

Física Experimental IV

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 5, Experiência 1 Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa

hbarbosa@if.usp.br

Ramal: 6647

Ed. Basílio Jafet, sala 100

Próximas duas Semanas

- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC muda o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
 - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
 - Diodo → capacitor não linear
 - **A dinâmica muda totalmente → Caos**

O que é Caos ?

Quais são os limites para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?

Comportamento regular rígido

- Pêndulos (relógio)
- Sistema massa-mola
- Queda livre
- Circuito RLC comum

Sistemas que apresentam Caos

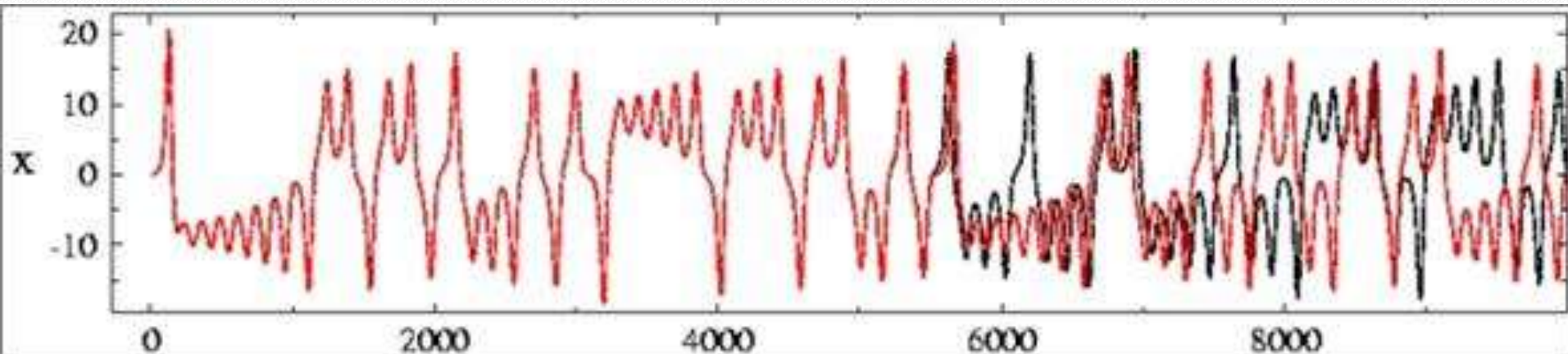
- Clima
- Crescimento populacional
- Pêndulo duplo
- Circuito RLD

Comportamento totalmente aleatório

- Jogo de dados
- Decaimento radioativo
- Movimento Browniano

CAOS: Principais Características

- São sistemas **determinísticos** (não são probabilísticos), ou seja, existem equações que descrevem sua evolução, e as equações são **não lineares**.
- Apresentam **sensibilidade a condições iniciais**, ou seja, soluções partindo de condições iniciais muito próximas divergem rapidamente.
- As trajetórias são muito irregulares



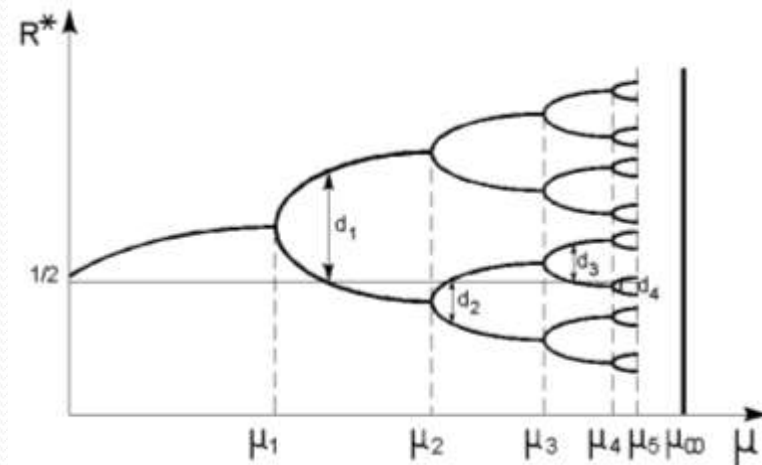
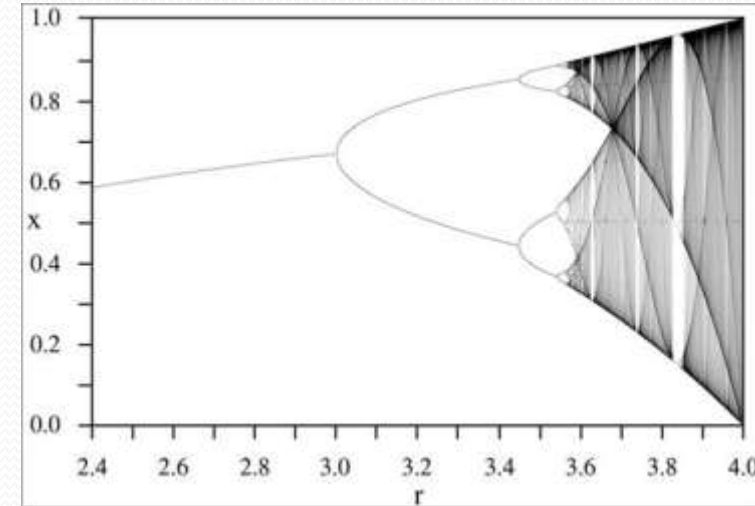
CAOS: Como se chega lá?

Bifurcação

- A rota mais comum para o caos é a **bifurcação de períodos** (cenário de Feigenbaum).
- Dobra-se o número de atratores para valores do parâmetro de controle $\mu = \mu_n$ cada vez mais próximos

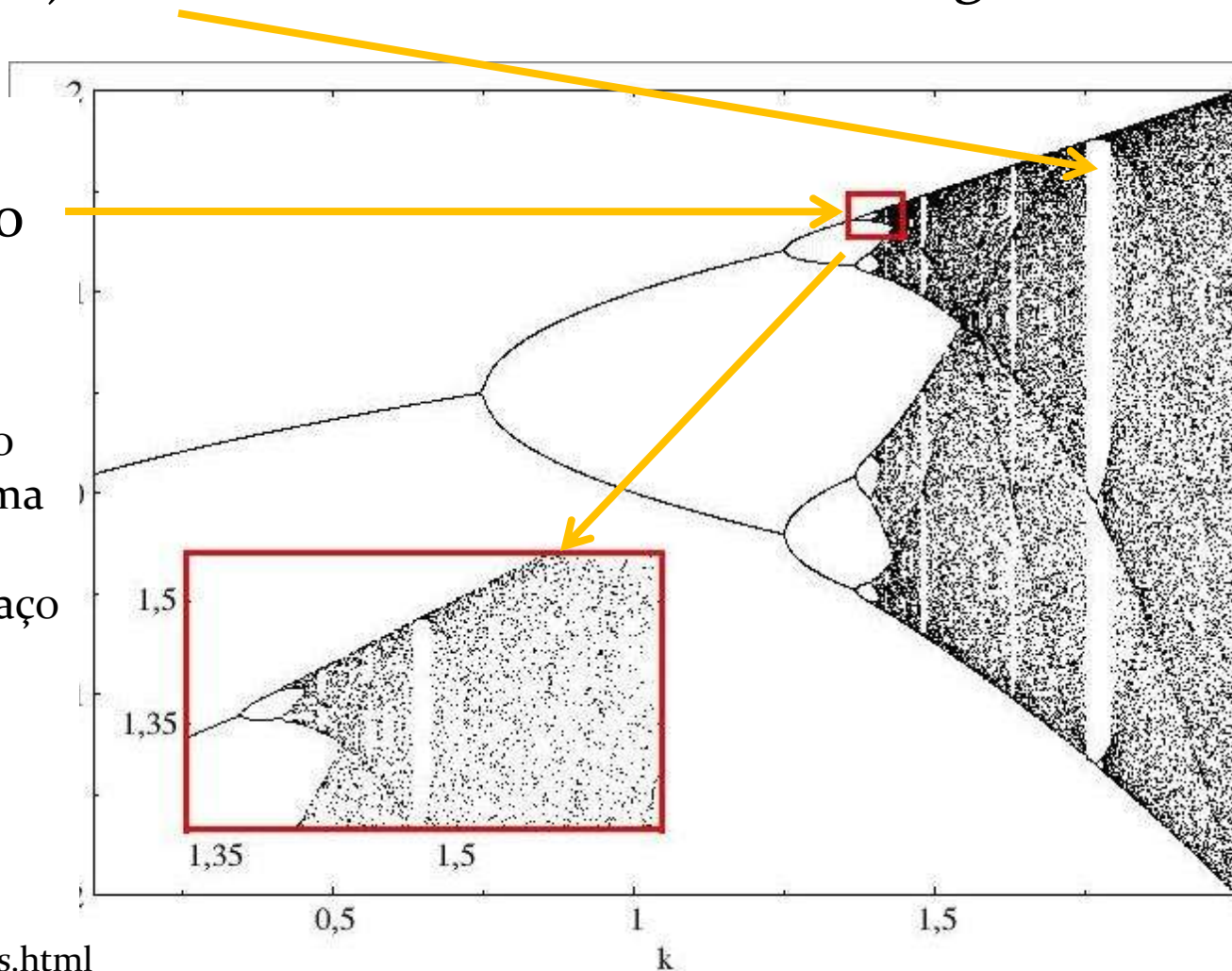
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta$$

$$\delta = 4,669201609 1029909\dots$$



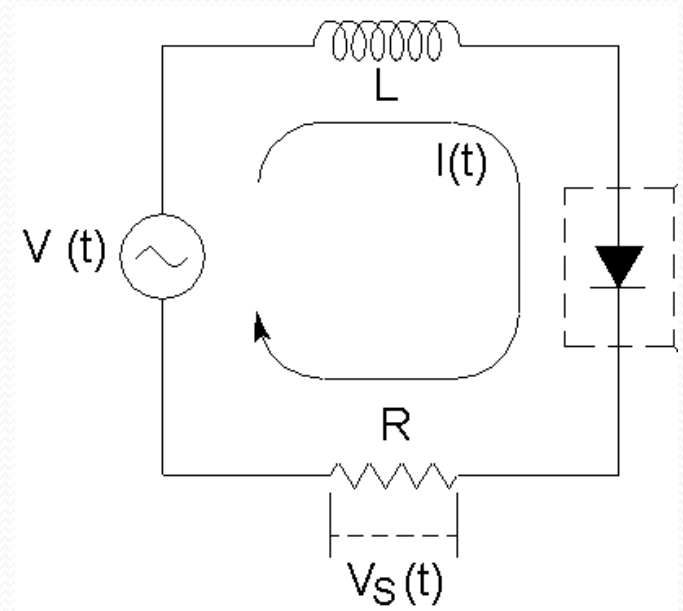
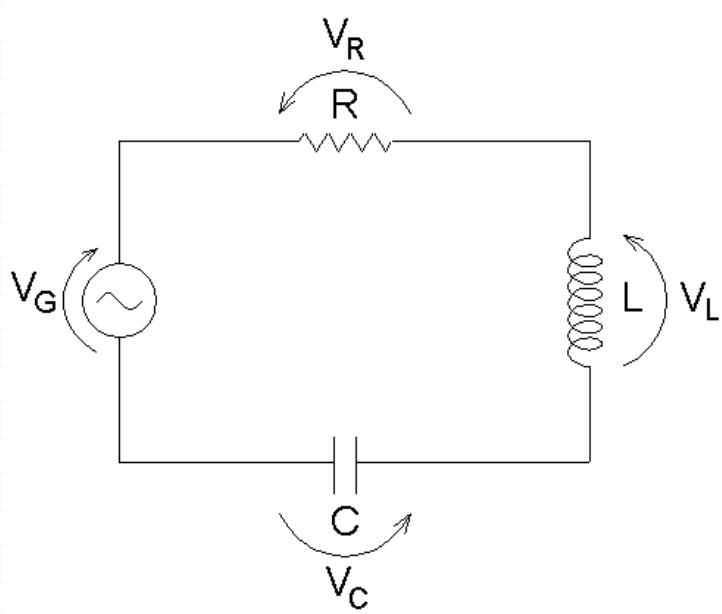
Caos e Fractais

- A sucessão de dobramentos do período acaba levando ao domínio caótico, que *parece* (mas não é) uma nuvens de pontos dispersos.
- No meio do caos, há janelas indicando uma dinâmica organizada e previsível.
- Um pequeno pedaço é similar ao diagrama todo \Rightarrow fractal.
- ... Ou melhor: o domínio caótico aparece como uma nuvens de pontos com dimensão fractal no espaço de parâmetros



