Física Experimental IV

Notas de aula: www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

LabFlex: www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex

Aula 4, Experiência 1
Circuitos CA e Caos

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Ed. Basílio Jafet, sala 100

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

TAREFAS SEMANA PASSADA

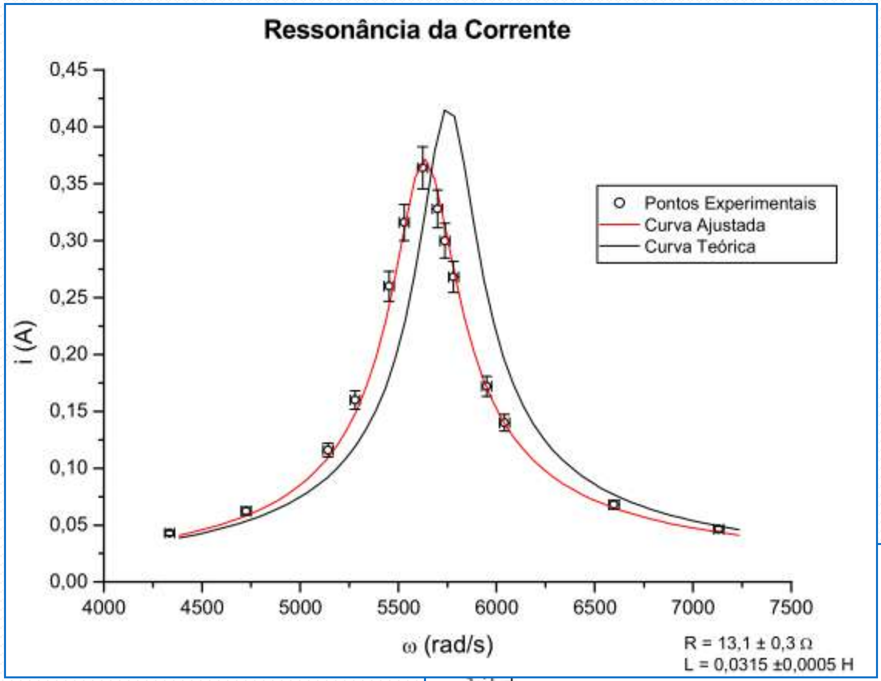
Para entregar

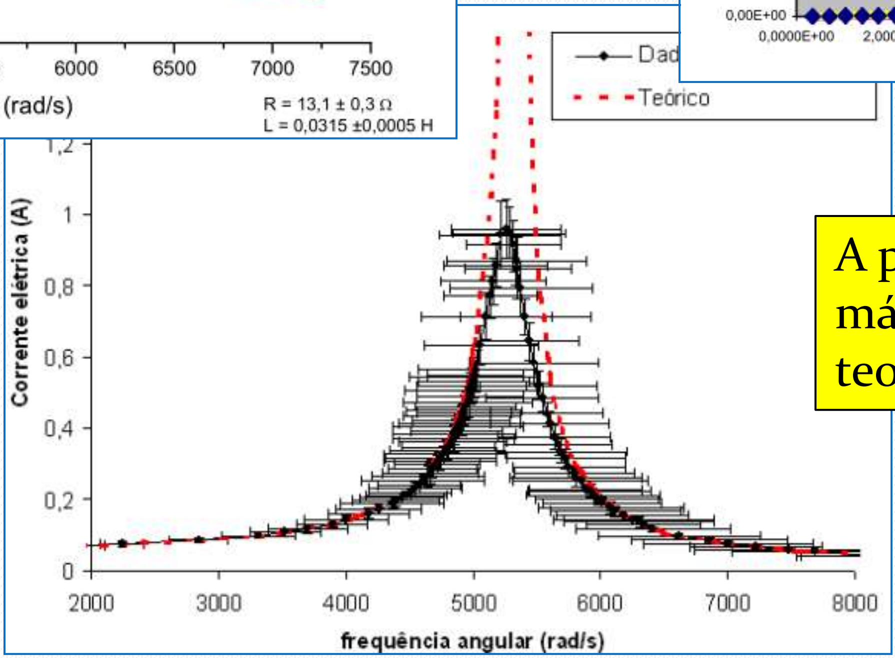
- Levantar a curva de ressonância de corrente do circuito **RLC**
  - Ajustar e Comparar com a curva teórica
    - O que usar? Ondas harmônicas simples ou quadrada + FFT ?
- Calcular a potência média dissipada por ciclo em função da freqüência
  - Obter o valor de Q e comparar com a previsão
- Na ressonância, medir V_L e V_C
  - Qual a diferença de fase entre as duas? Compare uma com a outra e ambas com a amplitude da tensão no gerador. Comente.
- Fazer isso para dois circuitos diferentes:

