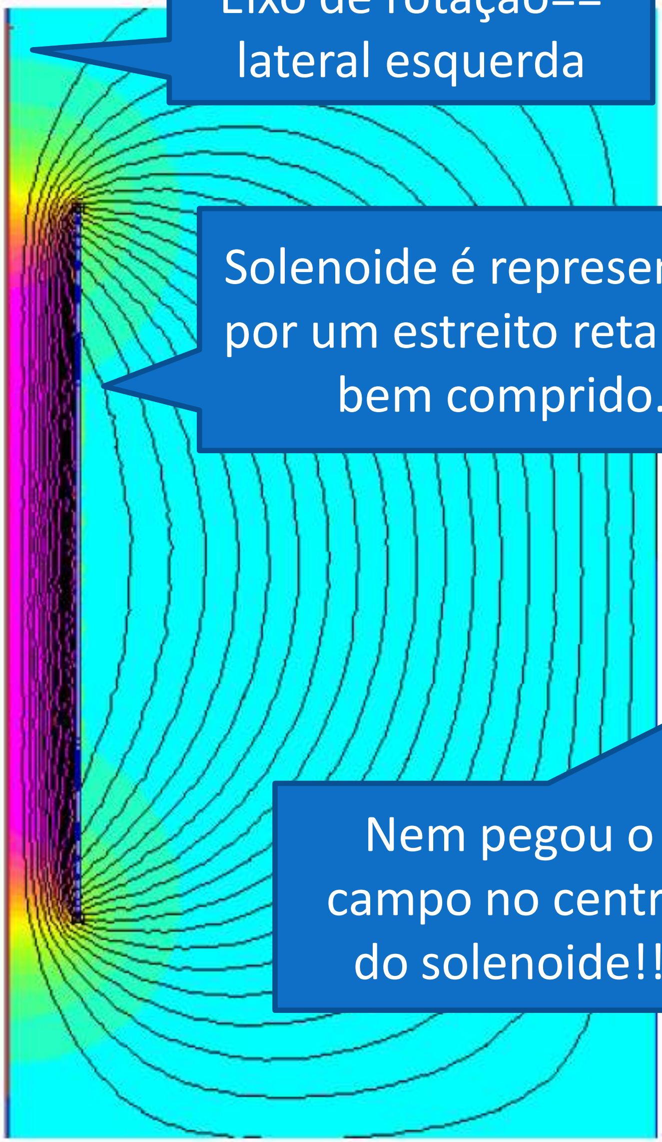
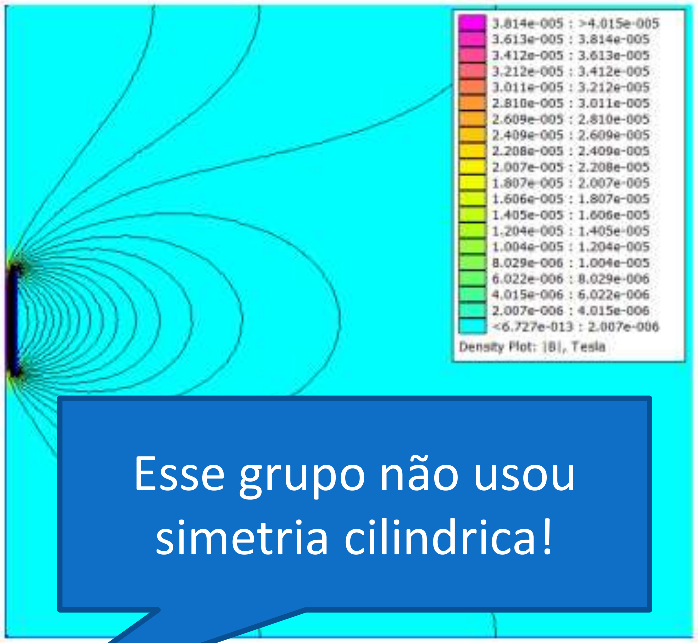
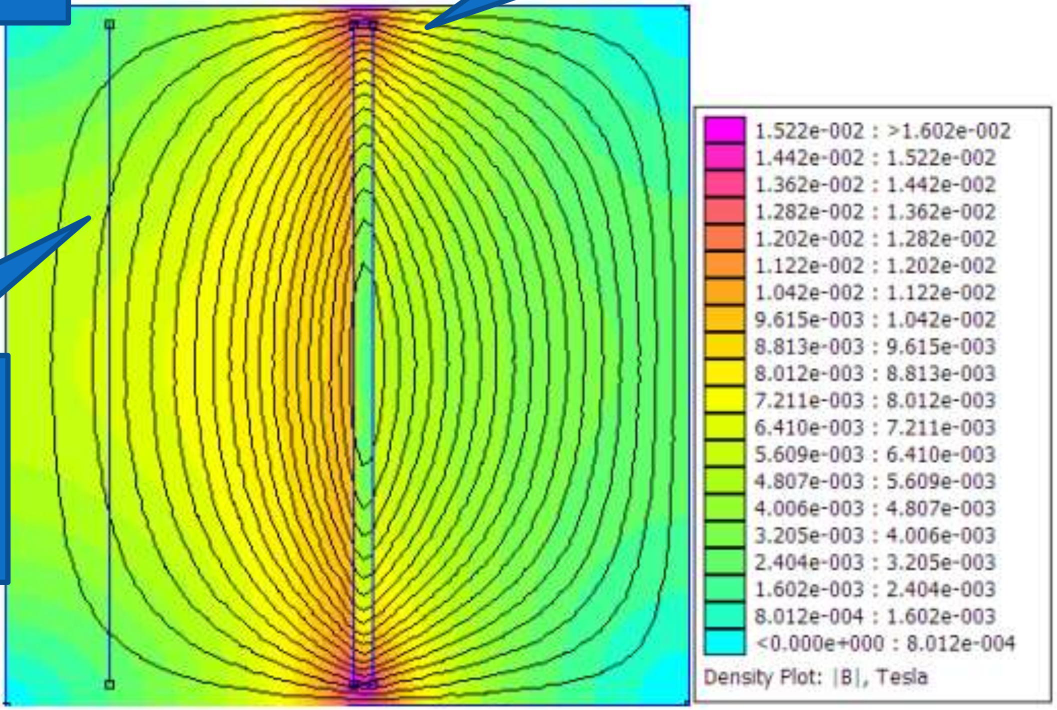
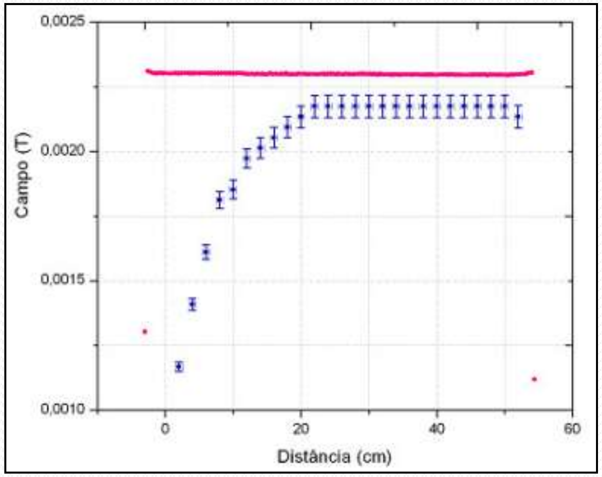