Objetivos Para as Próximas Semanas

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



- **Semana 1**

- Teoria de caos e experimentos computacionais

- **Semana 2**

- Medidas experimentais com RLD



TAREFAS SEMANA PASSADA



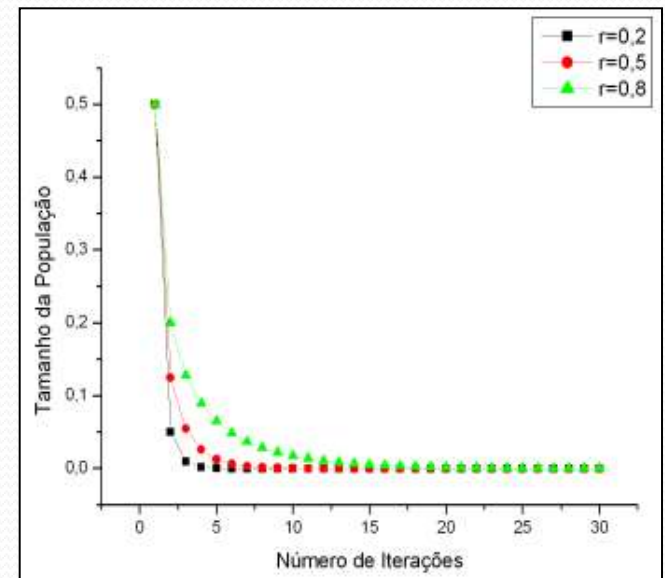
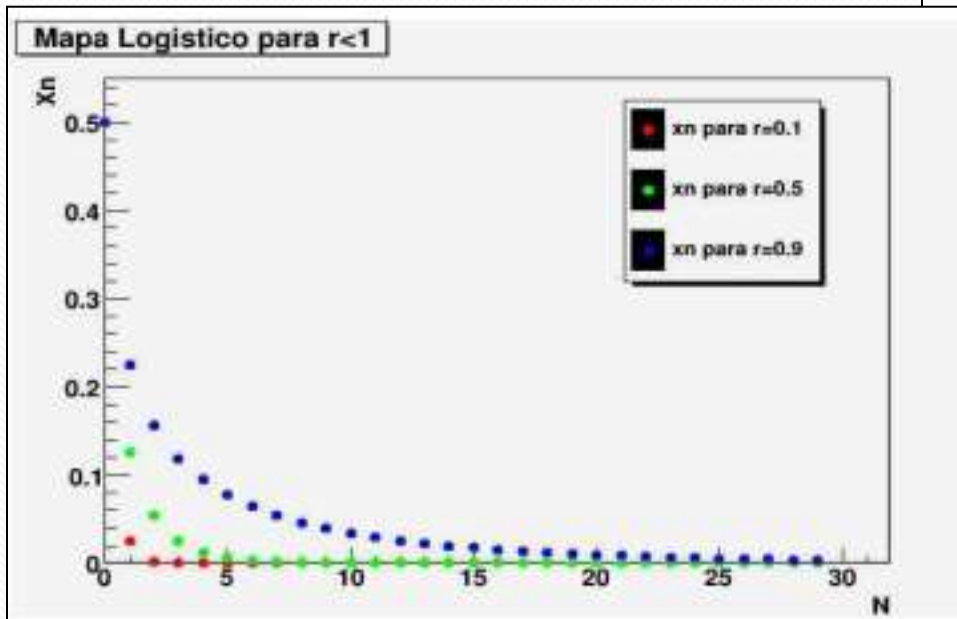
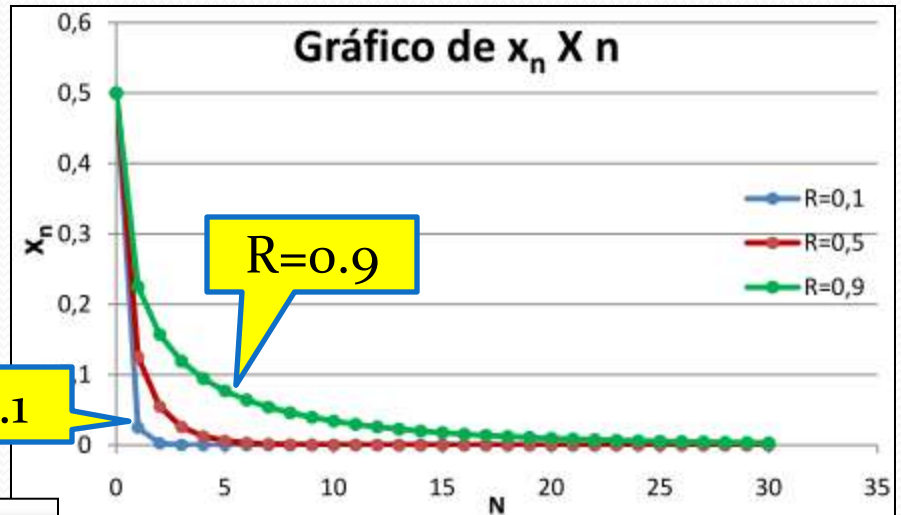
Para a próxima semana 1

A convergência para os atratores:

- Fazer os gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle. Deixando x_0 fixo em **0.5**, faça:
 - Três valores de r para $0 < r < 1$ (no mesmo gráfico)
 - Três valores de r para $1 < r < 3$ (idem)
 - Dois valores de r para $3 < r < 1 + \text{raiz}(6)$ (idem)
 - **Atenção: que intervalo de n é interessante mostrar para cada um deste gráficos? Precisa mostrar até $n=500$? Queremos ver os regimes transientes e estacionários.**
- Para cada intervalo, explique o que esta ocorrendo:
 - Qual o numero de atratores?
 - Por que uma determinada solução é o atrator?
 - Por que existe(m) esse(s) atrator(es)?

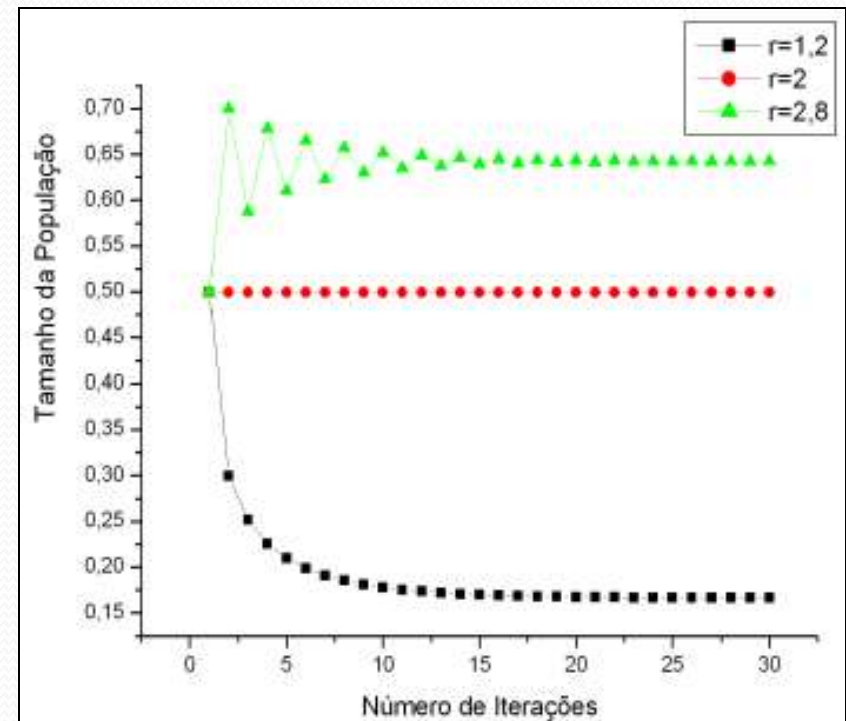
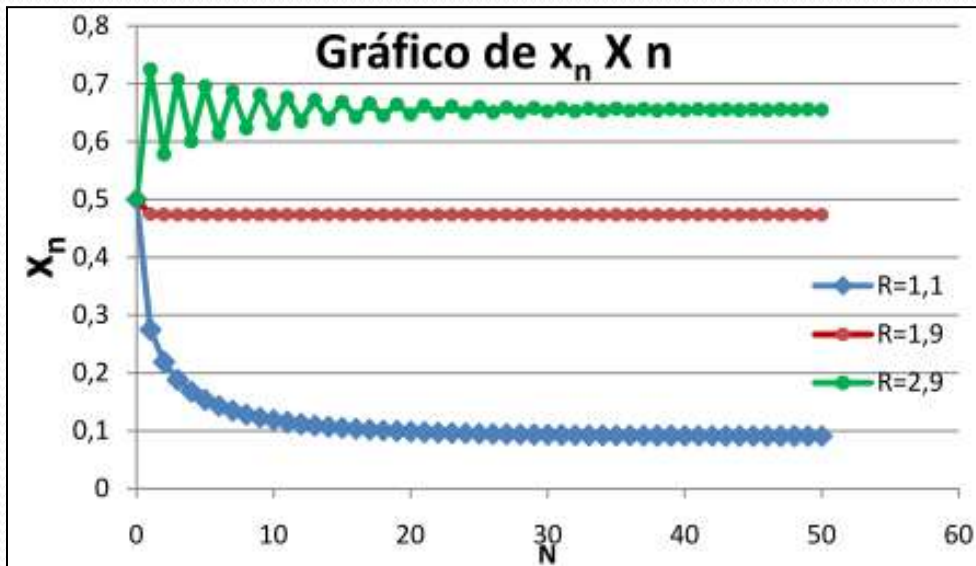
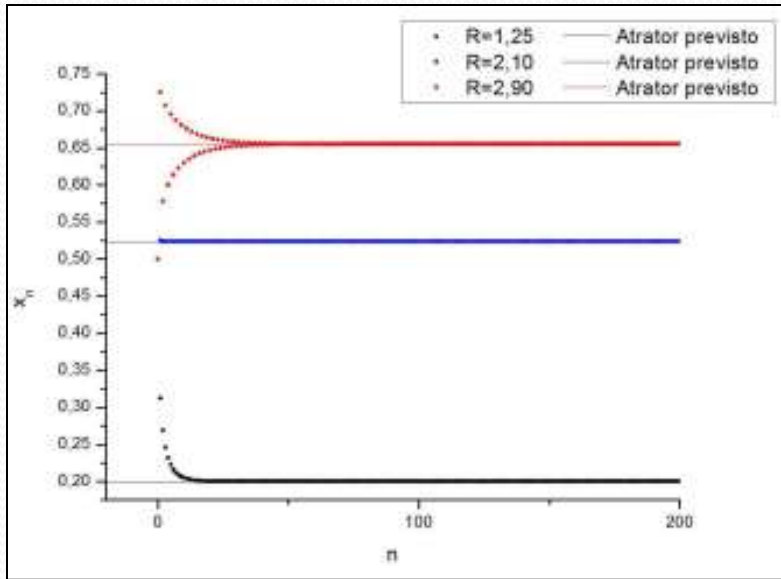
$0 < R < 1$ Solução $X_n \rightarrow 0$

Quanto menor o valor de r , mais rápido a população morre...

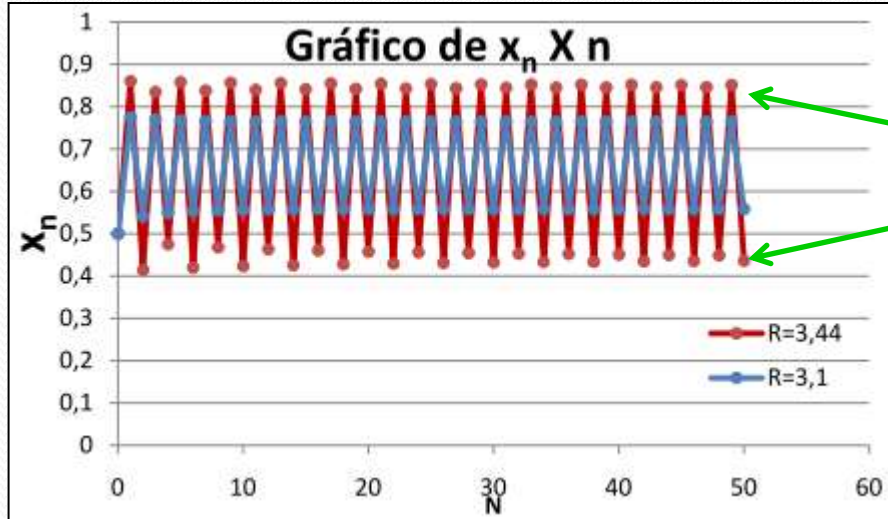


$1 < R < 3$ Solução $X_n \rightarrow 1 - 1/R$

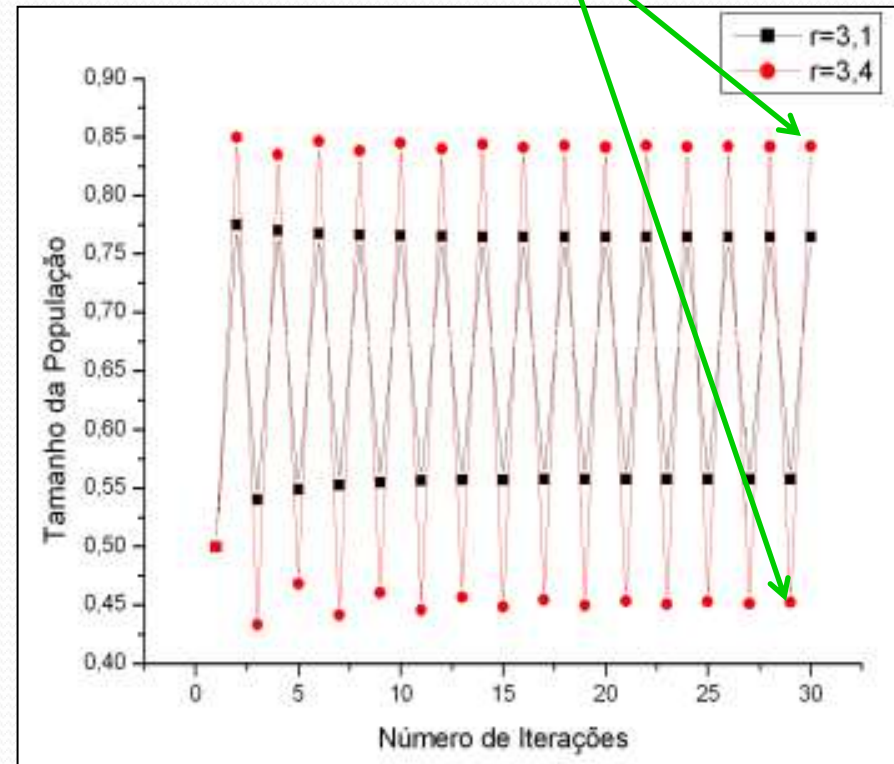
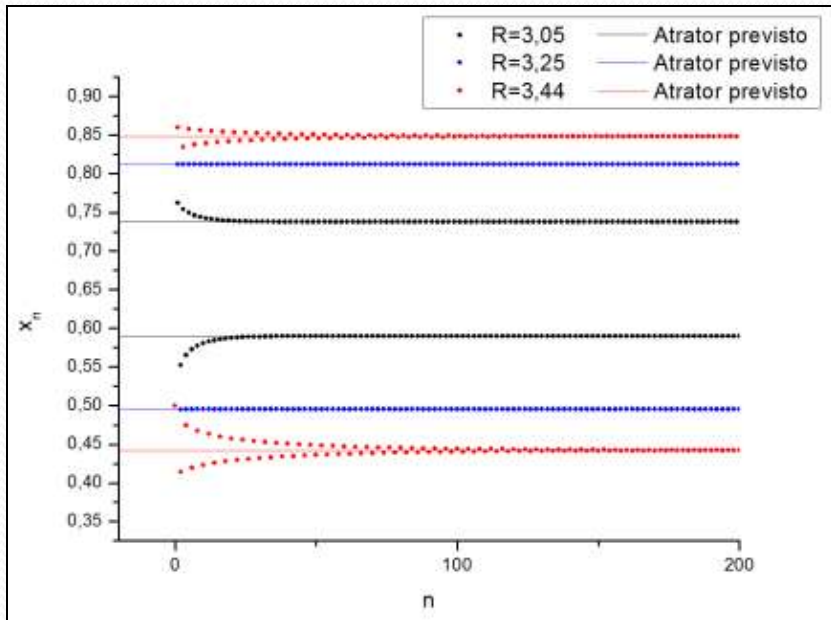
Para $r > 2$, a população oscila antes de estabilizar
Para $r < 2$, a população vai mais suavemente