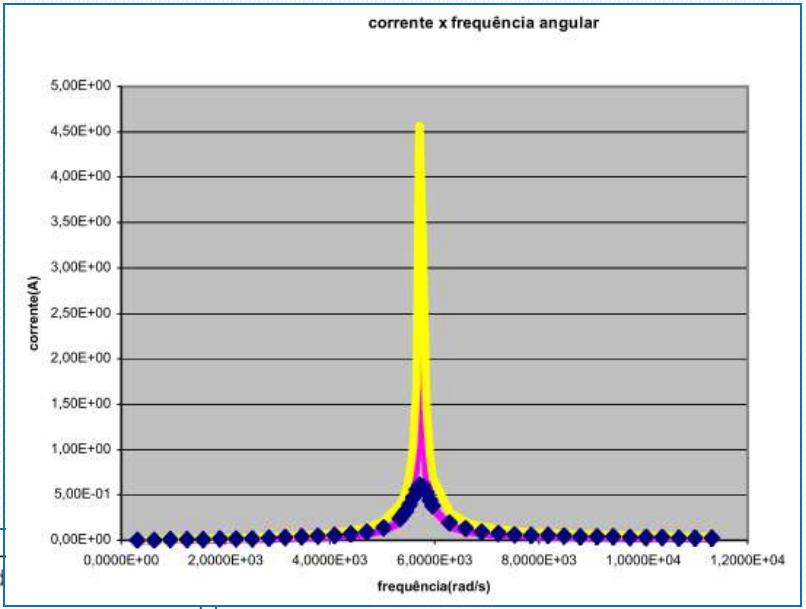
R_1=1Ω, **C=1μF** e **L=35mH**

R_1=33Ω, **C=1μF** e **L=35mH**

Corrente x Freqüência (R~1Ω)

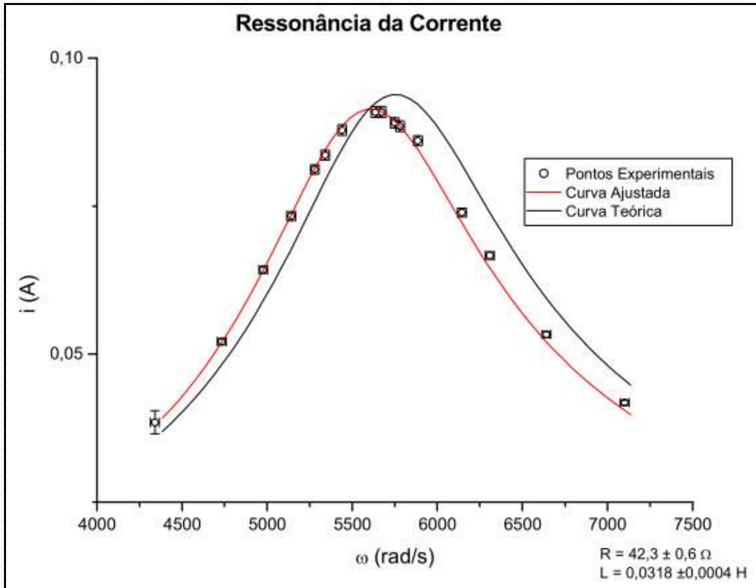


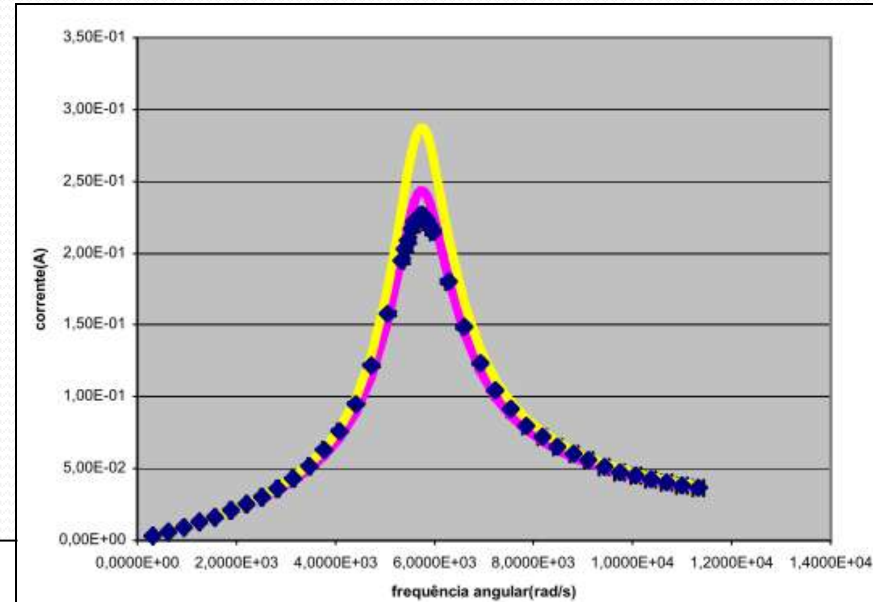


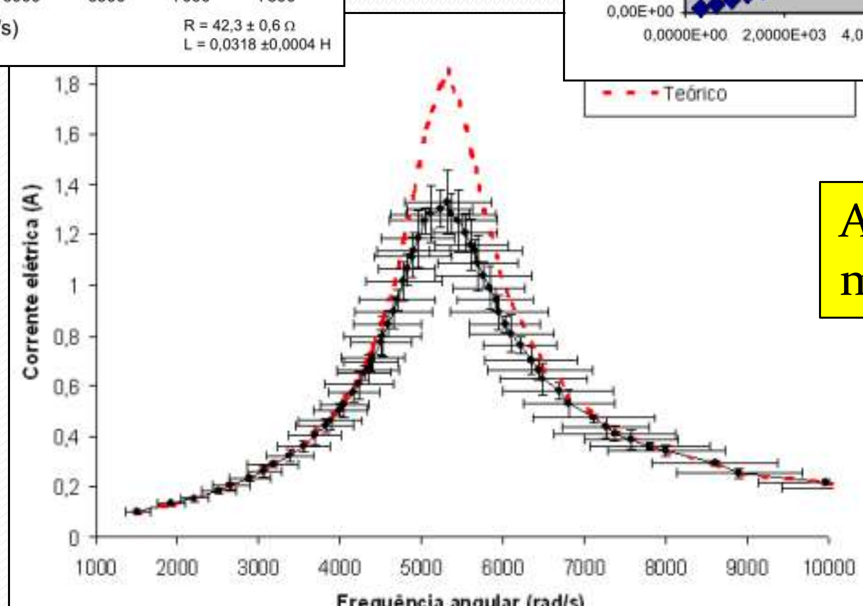


A posição e a amplitude do máximo não bate com a teoria

Corrente x Freqüência (R~33Ω)