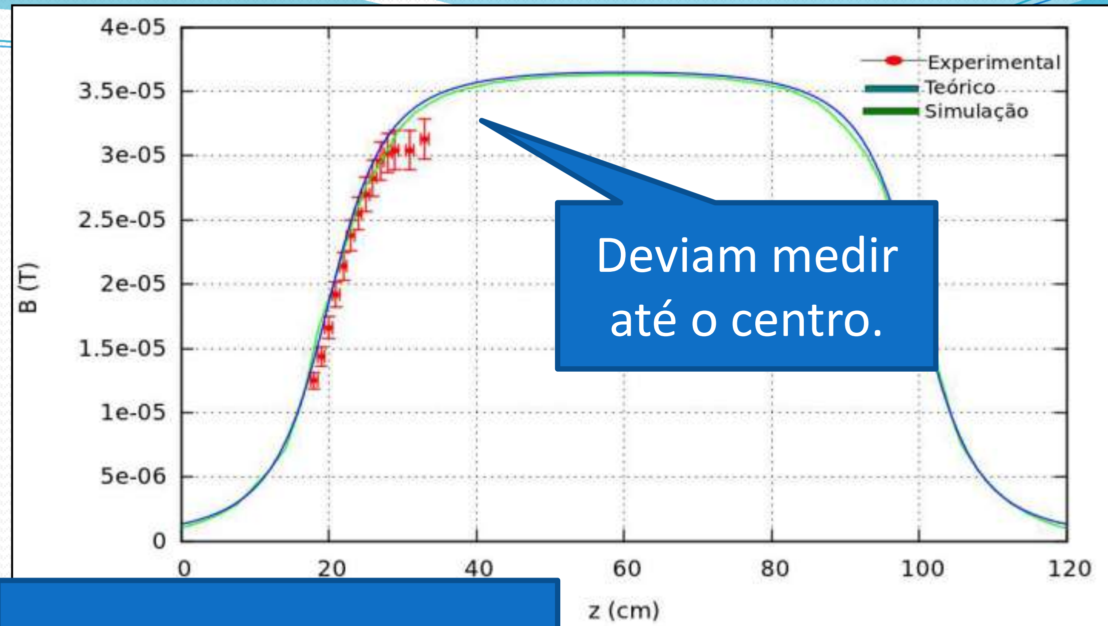
Figura 1. Simulação co campo magnético dentro do raio superior do solenoide