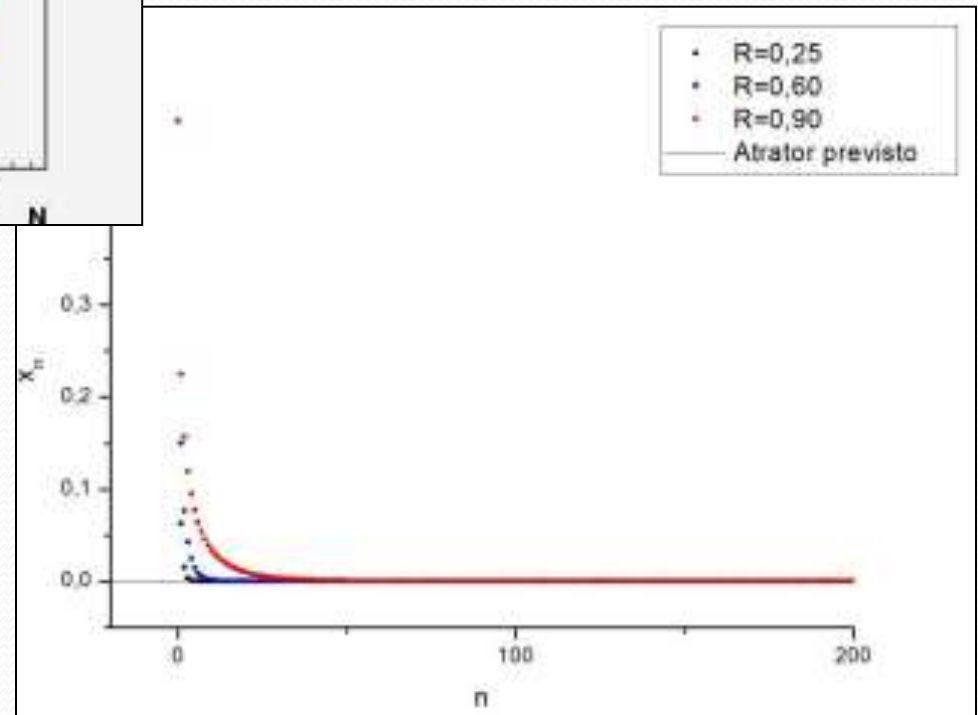
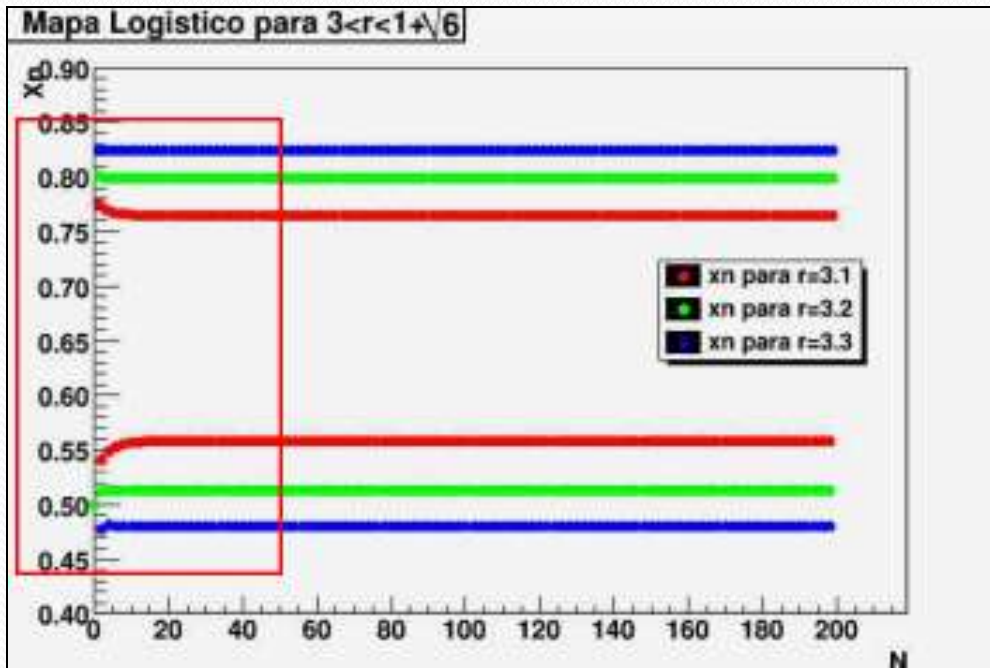
$3 < R < 1 + \sqrt{6}$ Dois Atratores



Nestes valores de r , há dois atratores.
Para valores maiores de r , a população oscila antes de estabilizar

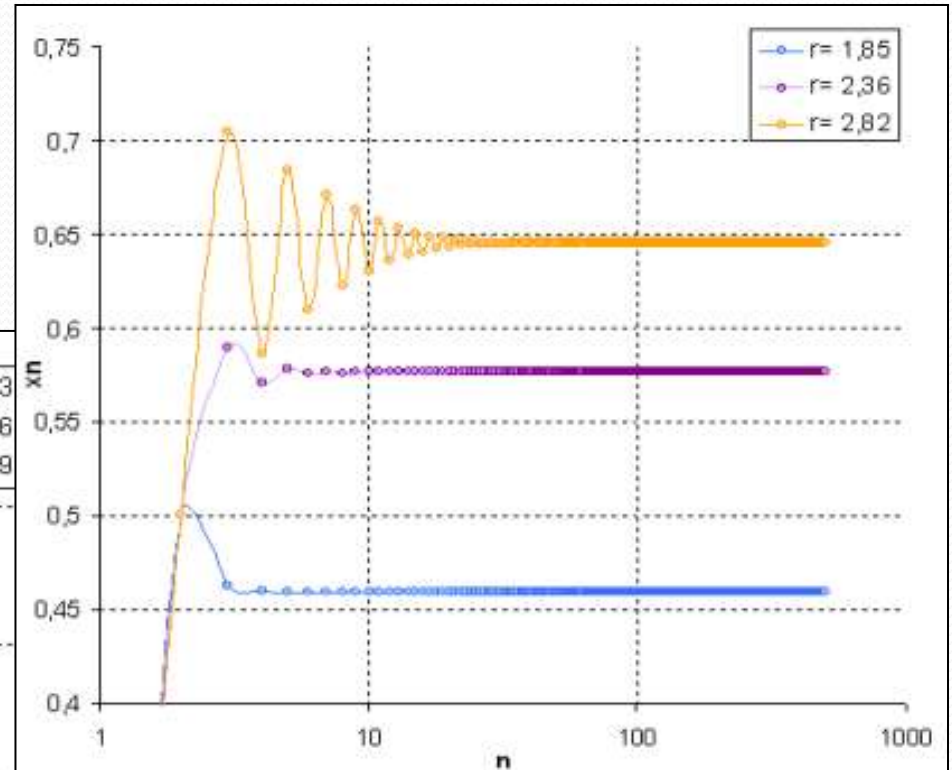
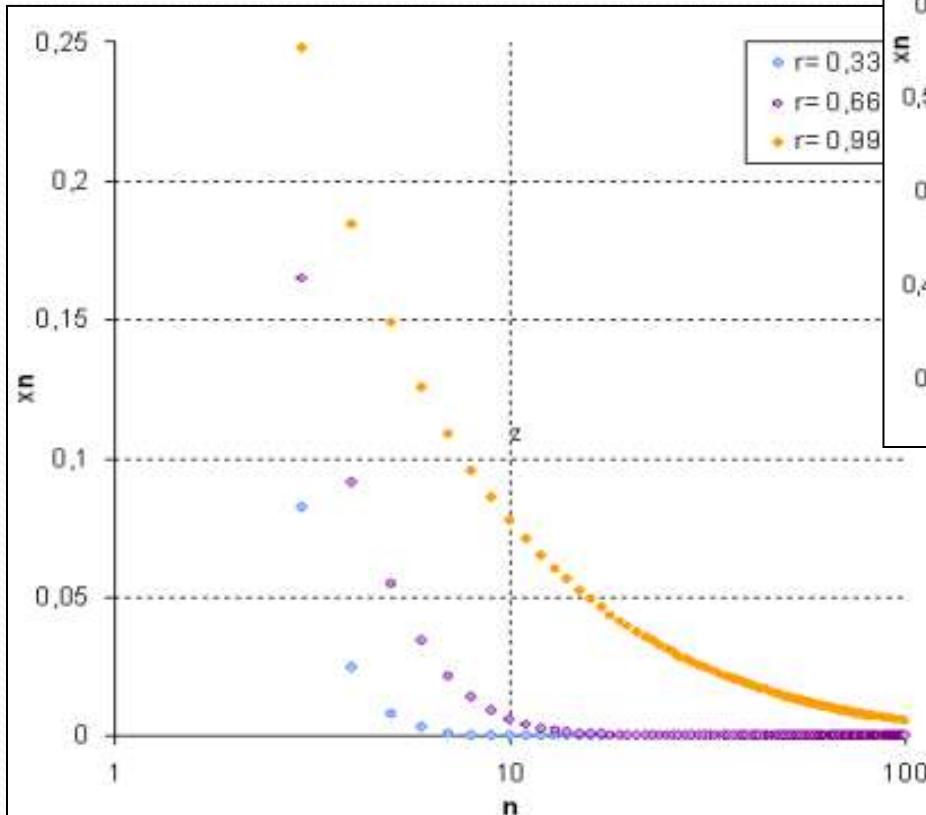


Alguns problemas



Apresentação Diferente

- Em log dava pra ver bem as várias regiões da curva...



Para a próxima semana 2

Sensibilidade a condição inicial:

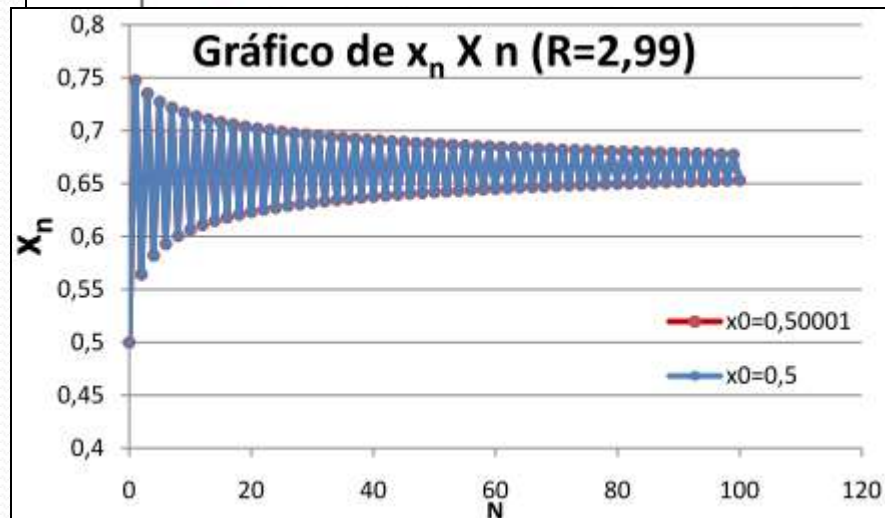
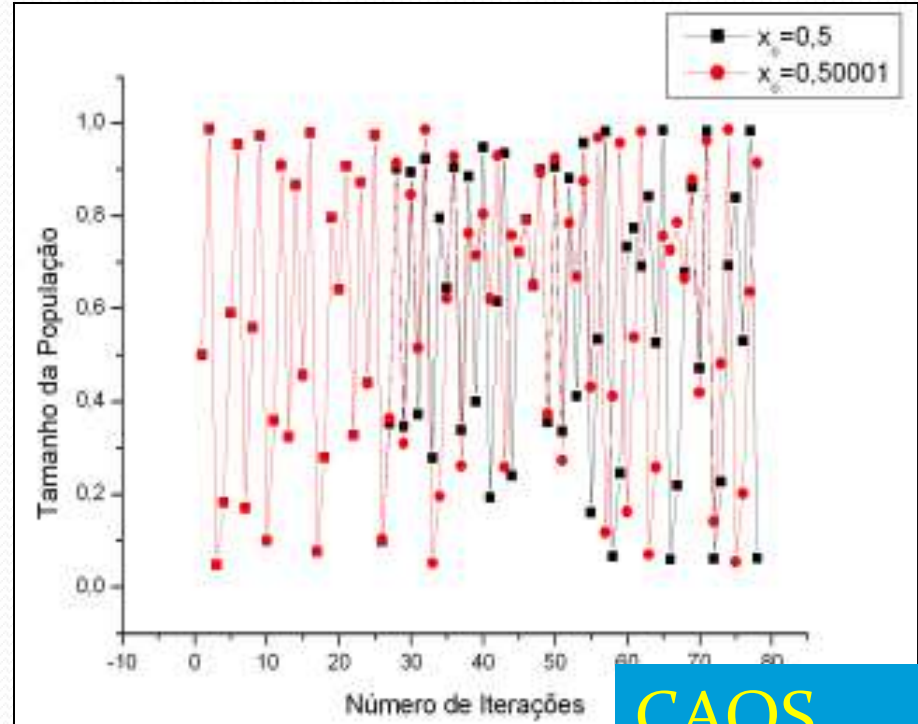
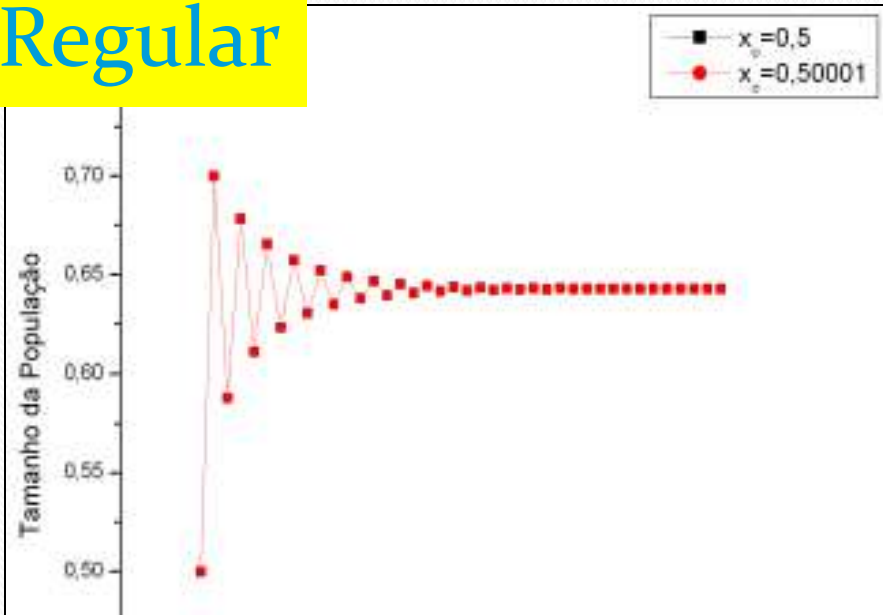
- Fazer gráficos de x_n como função de n para os regimes **com e sem caos** partindo de **2** condições iniciais muito próximas:
 $x_0=0.5$, $x_0=0.50001$
 - **Atenção:** Queremos comparar a evolução das soluções.