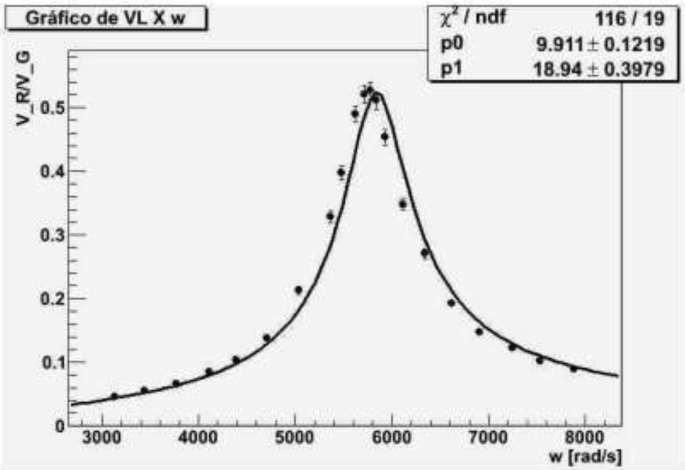


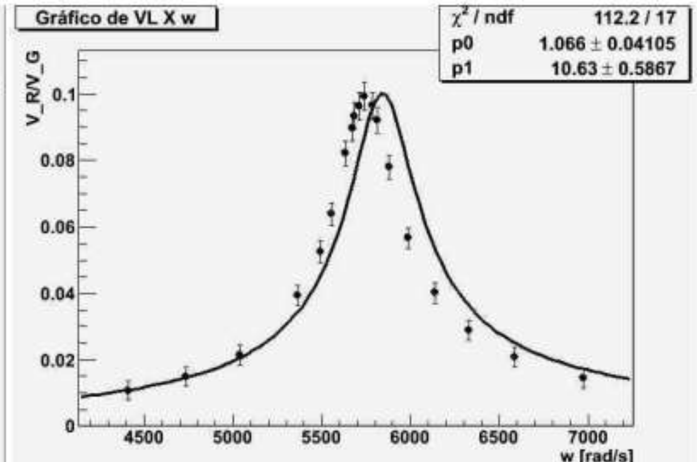


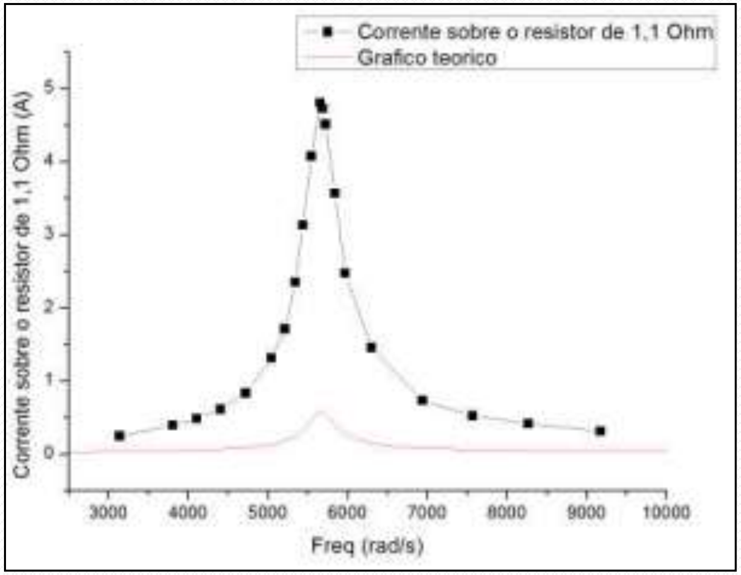
A diferença é bem menor para R=33Ω

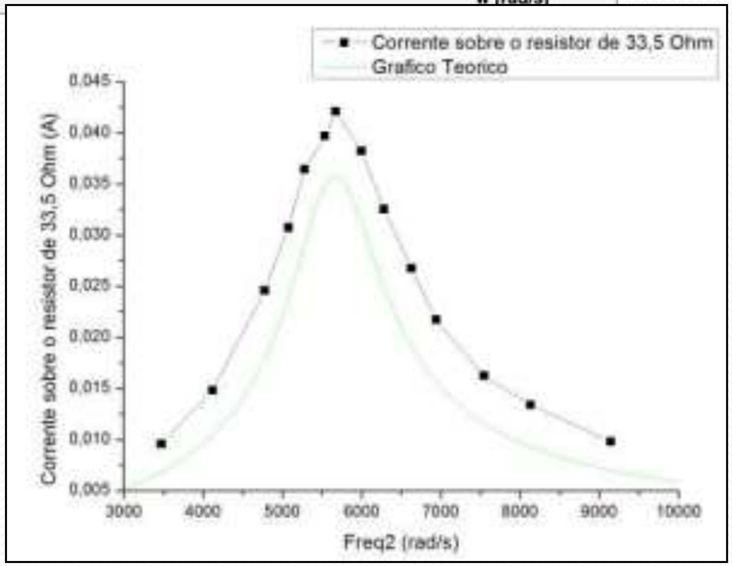
O máximo está deslocado

- O que esquecemos ?