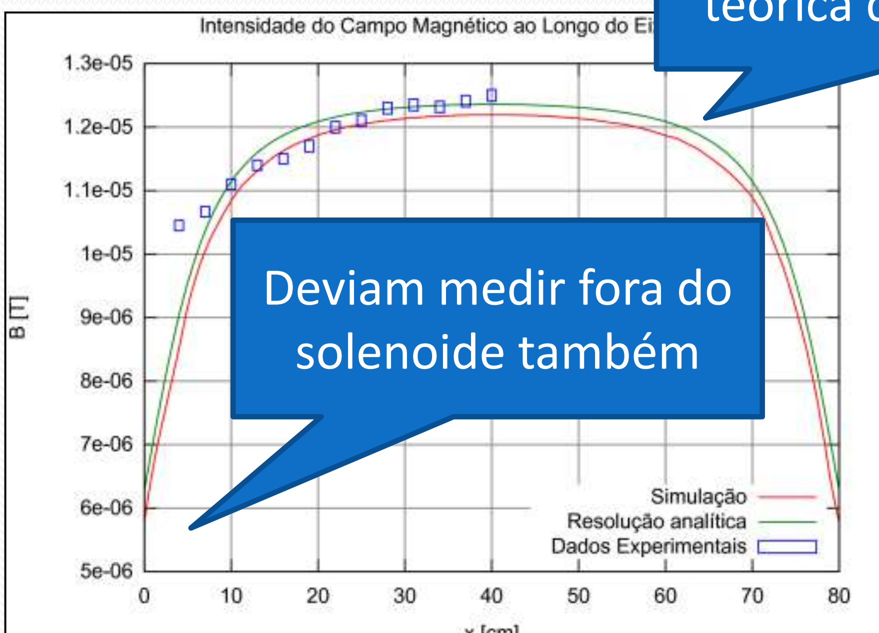
Problemas



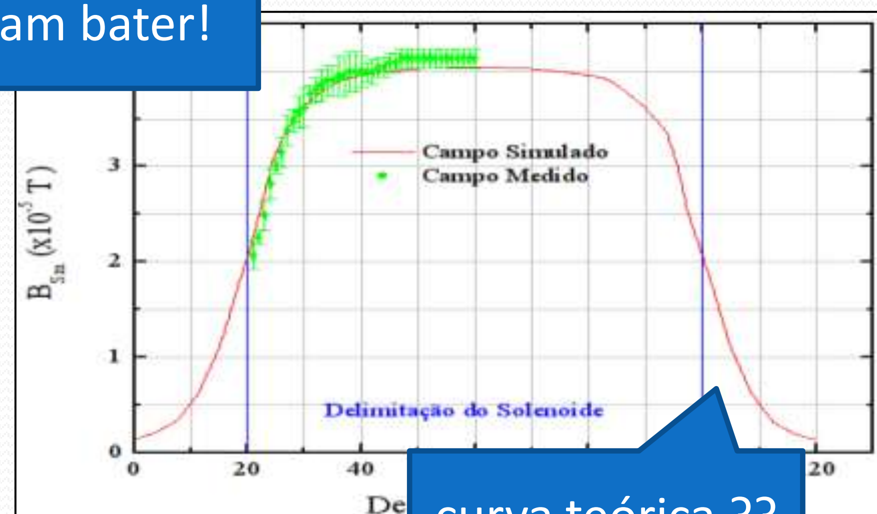


Deviam medir até o centro.

Simulação e curva teórica deviam bater!

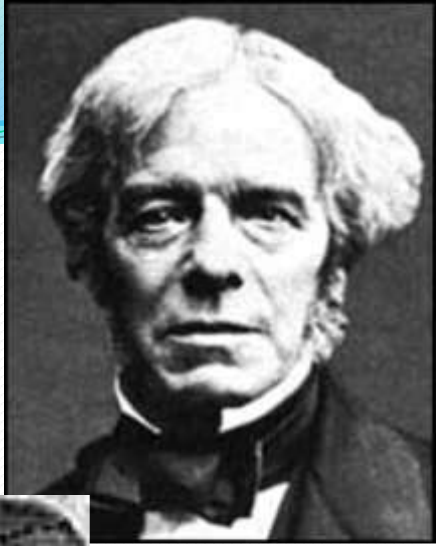


Deviam medir fora do solenoide também



curva teórica ??

Faraday



1791-1867

Lei de Faraday

- **A força eletromotriz induzida em uma espira condutora é igual ao negativo da taxa de variação no tempo do fluxo de campo magnético.**

Força Eletromotriz

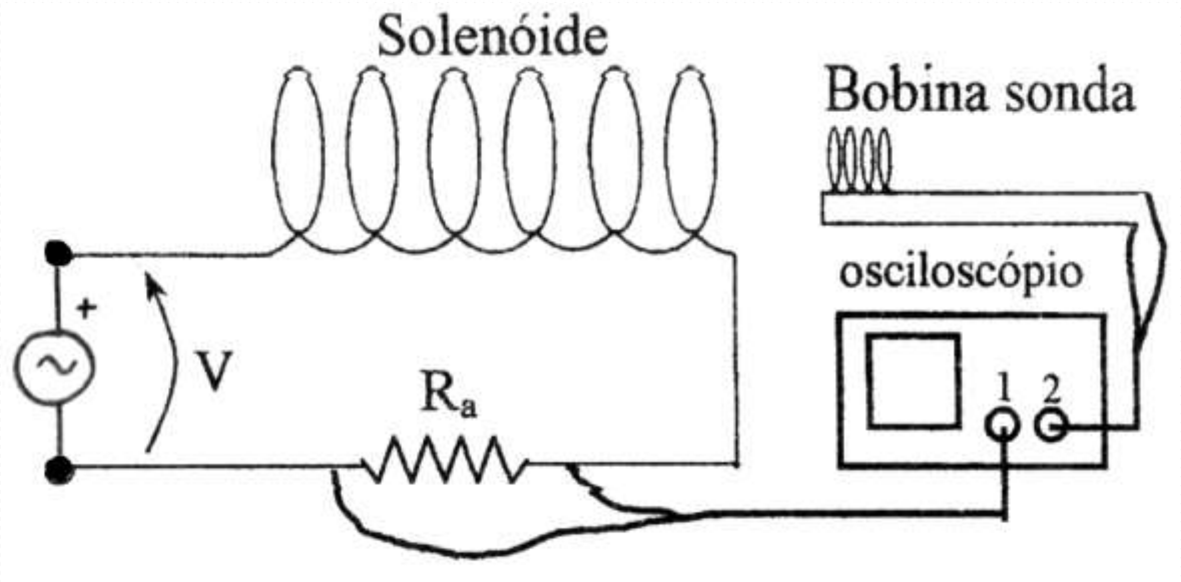
$$\varepsilon = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)$$

Devido a variação do fluxo

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{n} da$$

A FEM e o Campo Magnético

- Corrente $i_S(t) = i_{Sm} sen(\omega t)$
- Campo $B_S(t) = \mu_0 n_S i_S(t)$
- Fluxo $N_b \phi_b = N_b A_b B_S(t)$
- F.E.M. $\varepsilon_b(t) = -N_b A_b \mu_0 n_s \dfrac{d}{dt} i_s(t) = -N_b A_b \mu_0 n_s \omega i_{Sm} \cos(\omega t)$