Diagrama de bifurcação:

- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas (os valores lá no final da tabela) em função do parâmetro de controle.
 - **Atenção:** O número de iterações é importante pois a solução deve atingir a estabilidade (quando existe). No mínimo **500** iterações.
- Determine a posição da 1º, 2º e 3º bifurcação e calcule a constante de **Constante de Feigenbaum** (com incerteza)

Dependência das Condições Iniciais

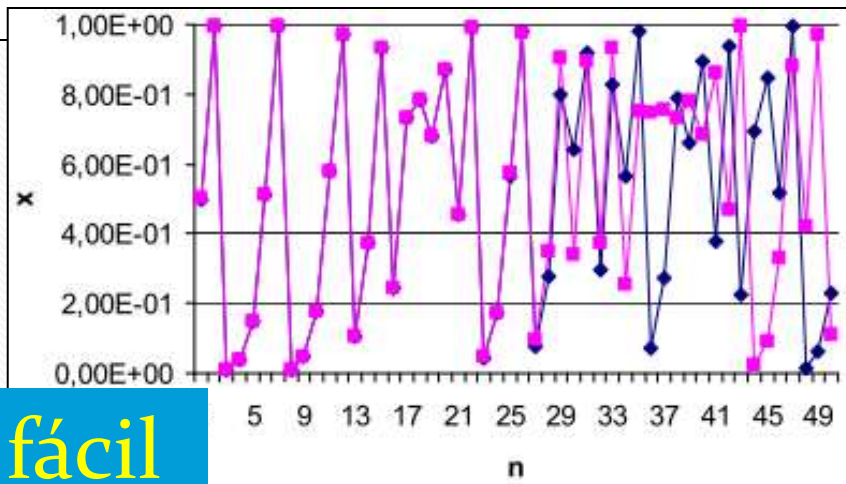
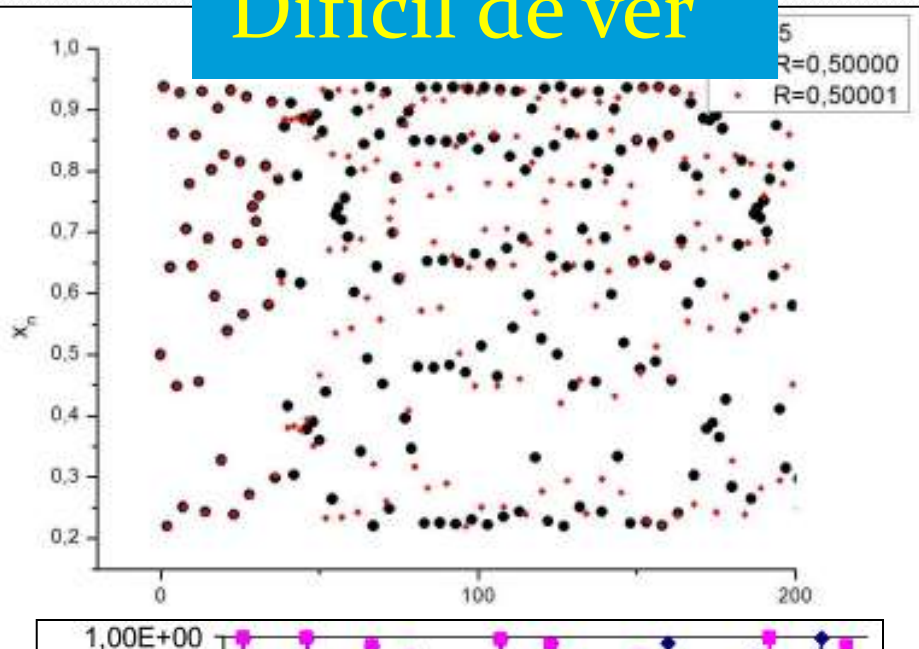
Regular



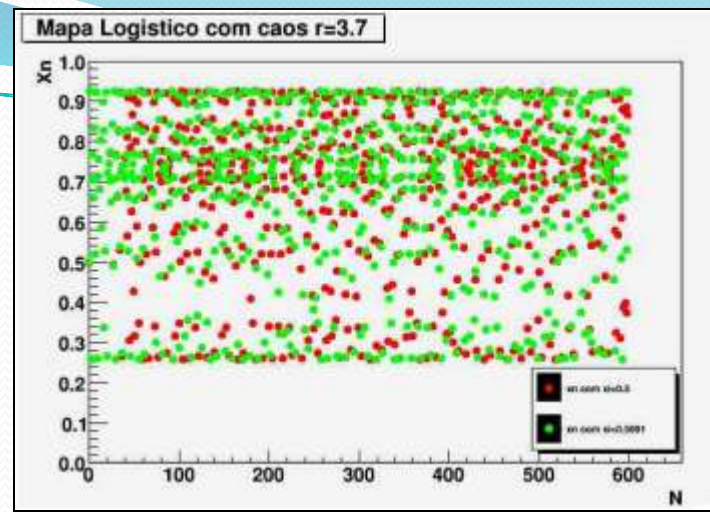
CAOS

Problemas...

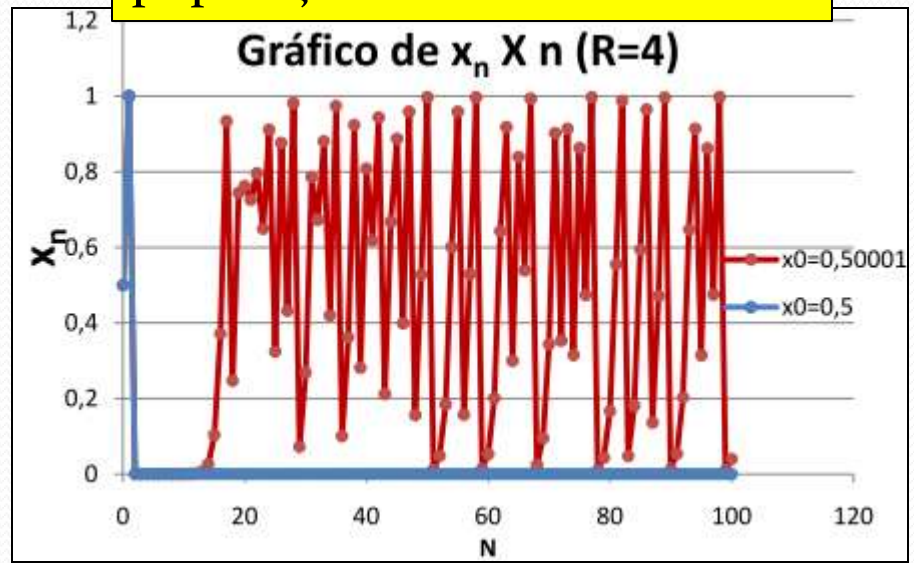
Difícil de ver



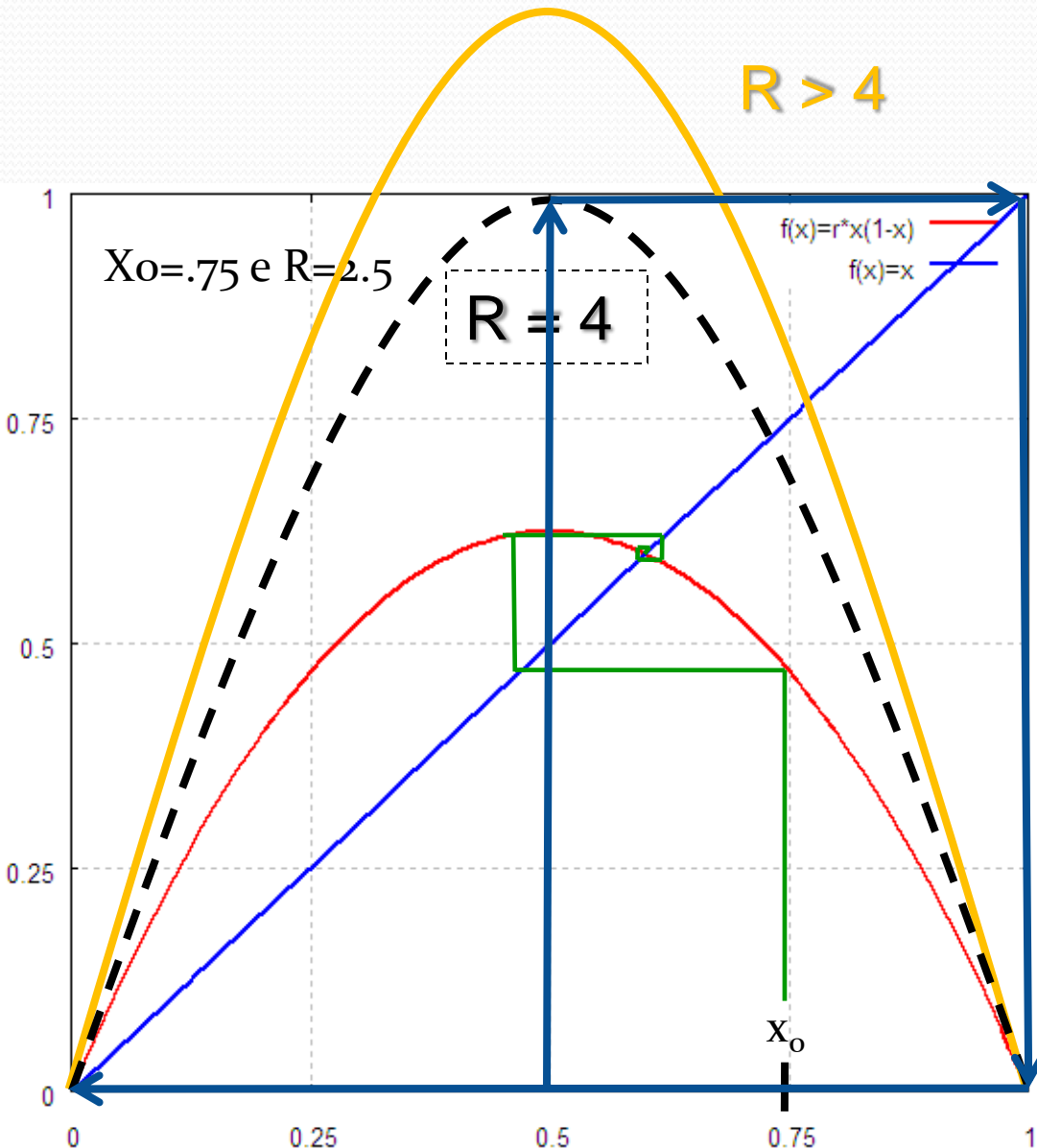
fácil



O que acontece para o caso limite de $R=4$?? A simulação deste grupo mostra que a população morre...



Mapa Logístico - Detalhes



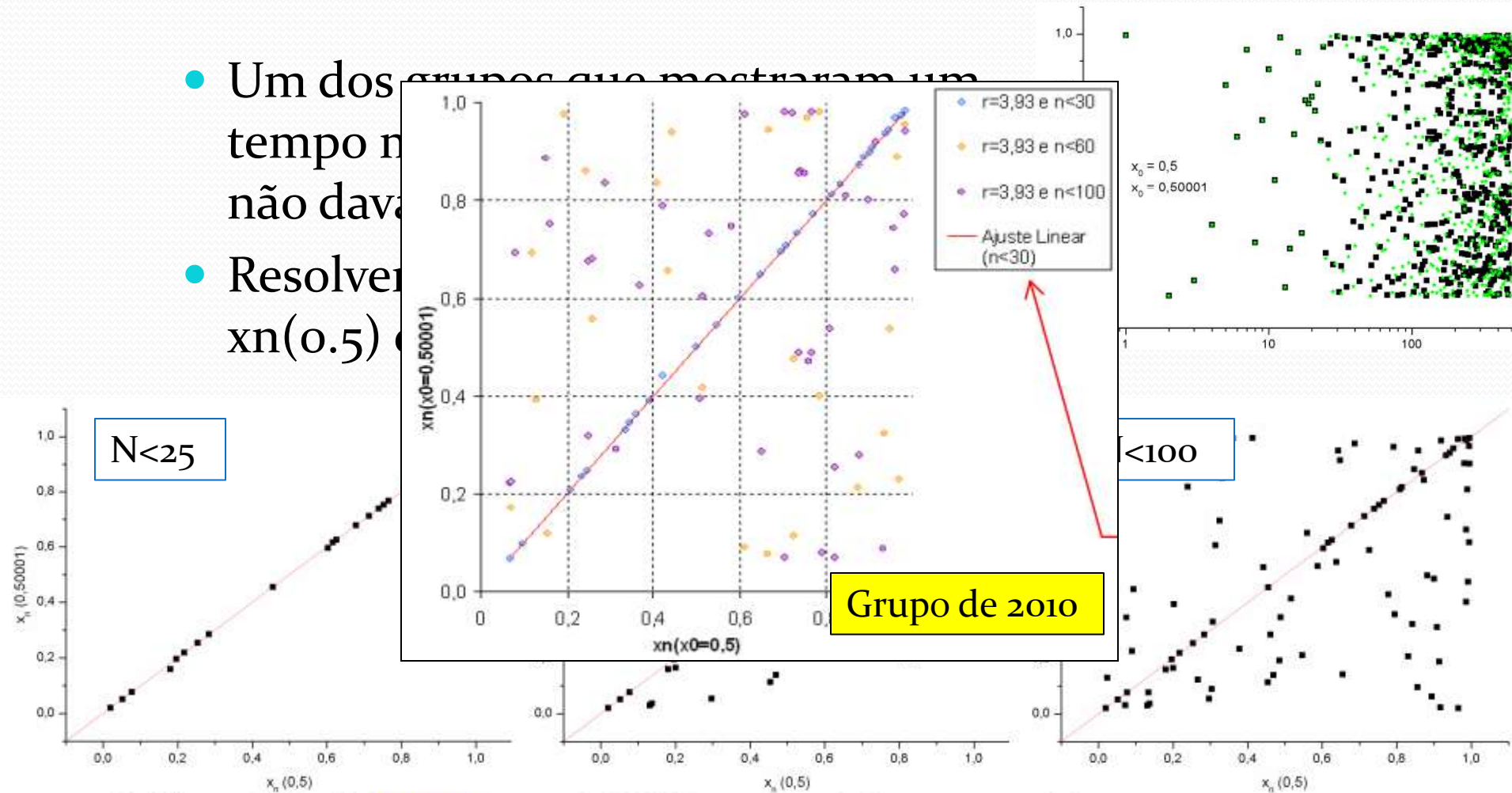
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Porque $0 < R < 4$?

- $R < 0 \Rightarrow x < 0$
- $R = 0 \Rightarrow x = 0$
- $R > 4 \Rightarrow x > 1$
- $R = 4 \Rightarrow x = 0$

Apresentação diferente (2009)

- Um dos grupos que mostraram um tempo n não dava não dava
- Resolver $x_n(0.5)$



Gráficos 6, 7 e 8 – Plote de $x_0 = 0,50001$ por $x_0 = 0,5$ para a $r = 3,8$, para diferentes número de iterações: 25, 50 e 100.

Apresentação diferente (2009)

- Outra maneira é analisar a diferença entre as duas séries.
 - Percebe-se claramente o ponto onde começam a divergir.

mais baixas no início e depois se tornam altas "aleatoriamente". Uma coisa interessante de notar é que, após algumas iterações "em caos", as diferenças se tornam muito baixas novamente, ou seja, as seqüências tornam-se similares como no início, isto pode ser considerado um indício de alguma ordem no processo.