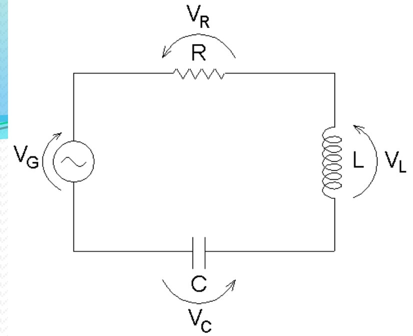






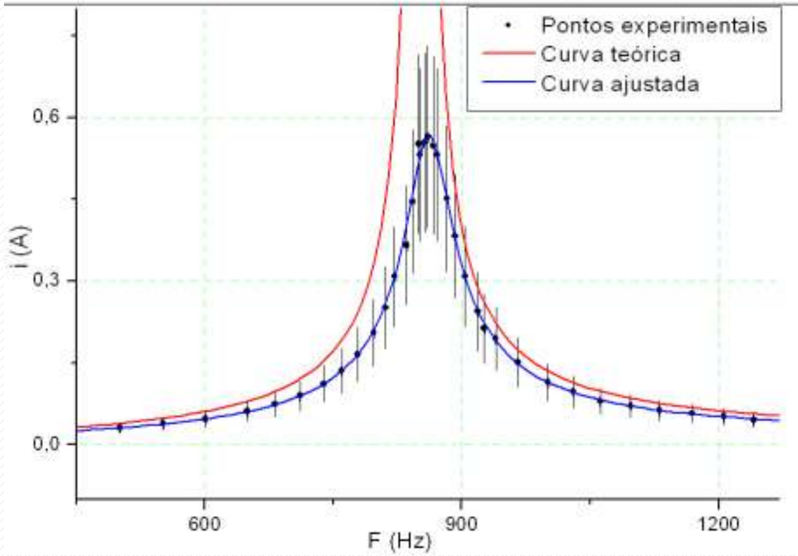


Revendo tudo



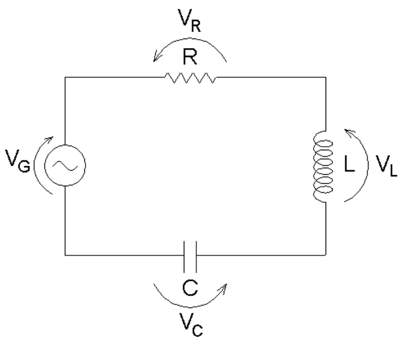
- Os dados não batem com a teoria, mas é possível ajustar uma curva, como a teórica, aos dados!
- Voltando a teoria. Qual a expressão para a corrente?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



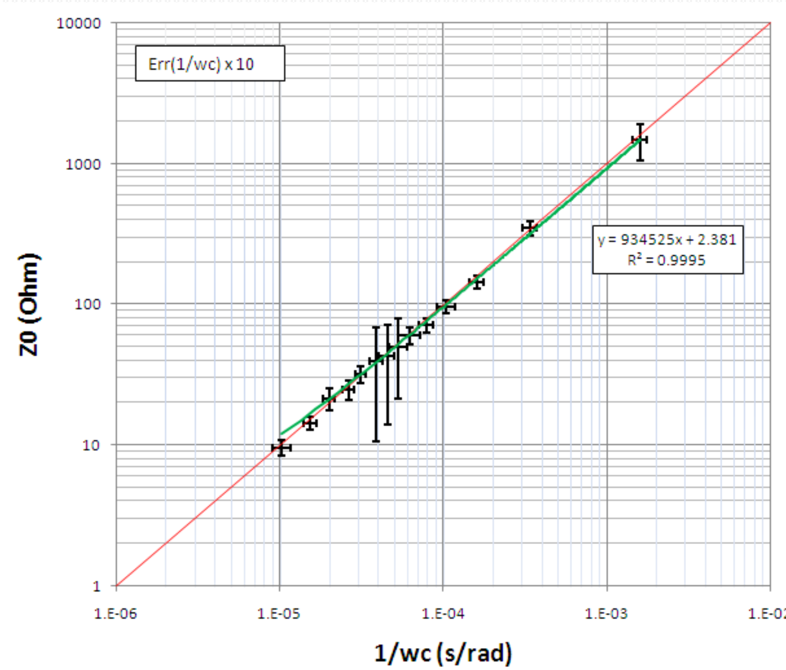
- Duas opções:
  - Ou a física esta incompleta e a expressão está errada
  - Ou não entendemos nosso circuito como pensávamos

Revendo tudo

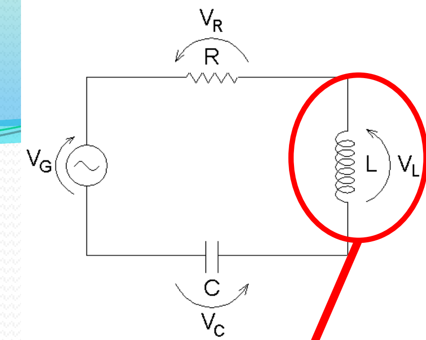


- Vamos supor, inicialmente, que entendemos a Física mas não compreendemos o circuito.
- A resistência vale, de fato, 1 Ω?
  - Medimos com o Ohmímetro

- O capacitor é ideal?
  - Estudamos na primeira semana e, dentro das incertezas experimentais podemos considerá-lo assim.