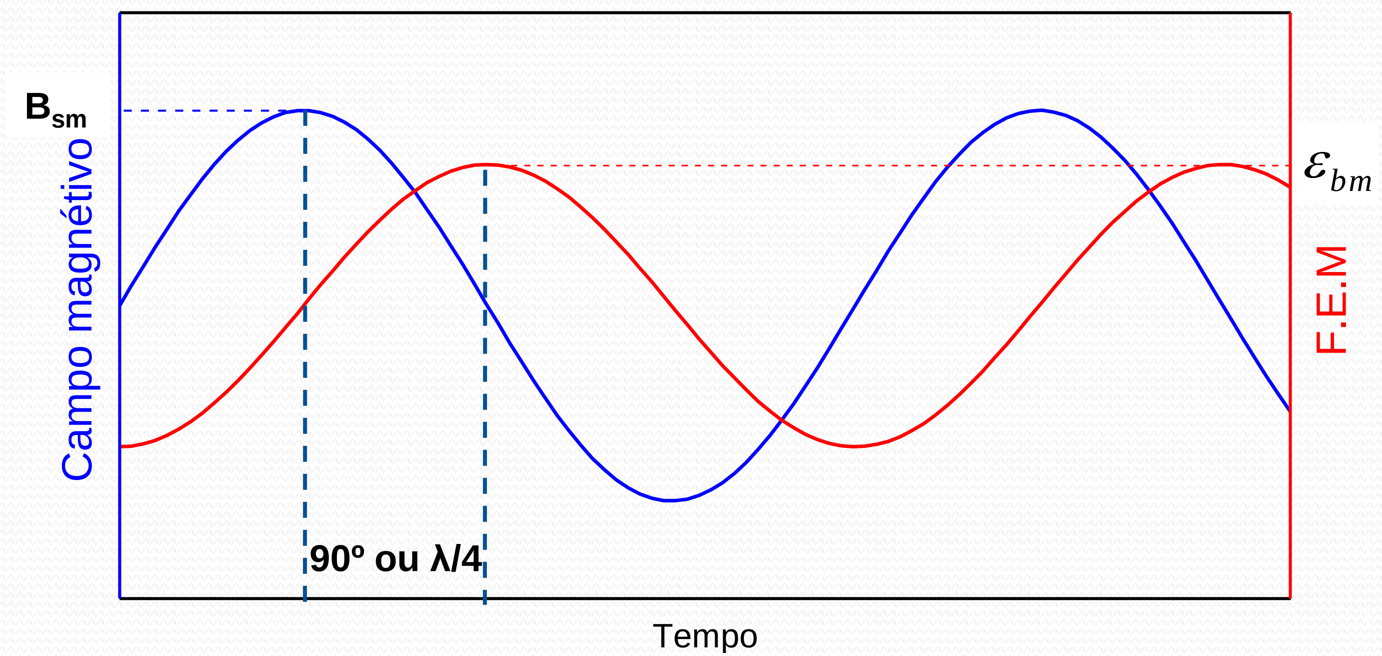
A FEM e o Campo Magnético

- Corrente $\quad i_S(t) = i_{Sm}\boxed{sen(\omega t)}$
- Campo $\quad B_S(t) = \mu_0 n_S i_S(t)$
- Fluxo $\quad N_b \phi_b = N_b A_b B_S(t)$
- F.E.M.

fora de fase

$$\varepsilon_b(t) = -N_b A_b \mu_0 n_s \frac{d}{dt} i_s(t) = \boxed{-}\boxed{N_b A_b \mu_0 n_s \omega i_{Sm}}\boxed{\cos(\omega t)}$$

$$= -\boxed{\varepsilon_{bm}} \cos(\omega t)$$



A FEM e o Campo Magnético

- Corrente $i_S(t) = i_{Sm}\boxed{sen(\omega t)}$
- Campo $B_S(t) = \mu_0 n_S i_S(t)$
- Fluxo $N_b\phi_b = N_b A_b B_S(t)$
- F.E.M. $\varepsilon_b(t) = -N_b A_b \mu_0 n_s \dfrac{d}{dt} i_s(t) = \boxed{-}\,\boxed{N_b A_b \mu_0 n_s \omega i_{Sm}}\,\boxed{\cos(\omega t)}$

fora de fase

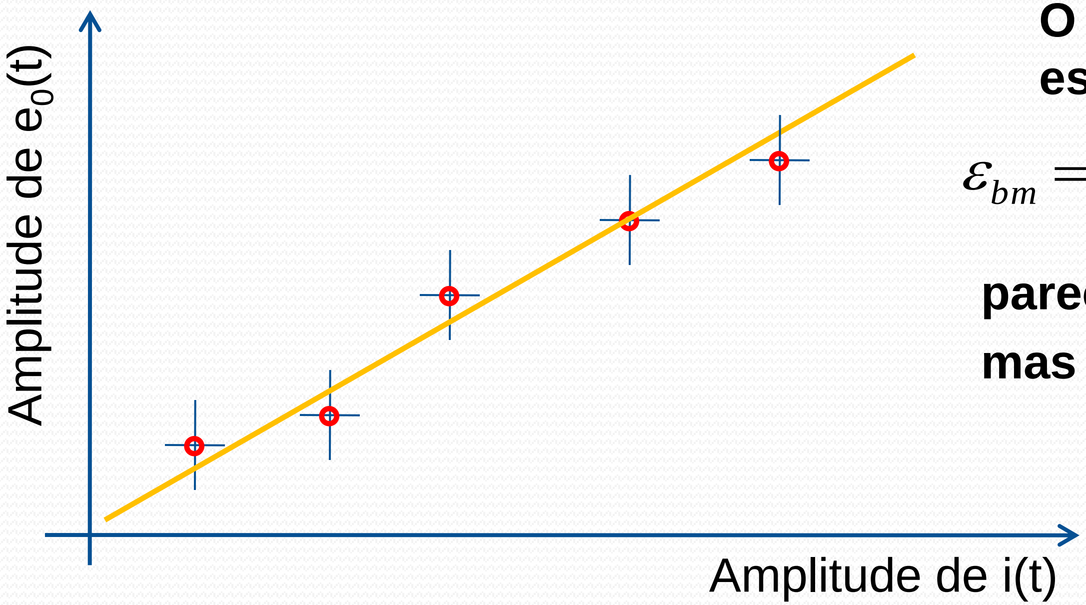
$$= -\boxed{\varepsilon_{bm}} \cos(\omega t)$$

O que lembra esta expressão?

$$\varepsilon_{bm} = \boxed{(N_b A_b \mu_0 n_s \omega)} i_{Sm}$$

parece uma resistência...

mas depende da freqüência



É uma impedância que vem da indutância das bobinas!

A FEM e o Campo Magnético

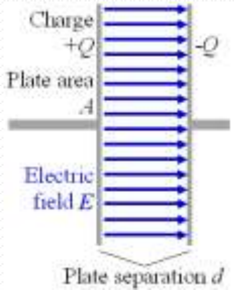
- Quer dizer que duas bobinas interagem e o resultado parece uma resistência ?