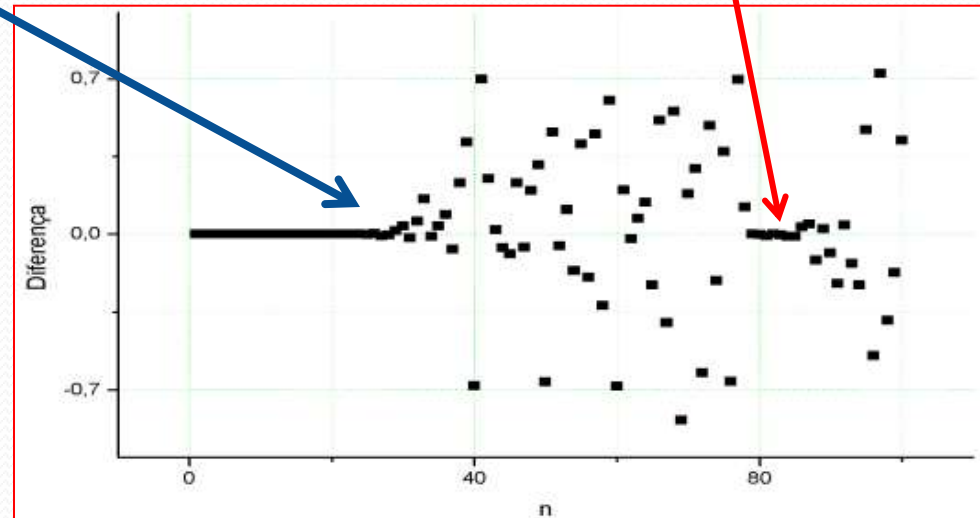
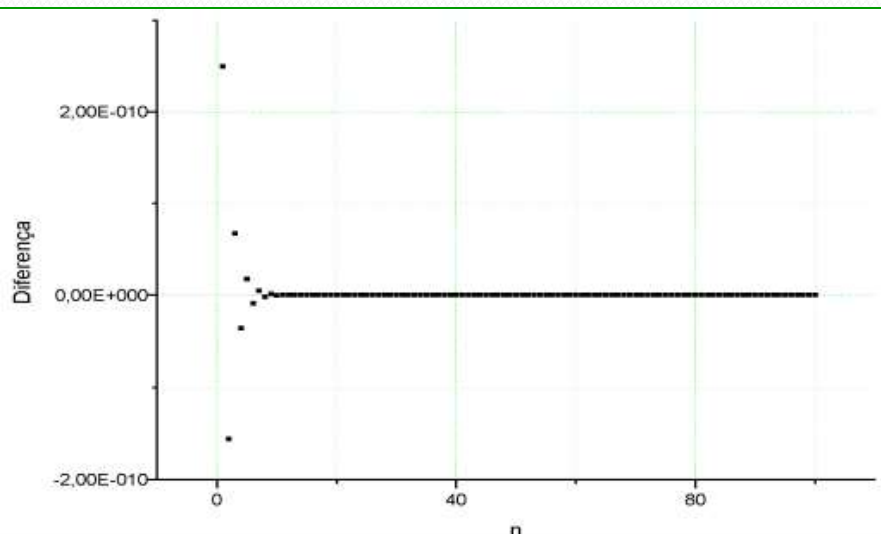
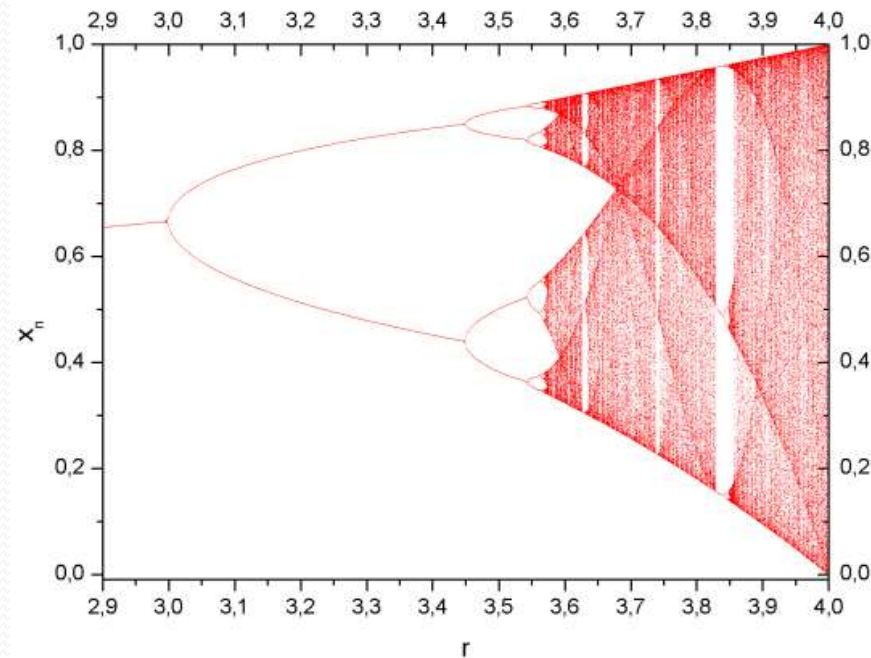
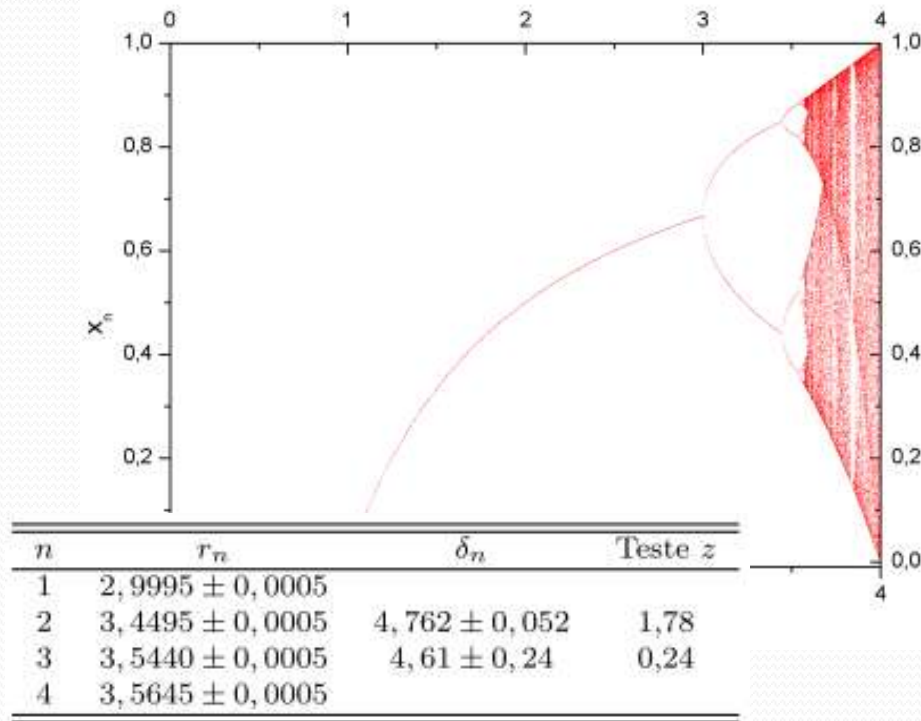


Diagrama de Bifurcação

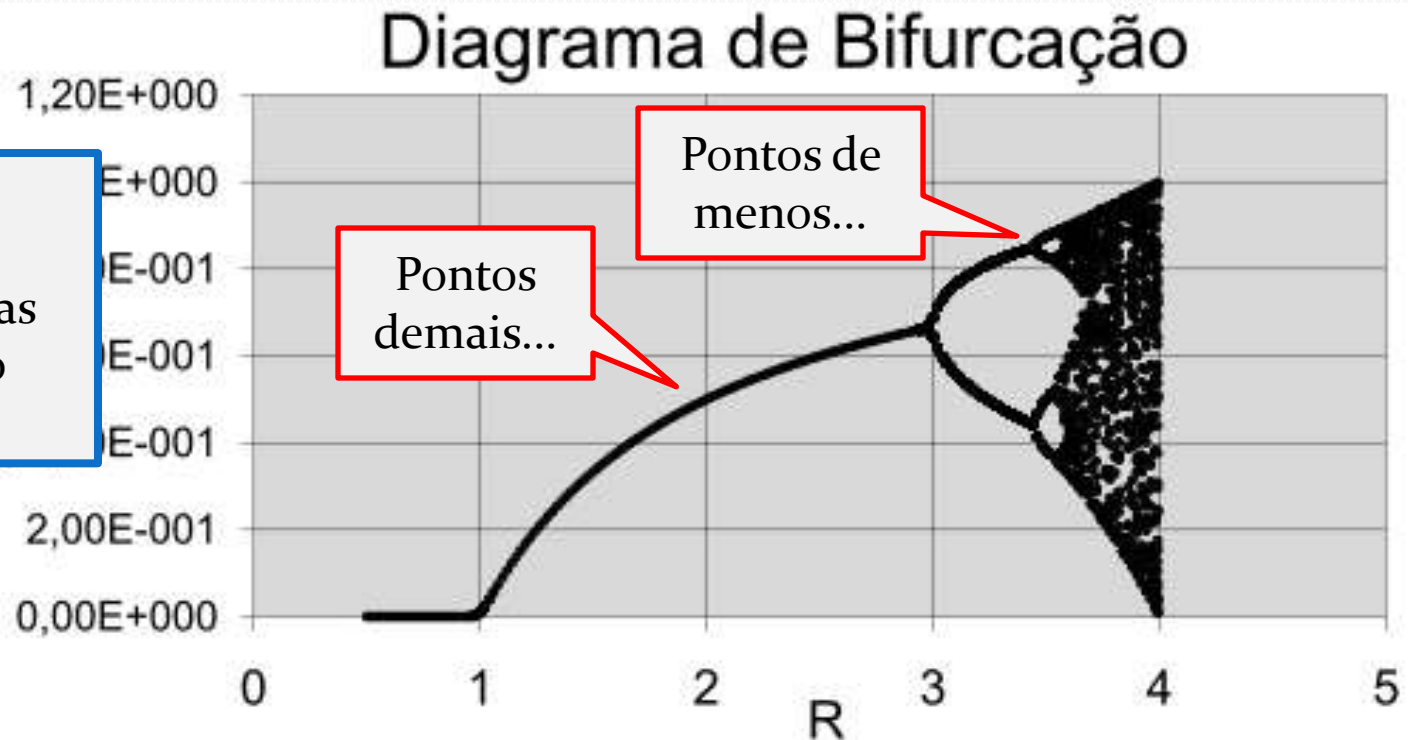


Criamos um programa em **C** que iterava a função $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, sempre com $x_0 = 0,5$, com n inteiro variando no intervalo $1 \leq n \leq 1000$, e exibia os últimos 200 valores de x_n junto com o valor do parâmetro r correspondente. O programa iniciava com $r = 0$ e ia incrementando r com o passo 0,001 no gráfico 5. No gráfico 6, começamos com $r = 2,9$ e usamos o passo 0,0003, ampliando a região de interesse, que é a região em que aparecem as bifurcações.

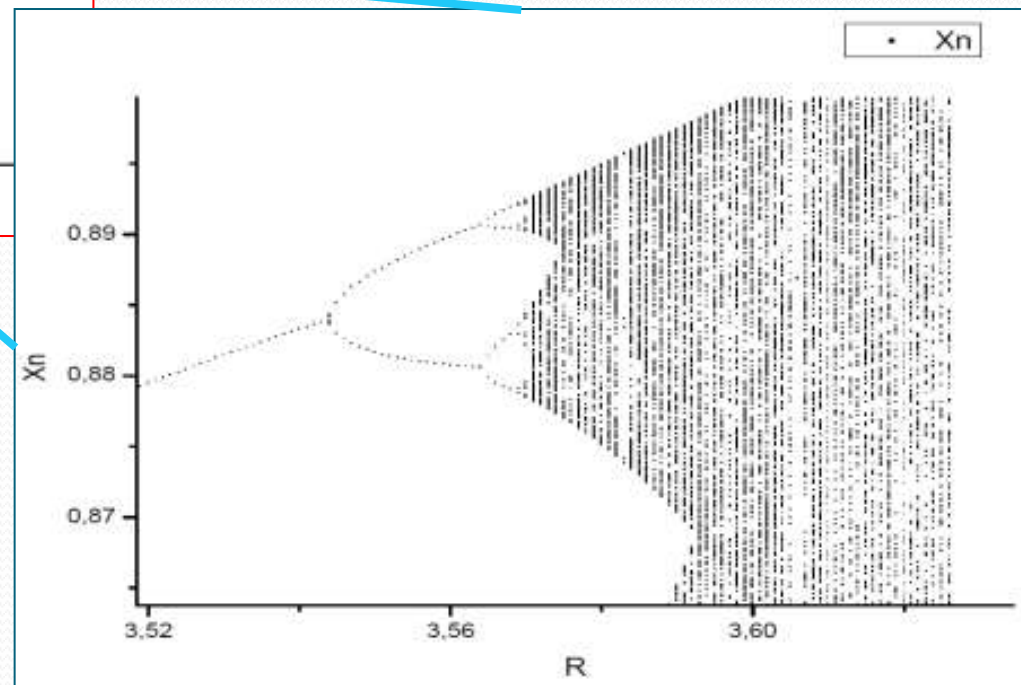
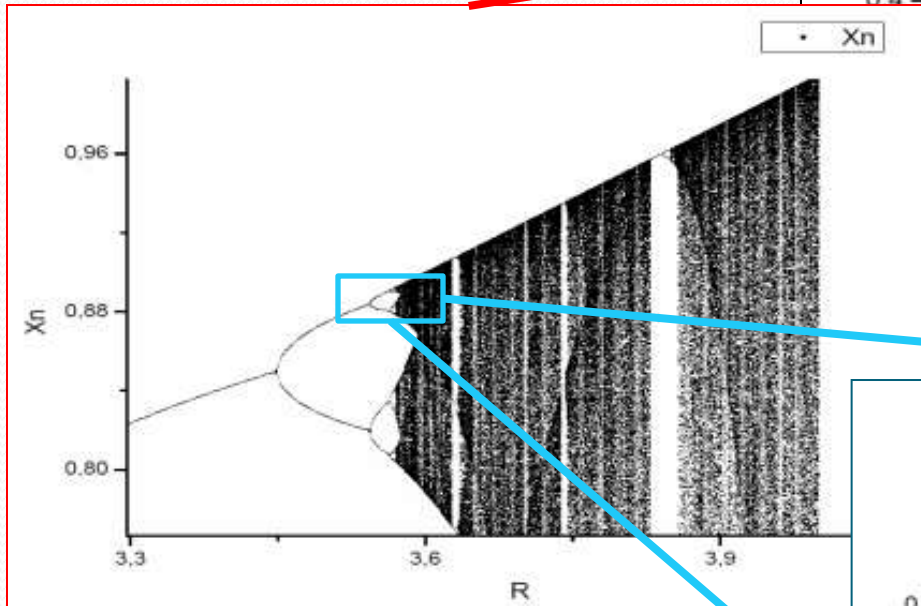
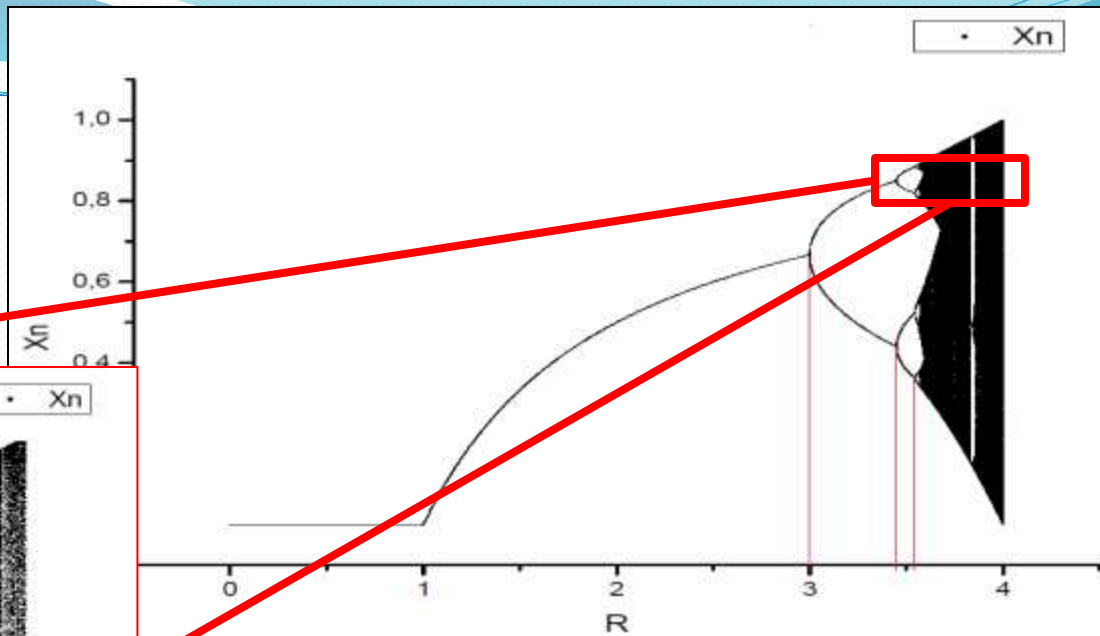
Problemas com o Diagrama