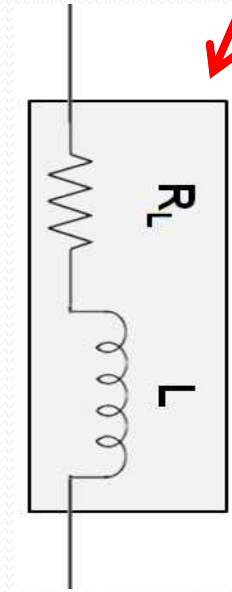


Revendo tudo



- O indutor é ideal?
  - Não! A bobina é, na verdade um fio enrolado e tem resistência não nula
- Na equação R é a resistência total

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad R_T = R + R_L + \cdots$$

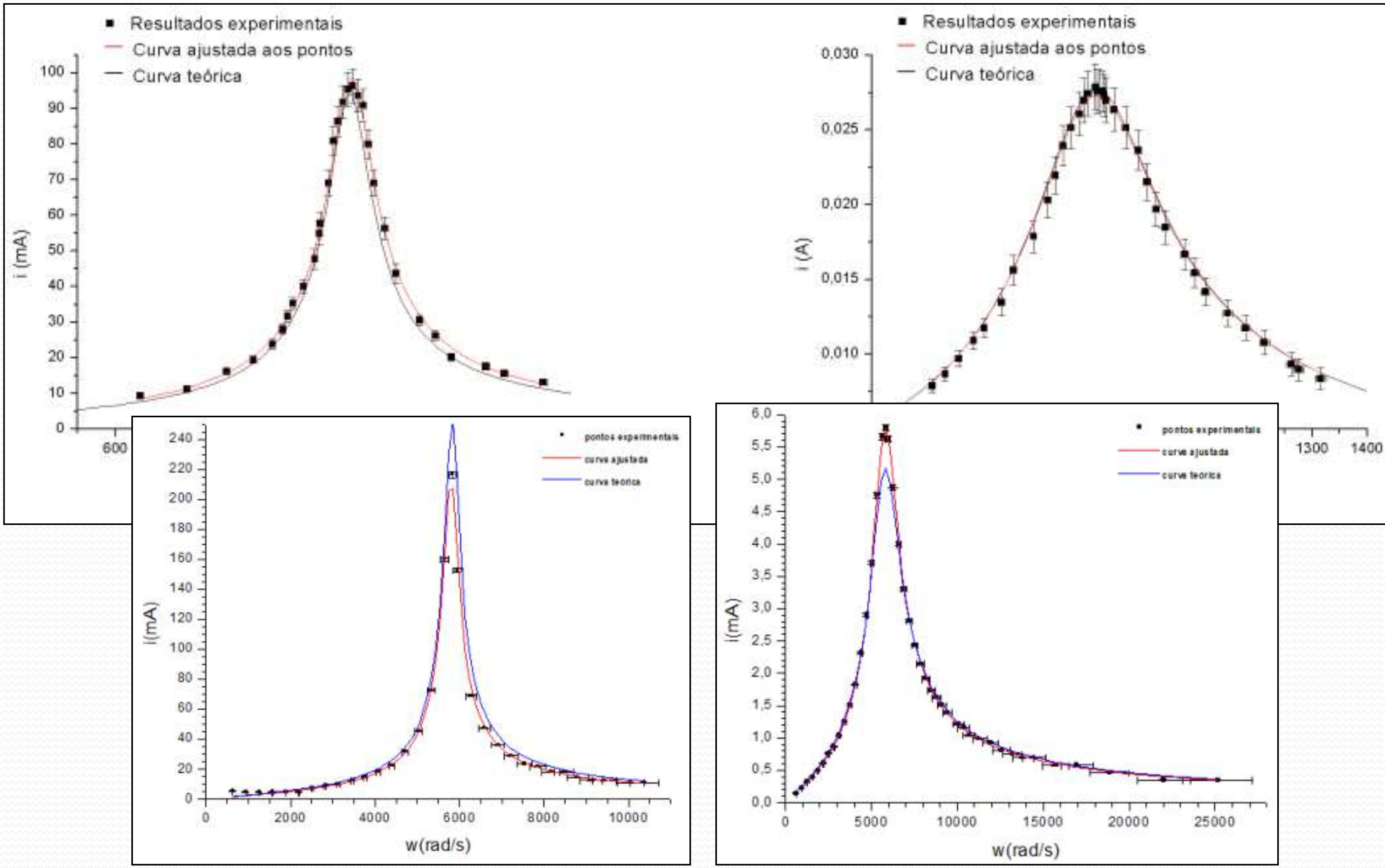


- Existem outras resistências no sistema?
- E a indutância? Será que o valor nominal é confiável?

Mudaria a amplitude do máximo

Mudaria a posição do máximo

Alguns incluíram R_L e/ou R_g



Como determinar R_{total} ?