- Última aula:
  - Calibraram a bobina sonda
  - Mediram o campo do solenóide: no eixo de simetria
  - Viram o efeito na borda do solenóide

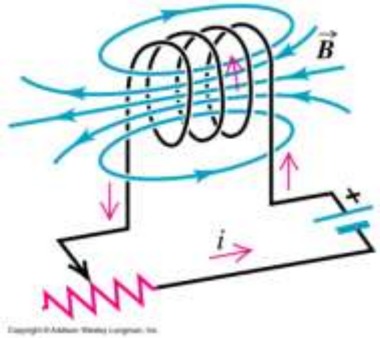
- Nesta aula:
  - Estudar a auto-indutância e a indutância mútua e começar a entender o que é uma impedância

Indutor e Indutância

- Um capacitor produz um campo elétrico
- Podemos armazenar energia no capacitor
- Um circuito com uma resistência e um capacitor demora a entrar em equilíbrio
- Um capacitor tem uma capacitância



- **Um indutor produz um campo magnético**
- Podemos armazenar energia no indutor
- **Um circuito com uma resistência e um indutor também demora**
- Um indutor tem uma indutância



Mas o que é indutância?

- Colocando cargas iguais e opostas **±q** nas placas de um capacitor aparece uma diferença de potencial **V**.
- A capacitância é então definida por:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Colocando uma corrente **i** nas espiras de um indutor, aparece um fluxo magnético **ϕ** <u>em cada espira</u>.
- A indutância é então definida por:

$$L = \frac{N\phi}{i}$$

A unidade é o henry (H):

$$1H = 1T \cdot m^2 / A$$

Qual a indutância do solenóide?

- No solenóide infinito, o campo é constante em seu interior, então por unidade de comprimento:

$$(\phi)(N/l) = (BA)(n)$$

N: número de espiras

n: espiras / comprimento

- O campo magnético é dado por:

$$B = \mu_0 n i$$

- Então a indutância será

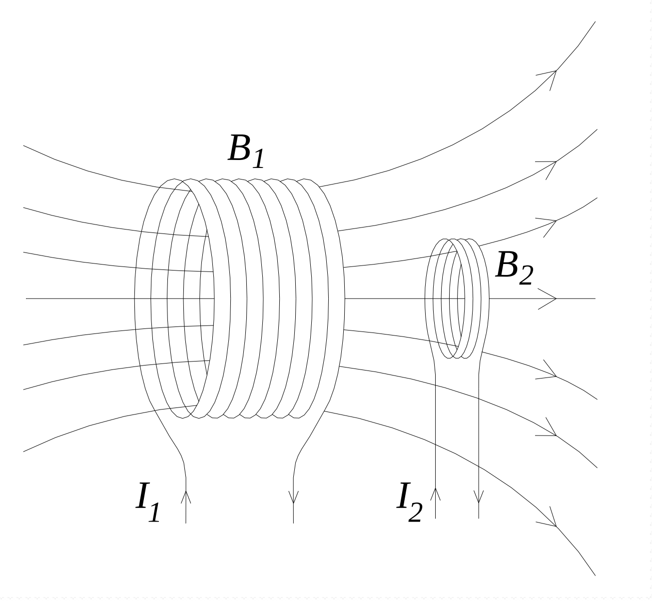
$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{(nl)(BA)}{i} = \frac{nl(\mu_0 n i)A}{i}$$

$$\boxed{L/l = \mu_0 n^2 A}$$

Indutância por unidade de comprimento

Indutância Mútua

- Vamos supor agora que temos duas bobinas de área conhecida, **b1** e **b2**, coaxiais, e que uma delas, **b1**, seja percorrida por uma corrente elétrica variável no tempo, **i1**.
- O campo magnético variável, criado pela bobina **b1** que é percorrida pela corrente, variável **i1**, gera um fluxo magnético **ϕ21**, variável no tempo, através da segunda bobina **b2**:



$$\Phi_{21} = N_2 B_1 A_2$$

Fluxo na espira **2**, devido ao campo de **1**

Indutância Mútua

- Como a forma e a posição relativa das duas bobinas não se alteram, o fluxo de campo magnético gerado pela bobina **b1**, que atravessa a bobina **b2**, **ϕ21**, é diretamente proporcional à corrente variável **i1** que percorre a bobina **b1**

$$\Phi_{21} = const. \times i_1$$

- Portanto, **ϕ21** será um fluxo variável no tempo, o que causa o aparecimento de uma f.e.i., **ε21**, na bobina **b2**

$$\varepsilon_{21} \propto -\left(\frac{d\Phi_{21}}{dt}\right) = -const. \times \left(\frac{di_1}{dt}\right)$$

Indutância Mútua

- Essa constante é chamada de coeficiente de indutância mútua **M21**.

$$\varepsilon_{21} \propto -\left(\frac{d\Phi_{21}}{dt}\right) = -const.\times\left(\frac{di_1}{dt}\right)$$

- Seu valor é determinado pela geometria de cada bobina e de sua posição relativa. A unidade, no sistema MKS, é o Henry, a mesma da indutância.

$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

Indutância Mútua

- Mantendo a mesma geometria das bobinas **b_1** e **b_2** e sua posição relativa, como seria a força eletromotriz induzida na bobina **b_1** se uma corrente, variável no tempo, **i_2**, percorresse a bobina **b_2**?