- Não é um problema, mas porque usar um intervalo constante de r ? Seria melhor se concentrar na região onde acontecem as bifurcações.

Eu não disse qual o espaçamento nos valores de r ... Apenas pedi para calcular o diagrama...



Fractal (2009)



Alguns grupos fizeram um programa e não usaram o excel. Um deles fez com resolução suficiente para “ver” a estrutura fractal do diagrama.

Feigenbaun

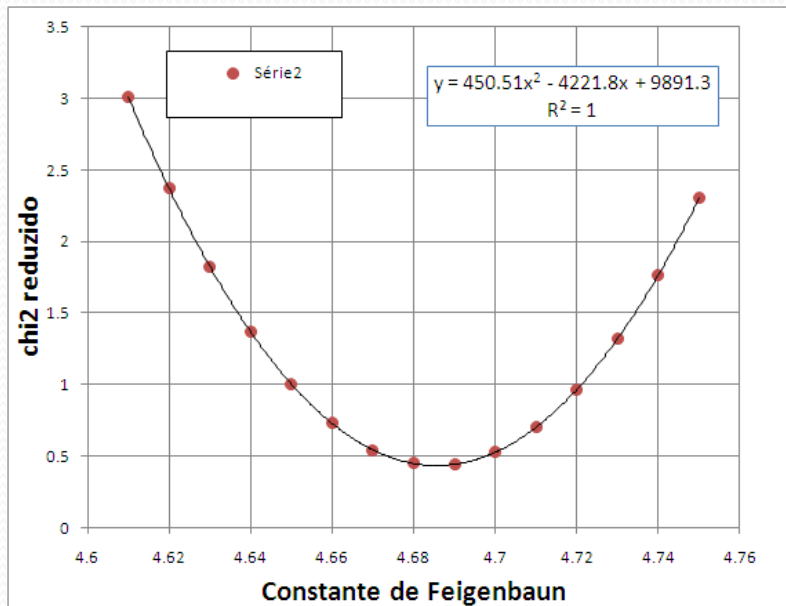
$$\delta = 4,6692016091029909...$$

- Como juntar os resultados da turma?
 - Poderíamos calcular a média e o desvio padrão

Classe: $4,68 \pm 0.18$ (std) ± 0.32 (err)

Propagação de erros

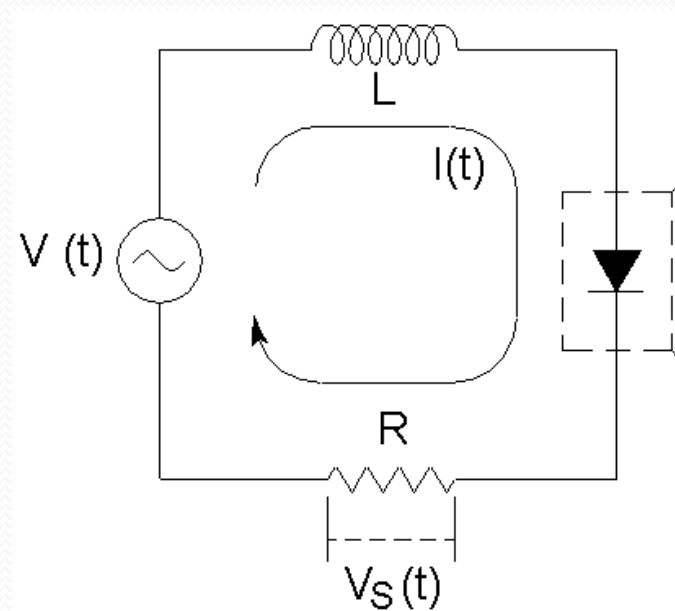
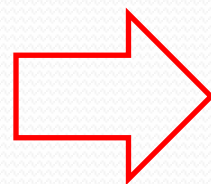
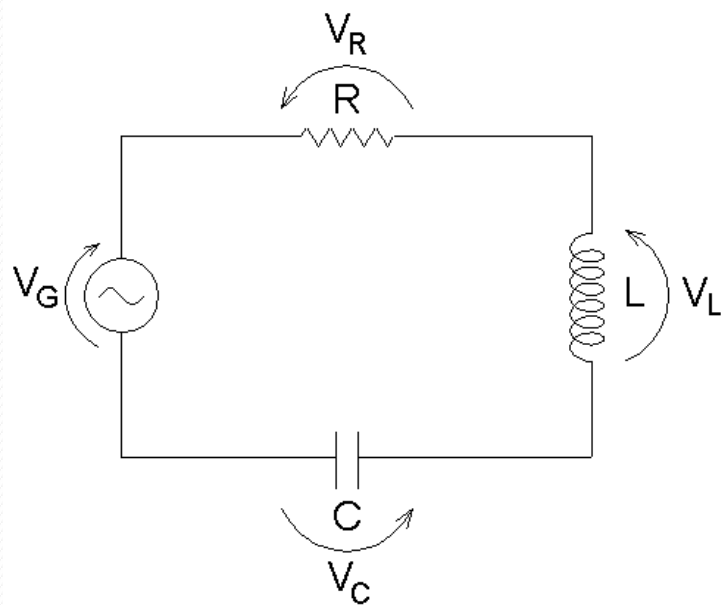
- Mas todos os valores devem ter o mesmo peso?
 - Média ponderada por $1/\Delta^2$
 - Ou fazer um χ^2 (é equivalente)



h1	5.2 (8)
h2	4.68 (15)
h3	4.762 (52) 4.61 (24)
h4	4.629 (80)
h5	
h6	4.50 (25)
h7	4.60 (8)
h8	4.677 (33)
h9	4.600(235)
h10	4.6 (4)
h11	4.751 (52)

Objetivos Para as Próximas Semanas

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)



- Semana 1

- Teoria de caos e experimentos computacionais

- Semana 2

- Medidas experimentais com RLD



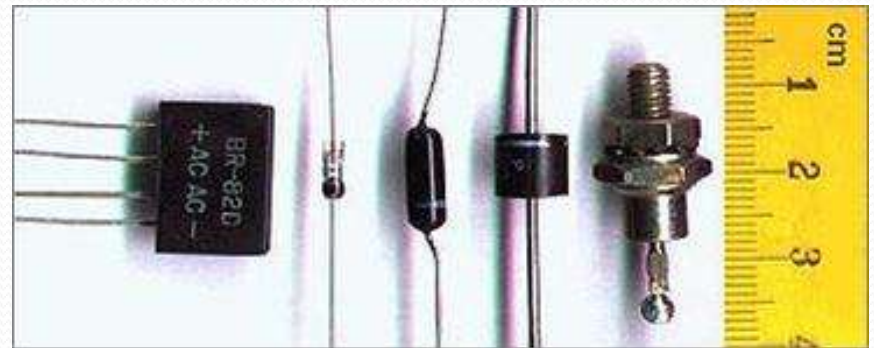
Aula de Hoje



- Circuito RLD
 - O que é um diodo?
 - Quais as semelhanças com o RLC ?
- Caos com o RLD
 - Diagrama de bifurcações experimental!

O que é um Diodo?

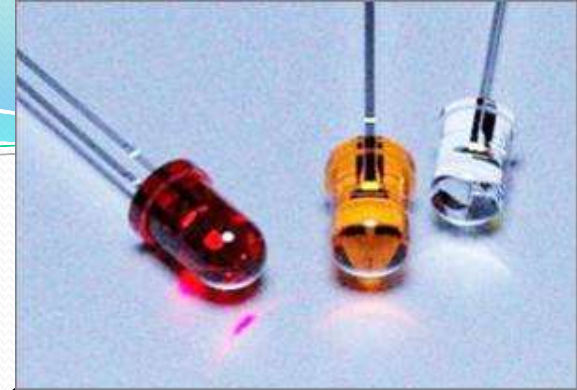
- O diodo é o dispositivo semicondutor mais simples.
- Um semicondutor é um material com uma habilidade variável para conduzir corrente.
- A maioria dos semicondutores é feita de condutores ruins misturado com impurezas (átomos de outro material). O processo de adicionar impurezas é chamado de dopagem.



Exemplo: As luzes vermelhas e verdes dos aparelhos eletrônicos são diodos (LED = light emitting diode)

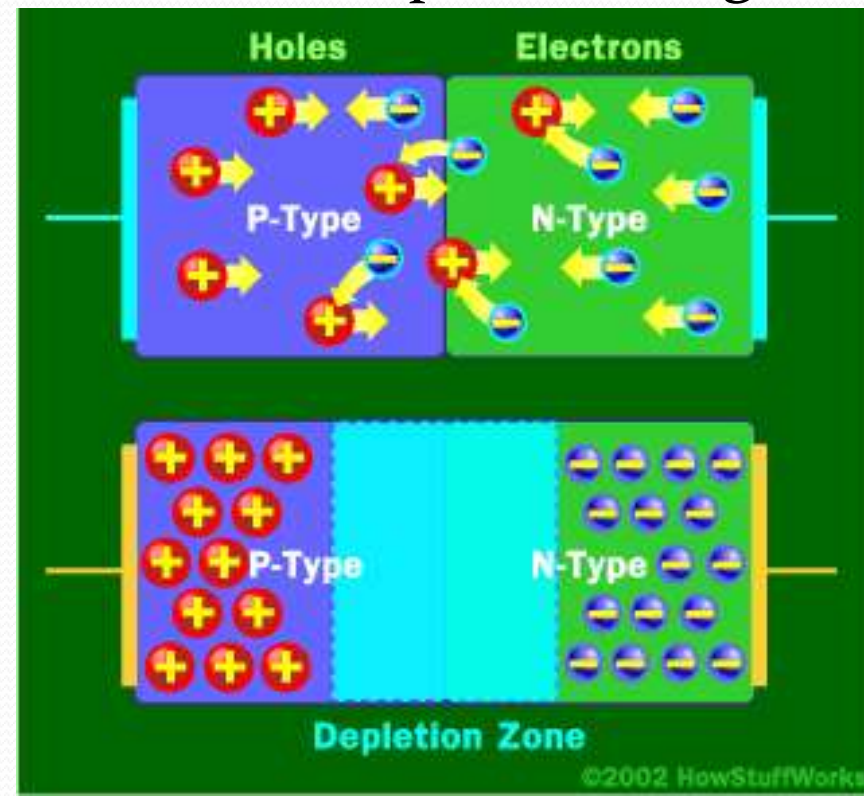
E os semicondutores?

- No caso de LEDs, o material tipicamente usado é o **alumínio-gálio-arsênico** (AlGaAs).
 - Quando o material está puro, a ligação entre os átomos é completa e não há elétrons livres para conduzir corrente.
 - No material dopado, os átomos adicionais mudam o balanço, adicionando elétrons livres ou criando “buracos” para onde os elétrons podem ir.
 - Nos dois casos o material passa a ser mais condutor!
- Um semicondutor com elétrons extras é chamado de material tipo-N. Os elétrons livres movem-se de uma área com carga negativa para uma com carga positiva.
- Um semicondutor com “buracos” é chamado de material do tipo-P. Os elétrons do material pulam de um buraco para o outro. O resultado é que os buracos parecem se mover da região positiva para a negativa.



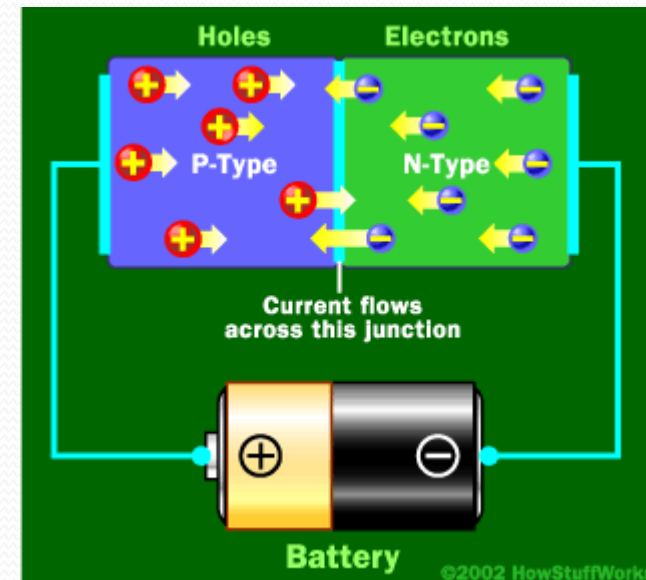
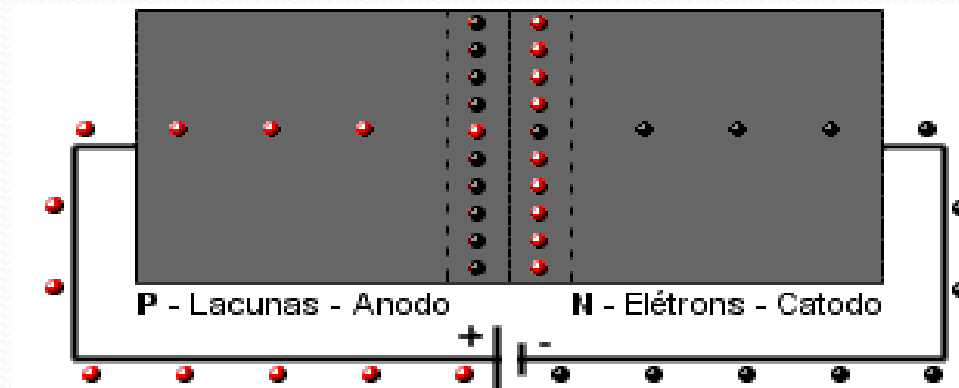
Como funciona o Diodo?