- Na condição de ressonância de corrente, $\omega=\omega_0$ e:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow R$$

$$tg\phi_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R} \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Se $\Phi_0=0$, corrente e tensão estão em fase, o circuito é puramente resistivo

- Portanto:

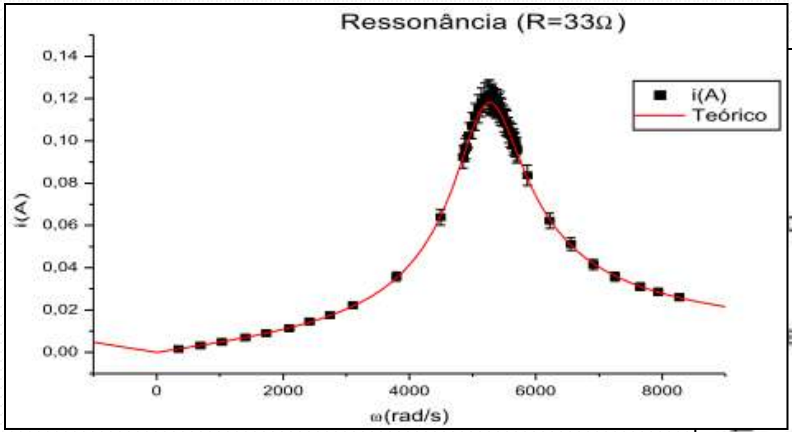
$$V_{G0} = Ri_0$$

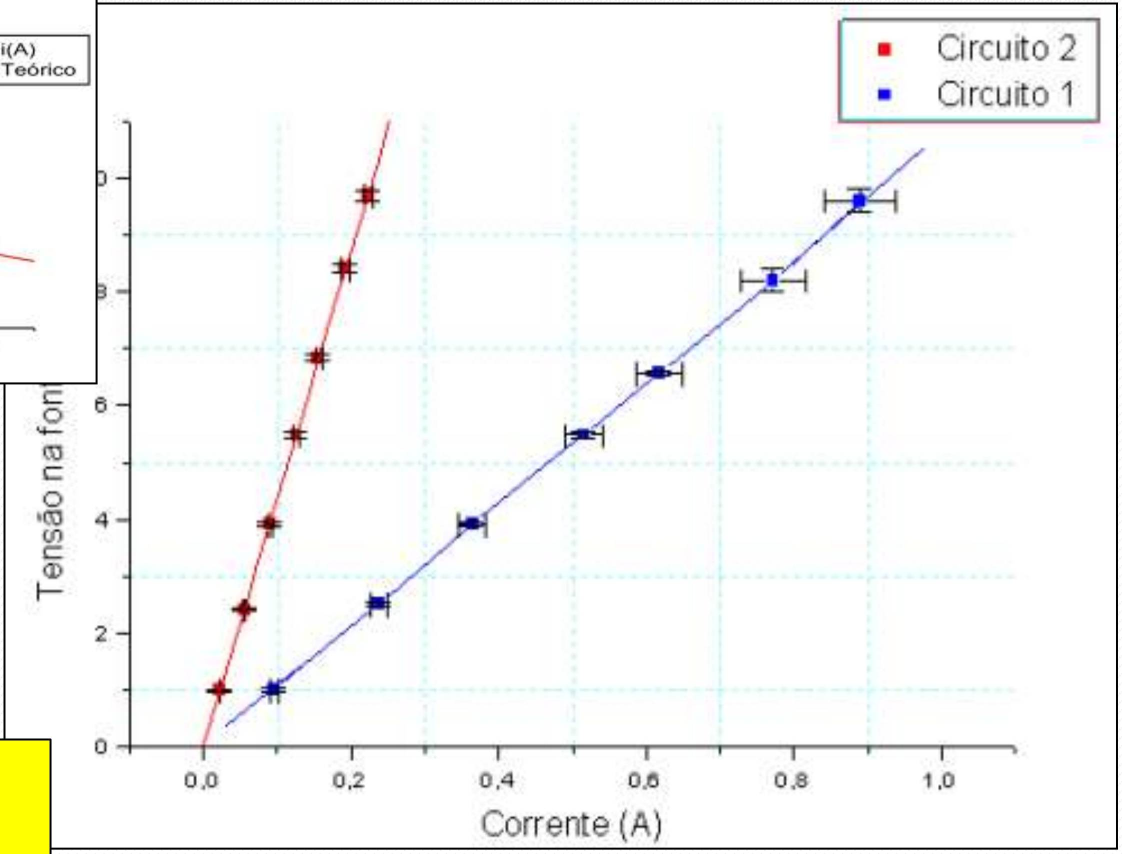
V_{G0} é a tensão de pico aplicada pelo gerador e i_0 é a corrente de pico no circuito

- Ou seja, se medir V_{Go} e i_o na ressonância você descobre qual é a resistência total, **R**, do circuito

Como determinar R_{total} ?

- O problema é que confiaríamos apenas em uma medida... Melhor ajustar uma reta:





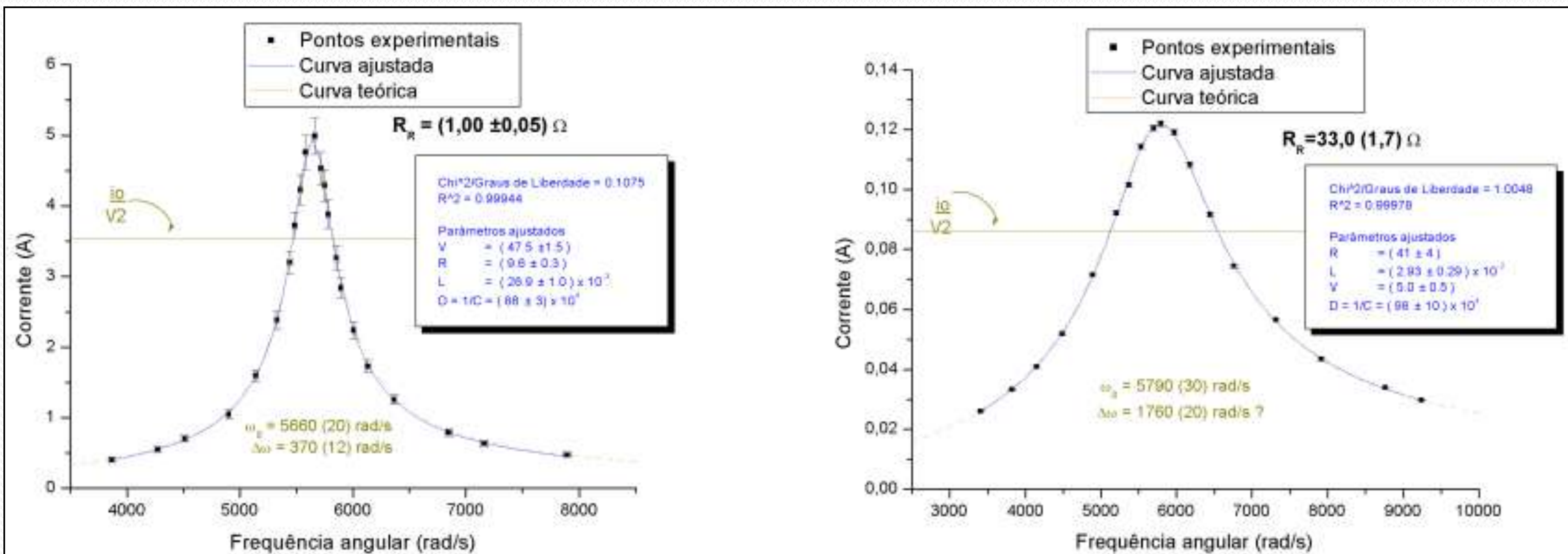
Resultado do ano passado.
Dessa vez ninguém fez assim.

Como determinar R_{total} ?

- Outra maneira, ajustando a curva teórica aos dados experimentais (mínimos quadrados):

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

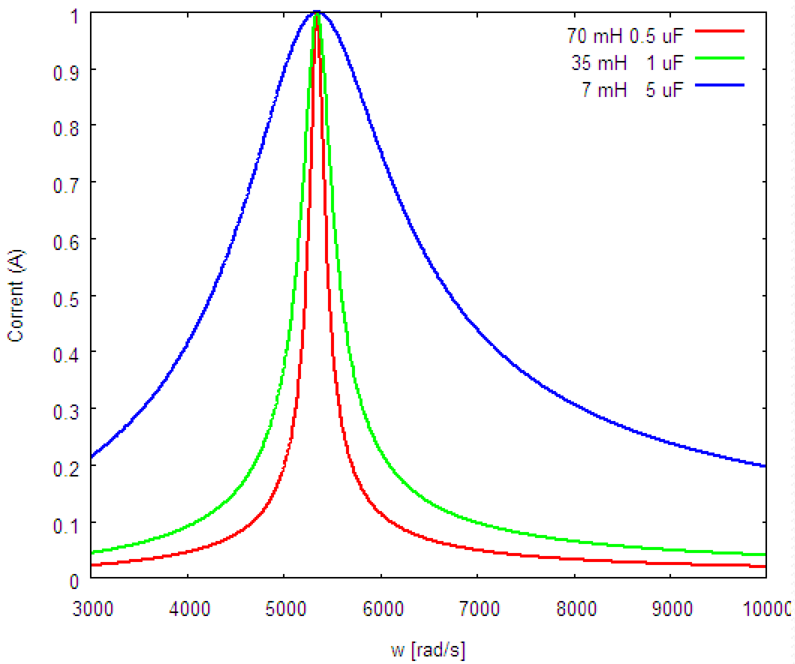
Podemos ajustar todos os parâmetros ao mesmo tempo?



Como determinar R_{total} ?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Posição e largura do máximo



Posição

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Largura

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_G}{\sqrt{2}R}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\mp RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

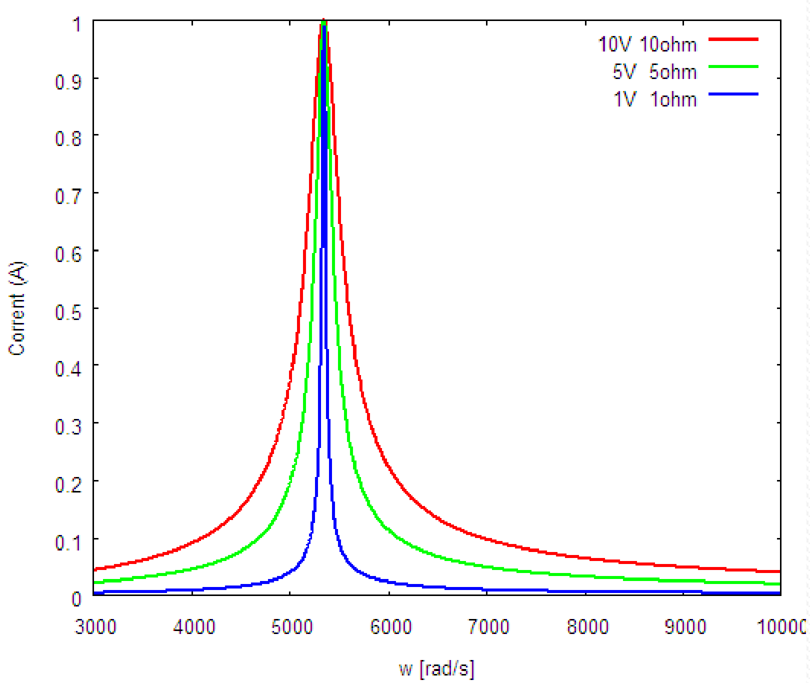
$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$