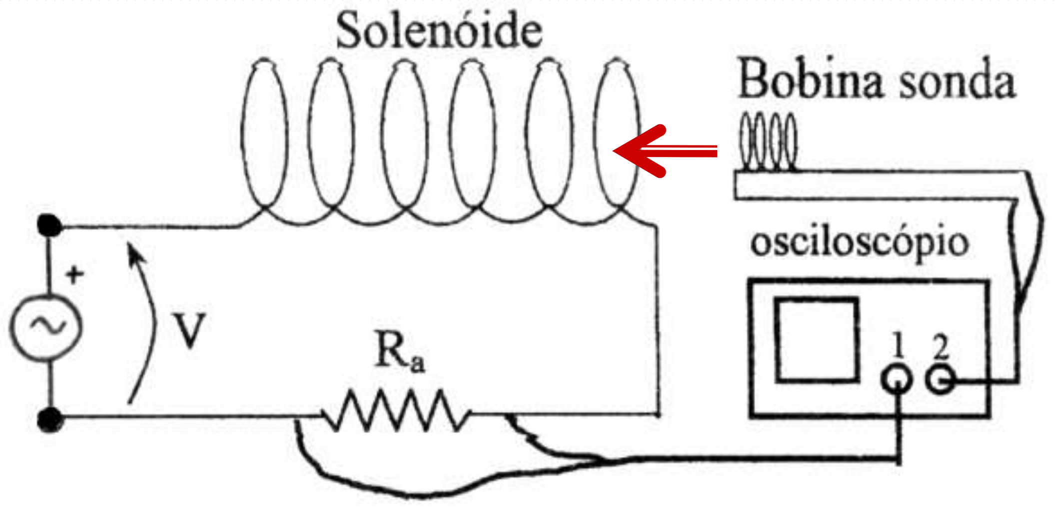
$$\varepsilon_{12} = -M_{12}\left(\frac{di_2}{dt}\right)$$

- Pode-se provar que qualquer que seja a simetria do arranjo de espiras que compõe as bobinas **b_1** e **b_2**:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Indutância Mútua

- O objetivo desta parte da experiência é medir a indutância mútua entre um solenóide e uma bobina, coaxiais, com a bobina colocada dentro do solenóide, no centro.
  - Tanto o solenóide quanto a bobina têm geometria e número de espiras, ou área, conhecidos.



Indutância Mútua: solenóide x bobina sonda

- Mesma montagem da calibração da sonda em carretel

- Corrente no solenóide:

$$i_S = i_{Sm}\cos(\omega t)$$

- Campo do solenóide no centro (em L/2, i.e., $\theta_1 = \theta_2$) :
  - D_S = diâmetro do solenóide
  - L_S = comp. do solenóide

$$B_S = \mu_0 N_S i_S \frac{1}{\sqrt{D_S^2 + L_S^2}}$$

Não sabe de onde saiu? Deduza :-)

Indutância Mútua: solenóide x bobina sonda

- O fluxo de campo magnético (do solenóide) que atravessa a bobina é, dada a geometria, ϕ_{bS}:

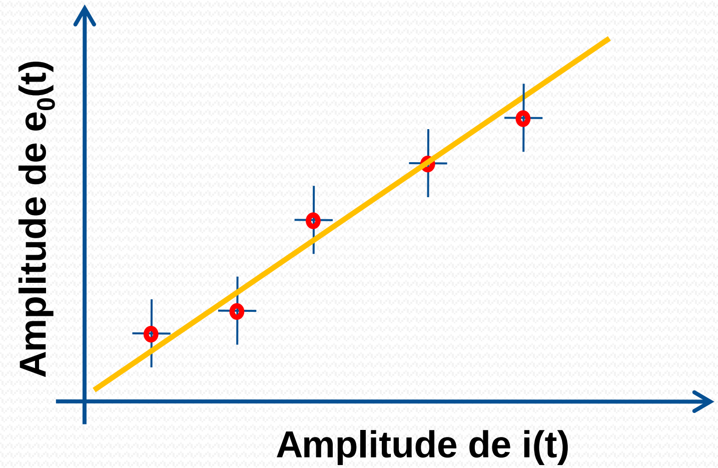
$$\Phi_{bS} = A_b N_b B_S = A_{eff} B_S$$

- A f.e.i. na bobina:

$$\varepsilon_{bS} = -\frac{d\Phi_{bS}}{dt} = -M_{bS}\frac{di_S}{dt}$$

$$\varepsilon_{bm} = \boxed{(N_b A_b \mu_0 n_s \omega)} i_{Sm}$$

$$\varepsilon_{bS} = -\boxed{A_{eff}\frac{\mu_0 N_S}{\sqrt{D_S^2 + L_S^2}}}\frac{di_S}{dt}$$



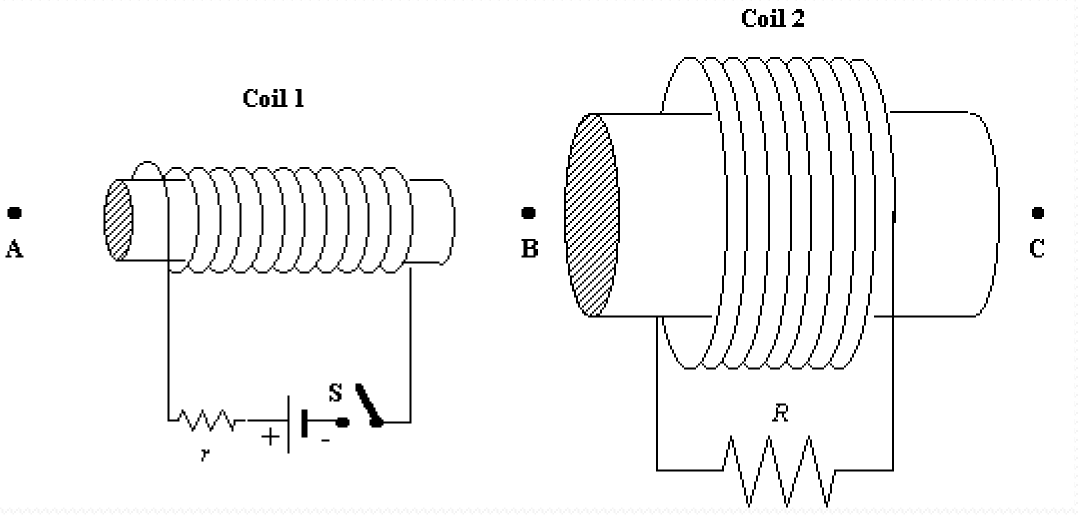
Indutância Mútua: solenóide x bobina sonda

- O coeficiente de indutância mútua $\mathbf{M_{bS}}$, neste caso particular, é:

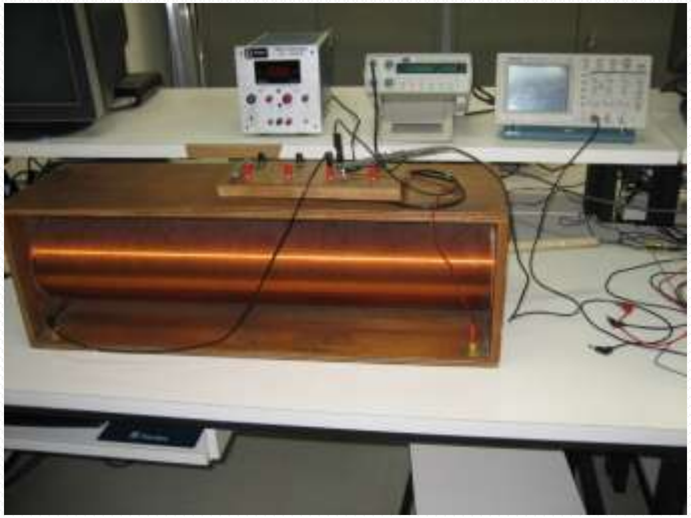
$$M_{bS} = A_{eff}^{bobina} \frac{\mu_0 N_S}{\sqrt{D_S^2 + L_S^2}}$$

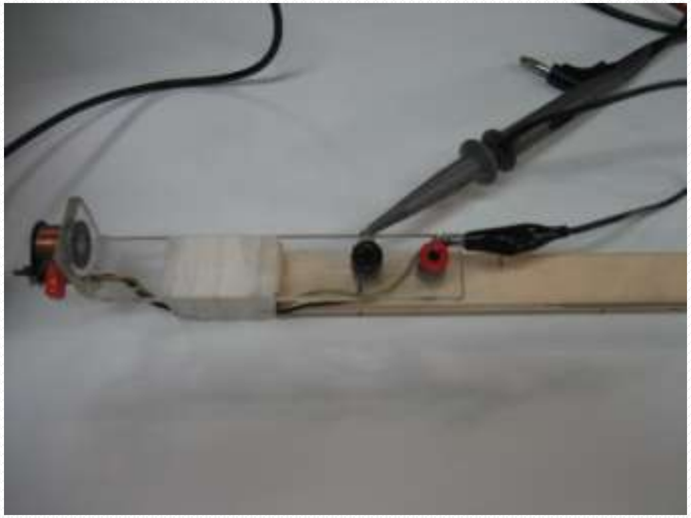
- E a **amplitude** da FEM induzida fica:

$$\varepsilon_{Sm} = \omega M_{bS} i_{Sm}$$



Usando o mesmo equipamento





Tarefas da Semana (1)

- Mesma montagem da calibração da sonda em carretel
  - Usar $R_{auxiliar}$ de 1 a 10 ohms
  - Freqüência: ~3000Hz

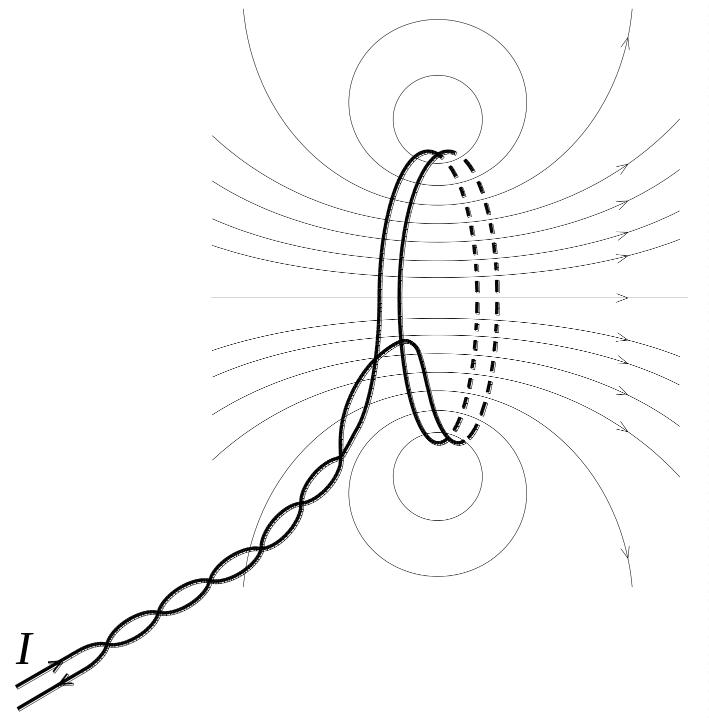
- Medir a f.e.i. induzida na bobina em função da corrente no solenóide e fazer o gráfico
  - Calcular a indutância mútua
- Comparar com a previsão teórica e com os resultados dos colegas.

Auto-indutância

- Sempre que uma diferença de potencial, de alguma fonte externa, é aplicada entre os terminais de uma bobina, a corrente resultante produz um campo magnético.
- Se uma bobina em circuito fechado for imersa num campo magnético variável no tempo, vai aparecer nesse circuito uma força eletromotriz induzida, **f.e.i.**.
- **O que ocorre se foi a própria bobina a responsável pela criação do campo magnético variável no tempo?**

Auto-indutância

O campo gerado pela bobina é responsável por um fluxo magnético variável no tempo, através da própria bobina, e, de acordo com a lei de Faraday, pelo aparecimento de uma f.e.i.



a força eletromotriz líquida que atua na bobina é a soma da força eletromotriz que produziu a corrente e da força eletromotriz auto-induzida.