- Um diodo tem uma região com material tipo-N e outra com material tipo-P, com eletrodos nas extremidades.
 - Este arranjo conduz eletricidade apenas em uma direção.
- Quando não há voltagem aplicada ao diodo, elétrons do material tipo-N enchem os buracos do material tipo-P ao longo da junção.
- Forma-se uma zona de depleção, onde o material semicondutor volta a ser isolante.
- Não passa corrente pois os buracos em excesso estão ocupados pelos elétrons em excesso.



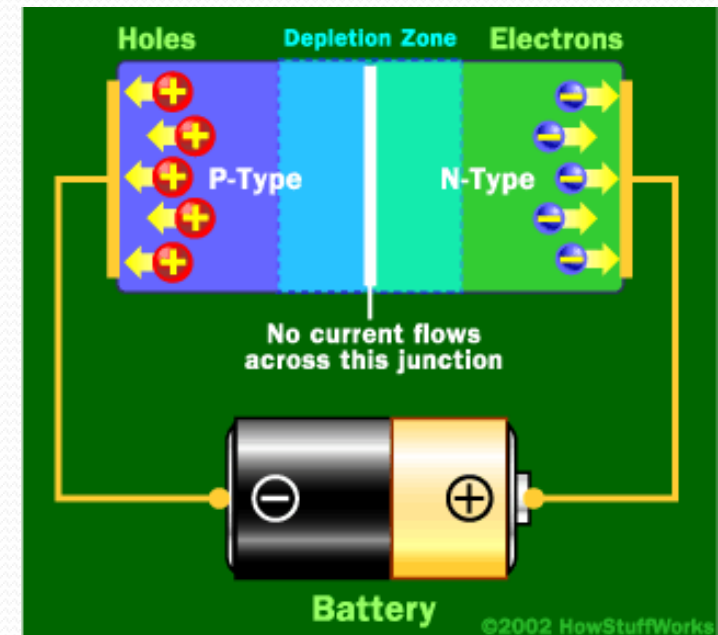
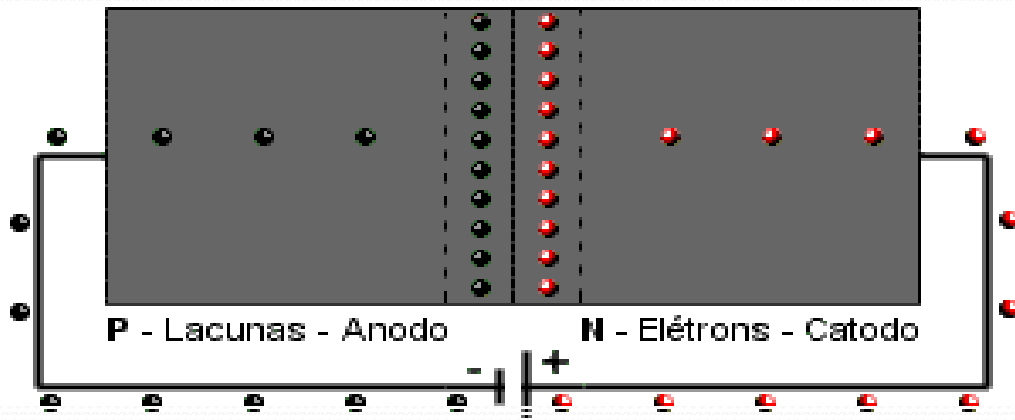
Quando a corrente pode passar?

- É preciso mover os elétrons da área tipo-N para área tipo-P, e os buracos da área tipo-P para a tipo-N.
 - Para fazer isso, é preciso conectar o lado tipo-N do diodo a um potencial negativo e o lado tipo-P a um potencial positivo.
 - Os elétrons livres da região tipo-N serão repelidos pelo potencial negativo, e os buracos são repelidos pelo potencial positivo.
- Quando a voltagem é alta o suficiente, os elétrons da zona de depleção são arrancados e a corrente começa a circular.



Quando a corrente não pode passar?

- Colocando uma diferença de potencial ao contrário, os elétrons da região N são atraídos pelo potencial positivo e os buracos são atraídos pelo potencial negativo.
- A zona de depleção aumenta, pois as cargas positivas e negativas estão se movendo na direção errada, e não passa corrente no circuito.



Equação Característica

- A equação do diodo, ou a lei do diodo, é:

$$i_D(V_D) = i_{D0} \left(\exp\left[\frac{eV_D}{kT}\right] - 1 \right)$$

Onde:

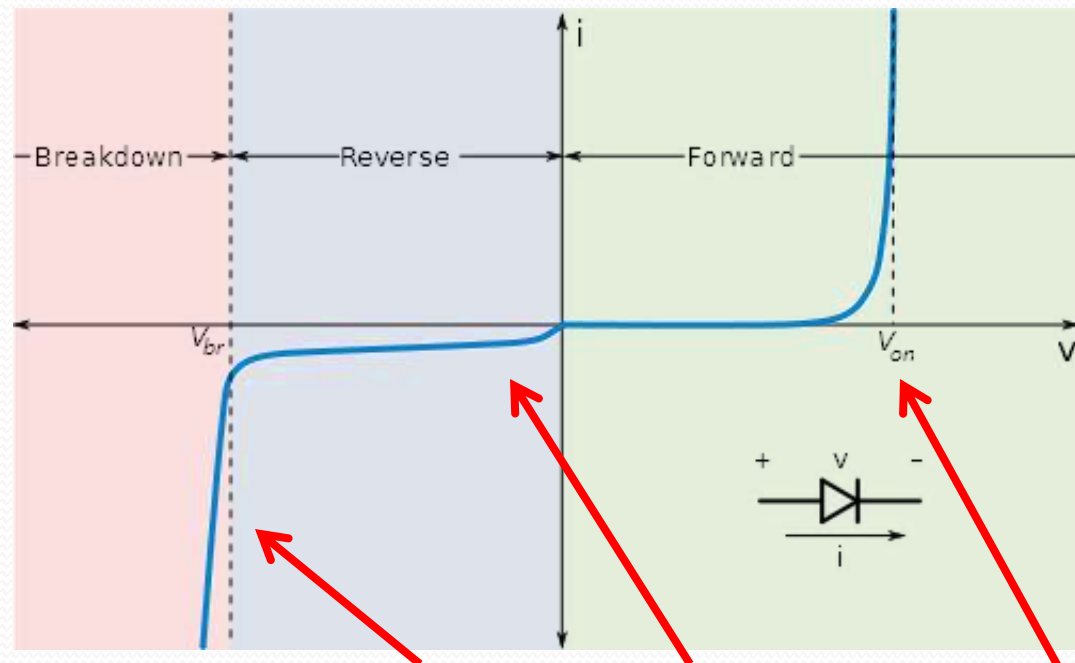
i_D e V_D são a corrente e a
vontagem do diodo

e é a carga do elétron

i_{D0} é a corrente de saturação

$k=1,38 \times 10^{-23}$ J/K é a
constante de Boltzman

T é a temperatura em Kelvin



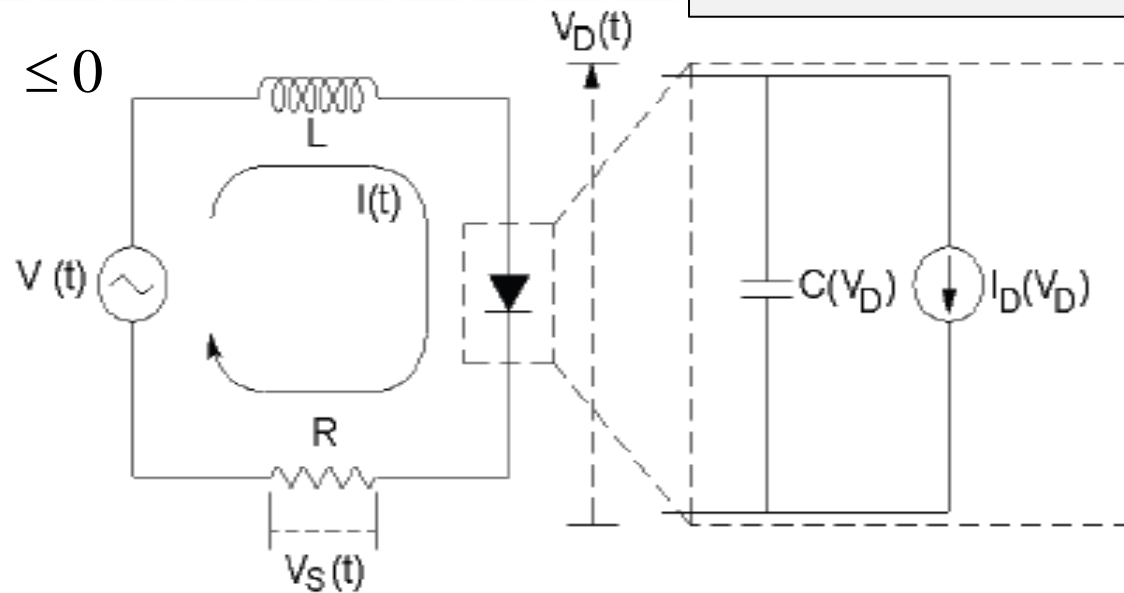
Não existem diodos ideais.

Modelo de Diodo Real

- Devido às características da junção P-N, o diodo apresenta também uma capacitância $C(V_D)$, não linear, descrita por:

$$C(V_D) = C_0 \exp\left[\frac{eV_D}{kT}\right], \text{ para } V_D > 0$$

$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{eV_D}{kT}}}, \text{ para } V_D \leq 0$$



Diodo real = diodo ideal em paralelo com um capacitor cuja capacitância depende da voltagem aplicada

Modelo de Diodo Real

- Note que a capacitância depende da tensão aplicada:

$$C(V_D) = C_0 \exp\left[\frac{eV_D}{kT}\right], \text{ para } V_D > 0$$

$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{eV_D}{kT}}}, \text{ para } V_D \leq 0$$

- Para tensões muito pequenas:

$$\frac{eV_D}{kT} \ll 1$$

a capacitância fica praticamente constante e igual a C_0 e o diodo se comporta como um capacitor ideal.

- Para tensões mais elevadas, a capacitância depende fortemente da tensão sobre o diodo de uma maneira não linear

Equação do Circuito RLD

- No RLC as equações que regiam o sistema eram:

$$\dot{q} = i$$

$$i = \frac{V_o}{L} \cos(\omega t) - \frac{R}{L} i - \frac{1}{LC} q$$

- No RLD, os termos multiplicando a corrente e a carga não são constantes, pois a capacitância e a corrente do diodo variam de maneira não linear com a voltagem:

$$\dot{q} = i$$

$$i = \frac{V_o}{L} \cos(\omega t) - \boxed{f(q)}i - \boxed{g(q)}q$$

- *O comportamento não linear está embutido nas funções $f()$ e $g()$, que escrevemos de maneira genérica em termos da carga.*

Circuito RLD

- **Resumindo:**

- ✓ Para baixas tensões o circuito **RLD** deve se comportar como um circuito **RLC** linear como o estudado em aulas anteriores.
- ✓ Para tensões suficientemente elevadas o circuito apresenta comportamento não linear podendo chegar ao caos.

- **Vamos estudar o caso em que o circuito apresenta uma resposta linear e o caso em que a resposta é não linear**

Mais sobre diodos: aula de lab3 do semestre passado e apostila de curvas características

Para Esta Semana – RLC – Parte 1

Monte um circuito **RLC** com:

- $R_1 = 10\Omega$
- $C = 1\mu F$ (igual da semana passada)
- $L = 1mH$ (indutor ideal azul)



Nota:

- O gerador de áudio é de outro modelo, nele a saída de baixa impedância é traseira e é essa que deve ser usada.
- Lembrem-se de medir R_1 e C com o multímetro.



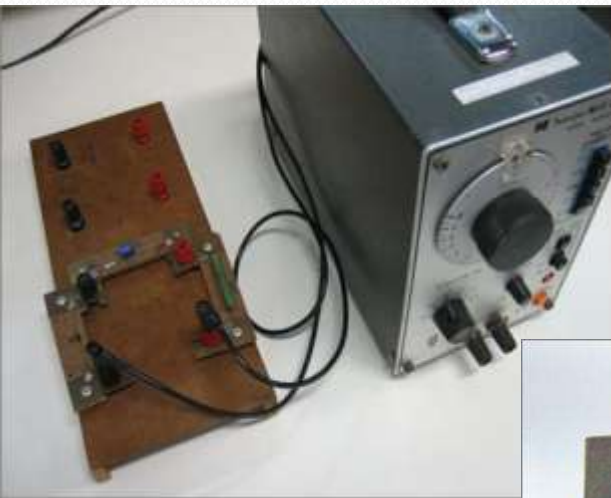
Para Entregar – RLC – Parte 1

Nesse circuito **RLC** com o indutor de **1mH** (azul)

- Determine a frequência de ressonância desse circuito (não precisa levantar a curva)
- A partir da frequência de ressonância verifique o valor da indutância e compare com o valor nominal
- Obtenha no osciloscópio os retratos de fase para esse circuito na frequência de ressonância
 - **Façam os retratos de fase para $q \times (di/dt)$**

Para Esta Semana – RLD – Parte 2

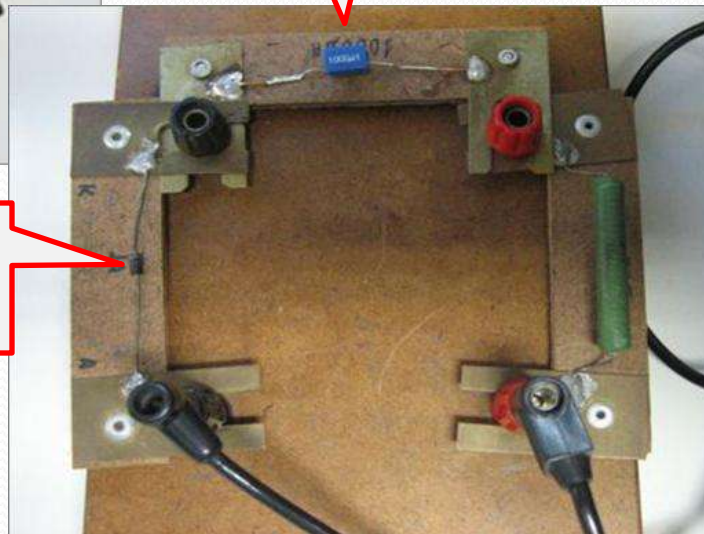
Montar o circuito RLD, substituindo o capacitor pelo diodo, os outros elementos continuam os mesmos.



Indutor

Saída traseira da fonte analógica

Diodo



Para Entregar – RLD – Parte 2

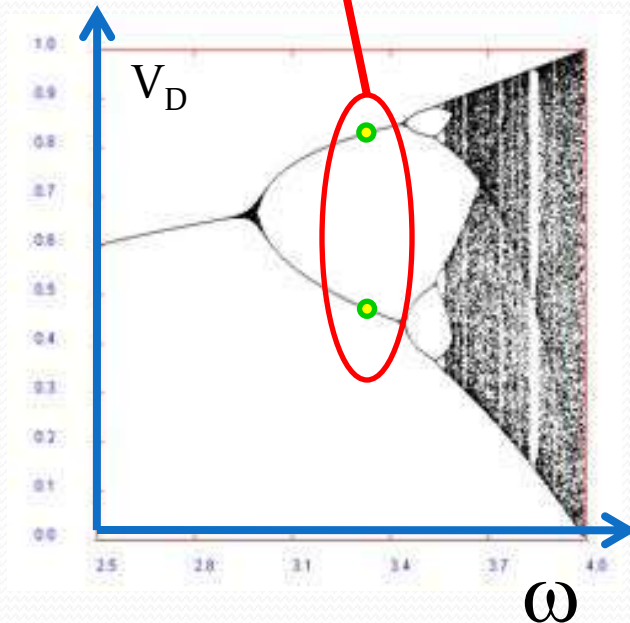
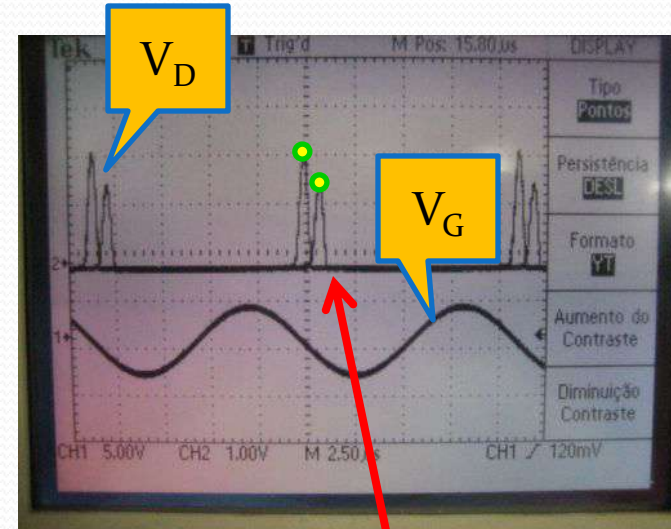
Circuito RLD em baixa tensão:

- Comece com a amplitude de pico no gerador menor que **0.5V** e use a saída traseira de baixa impedância.
 - Como funciona o diodo em baixa tensão?
- Achar a frequência de ressonância desse circuito
 - Meça V_D e V_g enquanto faz isso... Lembre-se, precisamos de $V_D < 0.5V$ para que apenas a parte capacitiva do diodo esteja funcionando
- A partir da frequência de ressonância determine o valor da capacitância do diodo, C_0
 - A indutância vocês mediram na parte 1, certo?
 - Anote o valor da tensão usada na medida (para a discussão)
- Compare tanto o valor da frequência como o valor da capacitância com os valores correspondentes do circuito **RLC**.

Para Entregar – RLD – Parte 3

Circuito RLD em alta tensão

- Aumentar a tensão no gerador para o máximo (algo em torno de 4-5V)
 - O que acontece com o diodo?
- Construir o diagrama de bifurcação
 - Meça com o osciloscópio a tensão no gerador, V_G , e a tensão no diodo, V_D . Comece com 40kHz e vá subindo
 - A amplitude dos picos de tensão V_D deve ser medida com o cursor. Meça vários pontos, principalmente próximo das bifurcações
 - Determinar o número de Feigenbaum
 - Quantas janelas de caos consegue determinar?
 - Meça até quando for possível (3 bif. mínimo)



Para Entregar – RLD – Parte 4

- O retrato de fase é o gráfico de $q \times di/dt$
 - Que modo do osciloscópio de ser usado? $X-t$ ou $X-Y$?
- Fazer o retrato de fase do circuito **RLD** para algumas frequências interessantes:
 - Quando não há bifurcação (**1** atrator para V_D do diodo)
 - Para **1** bifurcação (**2** atratores para V_D do diodo)
 - Para **2** bifurcações (**4** atratores para V_D do diodo)
 - Quando o circuito está em regime caótico
- Os retratos de fase são “fotos” da tela do osciloscópio
 - Devem ser mostrados, discutidos e comparados com o retrato de fase do circuito **RLC**.
- Para o caso de 2 atratores, faça também o gráfico em 3D ($I \times di/dt \times \text{tempo}$) e comente

Mudando de X-t para X-Y

- Clique no botão display
- Selecione o formato no menu da tela

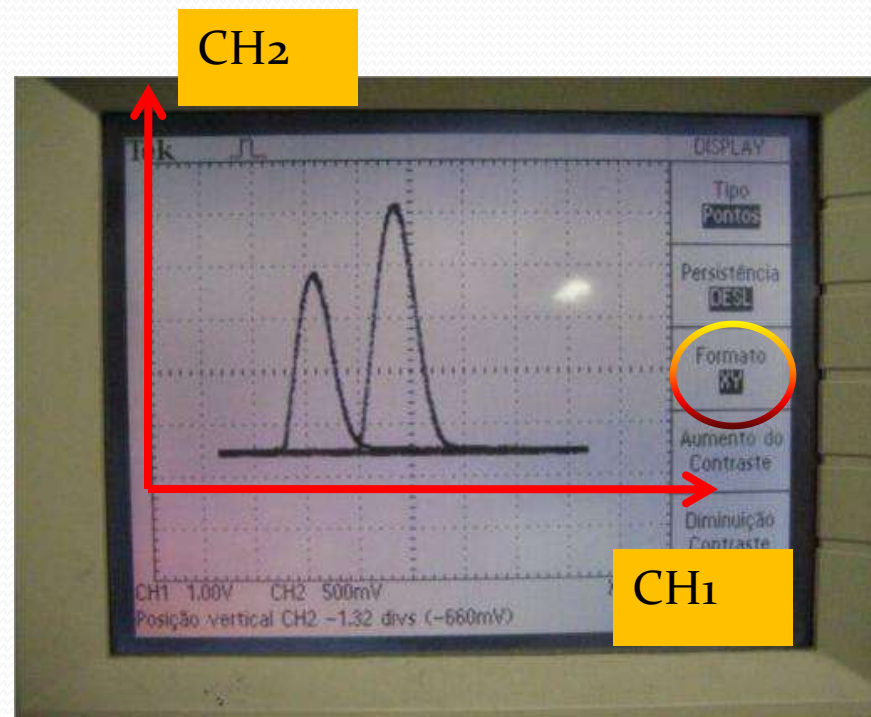
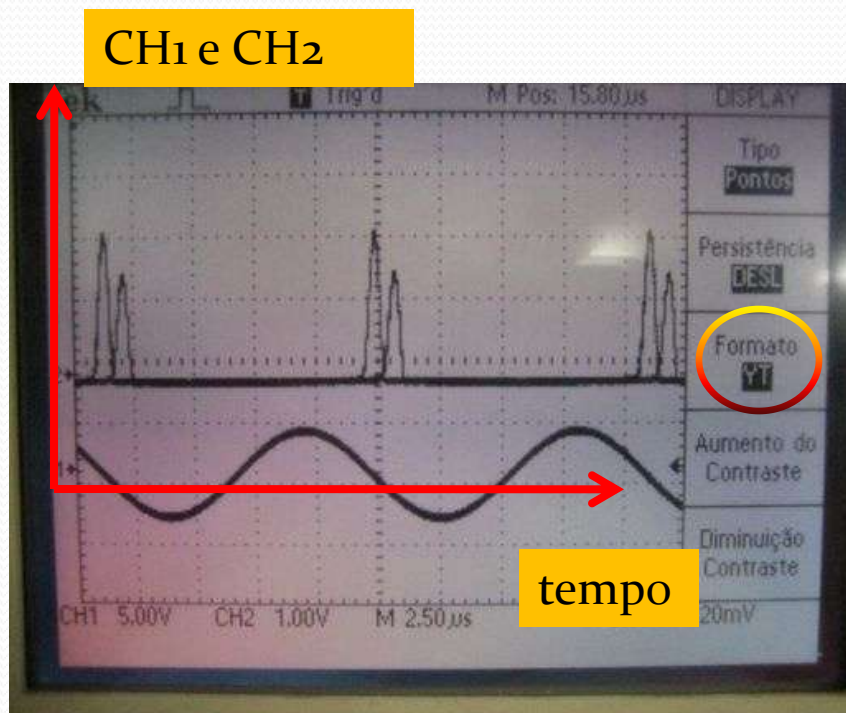
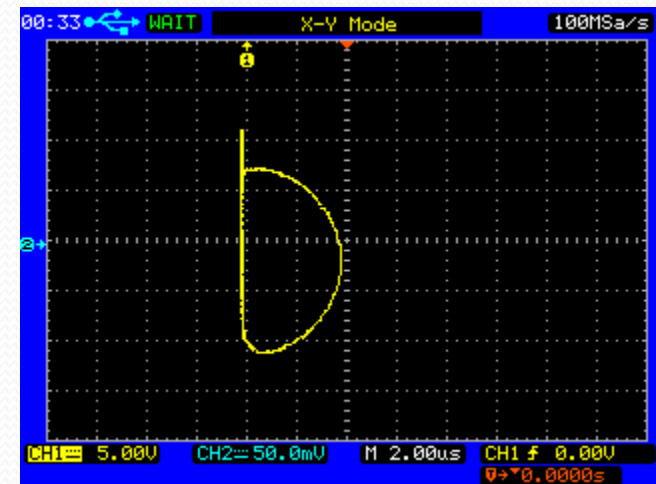
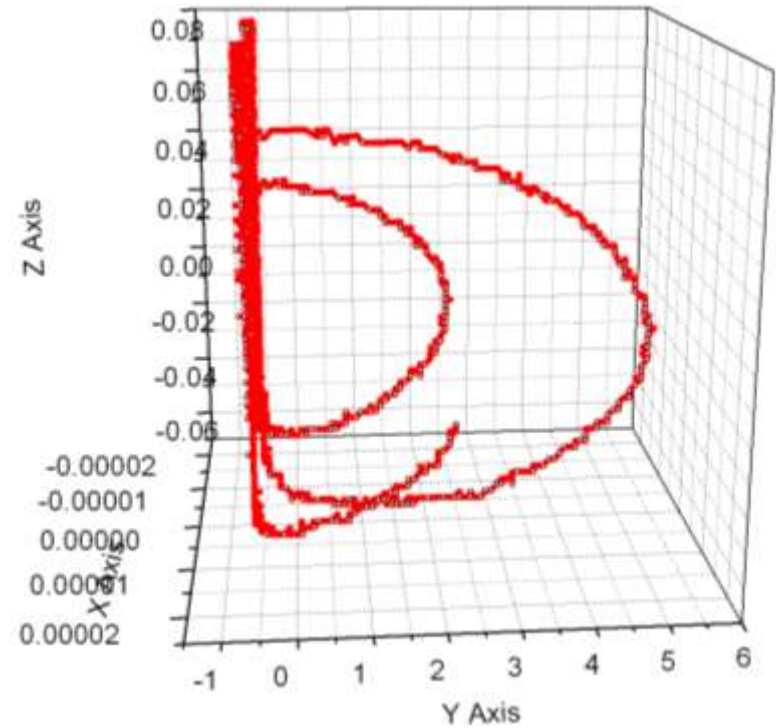
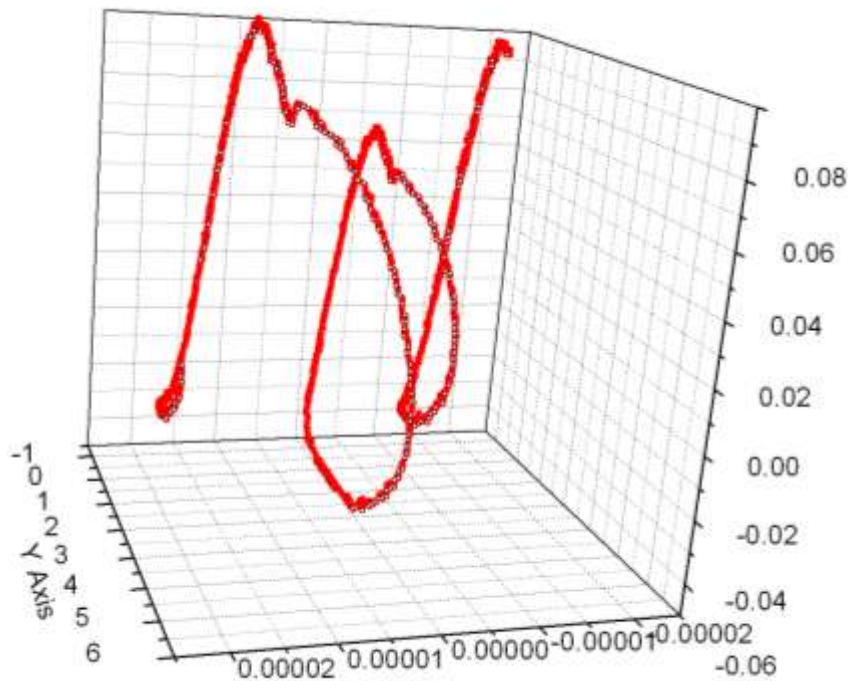


Gráfico 3D

- No Origin...



Dicas

- No caso dos diagramas de fase do **RLD** foi pedido o da carga (V_D) pela sua derivada (V_R), porque fica mais fácil a medida. Podem fazer também o diagrama de fase de corrente (V_R) pela derivada da corrente (V_L).
- A amplitude dos picos de tensão V_D ou V_L deve ser medida com o cursor (depois da primeira duplicação, sem o cursor é impossível medir a amplitude dos dois picos). E congele a figura para fazer a medida principalmente no caso de mais de 2 bifurcações, em razão da instabilidade causado por ruído.
- “Triggere” sempre pelo sinal maior e mais estável.
 - Por essa razão foi pedido que usasse V_C para as medidas do diagrama de bifurcações