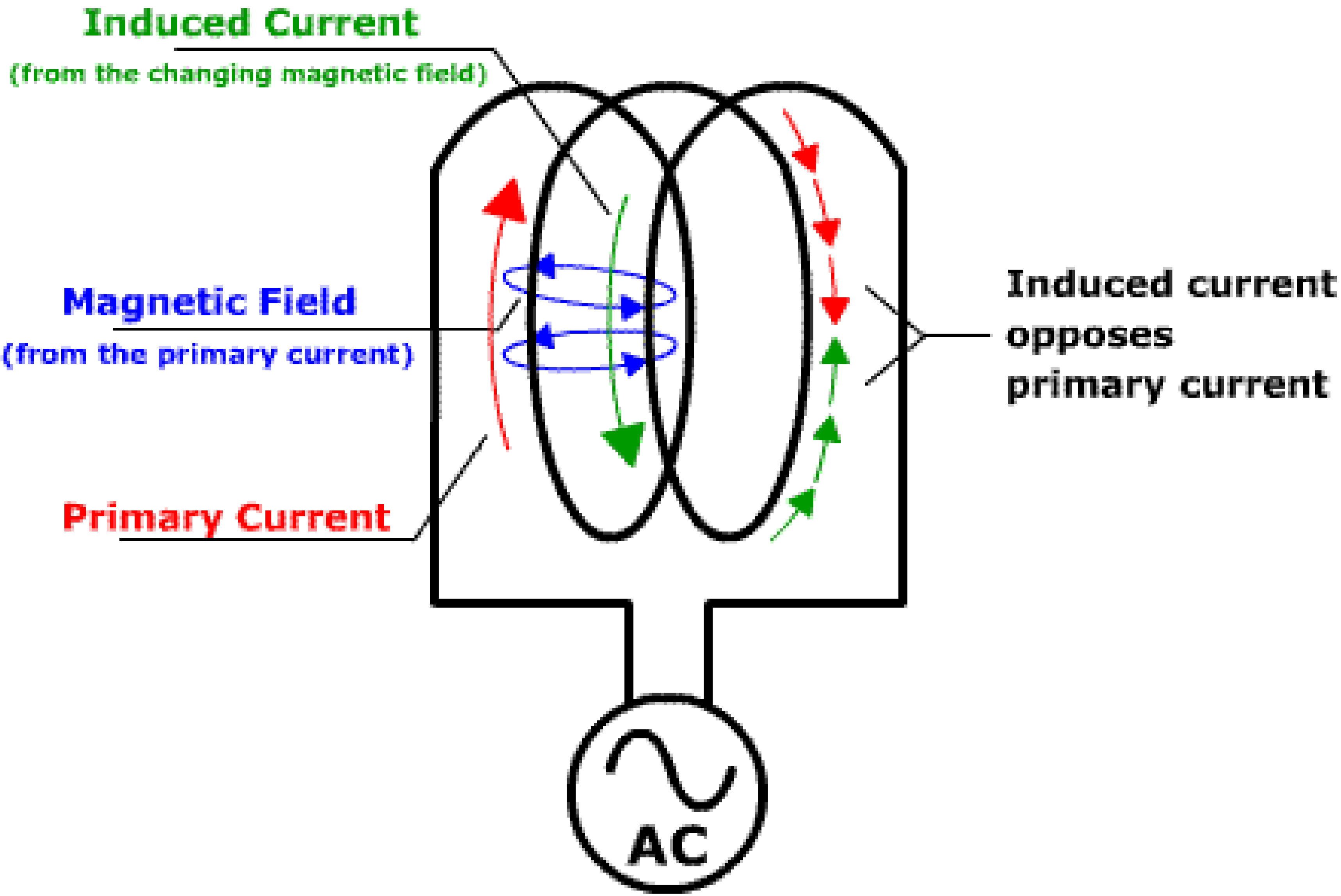
Auto-indutância

- Em outras palavras, sempre que a corrente numa bobina é dependente do tempo, a bobina vai reagir a essa corrente, modificando-a.

- Pela **lei de Lenz** deduzimos que a força eletromotriz auto-induzida age sempre numa direção tal que se opõe à variação da corrente na bobina, ou seja, ela tenta manter a corrente constante.
- Num certo sentido, a indutância é o equivalente elétrico da inércia, ou resistência à mudança.
- A força eletromotriz auto-induzida tem a forma dada pela lei de Faraday

$$\varepsilon = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)$$

Corrente líquida = primária - induzida



Auto-indutância

- Vamos calcular a auto-indutância do solenóide finito:
  - Campo longe da borda é constante e paralelo ao eixo
  - Vetor área das espiras do solenóide também é paralelo ao eixo
- O fluxo de campo magnético, ϕ_B, através do solenóide, neste caso, só vai depender da corrente (variável) do solenóide:
  - porque o campo magnético é diretamente proporcional à corrente e nenhum dos outros parâmetros dos quais esse campo depende, varia.

Auto-indutância do solenóide

Para qualquer solenóide o fluxo é diretamente proporcional à corrente:

$$N\Phi_B = Li$$

O que definimos, em analogia com os capacitores, como sendo a indutância, é na verdade a auto-indutância!

E a lei de Faraday nos diz que:

$$\varepsilon = -\frac{d(N\phi)}{dt}$$

Portanto:

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$$

A Indutância mútua era:

$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

Tarefas da Semana (2)

- Varie a corrente no solenóide e meça a f.e.i. nele induzida .
  - Faça o gráfico da f.e.i. pela corrente e obtenha o valor de L do solenóide.
  - Compare com o valor previsto teoricamente e com os valores dos colegas.

$$\varepsilon_{Sm} = L\omega i_{Sm}$$

  - Há diferença de fase? É o que você esperava? É o previsto teoricamente? Comente

Auto-indutância: dica

- Característica do osciloscópio: os terras das pontas de prova estão ligados no mesmo ponto dentro do aparelho.
- **Portanto todos os elementos de circuito que estiverem entre os dois terras estarão curto-circuitados.**
- **Você pode ligar somente um deles para evitar curtos: cada canal estará medindo a tensão entre a ponta de prova e o primeiro terra que ela encontra.**
- **Se está medindo com a duas pontas no mesmo circuito certifique-se que o ponto de terra está entre as duas. Se precisar altere a ordem dos elementos do circuito para permitir isso.**

Auto-indutância: a freqüência

- Quando se mede a tensão sobre o solenóide, ela é proporcional à impedância Z_S, do solenóide.

$$Z_S = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

- Mas queremos medir **L**, portanto, R^2 deve ser desprezível em relação a $\omega^2 L^2$.

- Vamos usar o mesmo gerador de áudio freqüência, freqüência de **3000 Hz**. Nessa freqüência o efeito da resistência do solenóide é desprezível quando comparado ao da sua indutância.
  - Verifique!