Diferença entre as 2 raízes positivas

Como determinar R_{total} ?

$$i_0 = \frac{V_G}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Amplitude e largura do máximo



Amplitude

$$i_0(\omega_0) = \frac{V_G}{R}$$

Largura

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$

$$\begin{cases} LC \Rightarrow \text{posição} \\ V_G / R \Rightarrow \text{amplitude} \\ R / L \Rightarrow \text{largura} \end{cases}$$

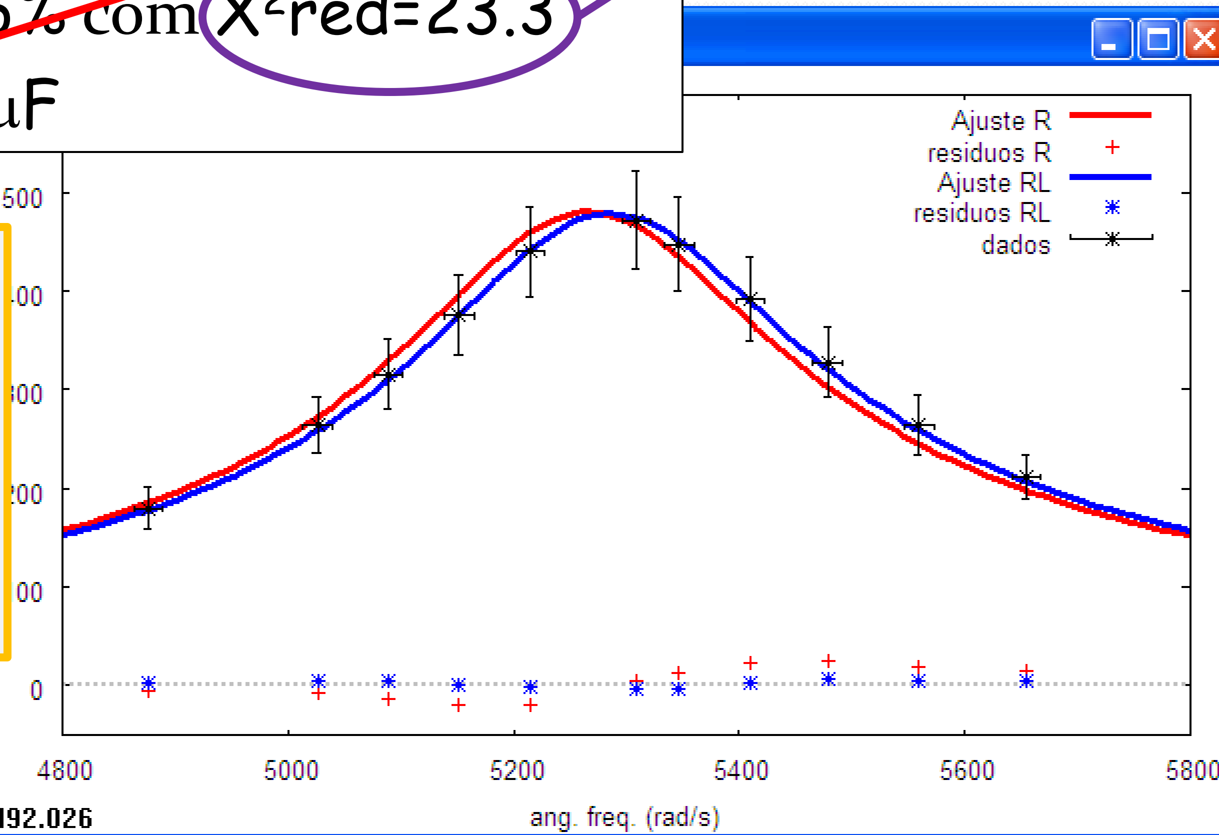
Apenas 3 "variáveis" independentes!

Ajustando R_T e ω_0

- Apenas R, L fixo em 35(3)µF:
  - R=12.10(50) Ohm [grupo]
  - R=11.86 Ohm ± 2.25% com $X^2red=337.0$
- R e L ao mesmo tempo
  - R=11.90 Ohm ± 0.6% com $X^2red=23.3$
  - L=34.74 ± 0.07% µF

Melhor precisão medindo pela ressonância!

Melhor ajuste



Neste caso o grupo deu sorte, pois L nominal estava ok:

ω_{nom}=5267 ± 8.8% rad/s

ω_{exp}=5286 ± 2.0% rad/s

Estimando a Resistência do Gerador

- Podia-se determinar a resistência total do circuito e se conhecia a resistência R e R_L... Então:

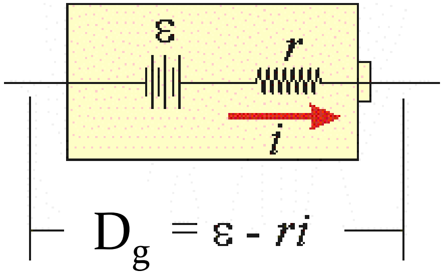
$$R_G = R_T - R - R_L$$

	R peq (Ω)	R grande (Ω)
H1	4,2 (5)	1,4 (1,8)
H2	1,73 (6)	2,80 (6)
H3	2,00 (40)	2,91 (1,70)
H4	--	--
H5	--	--
H6	--	--
H7	--	--
H8	--	--
H9	--	--
H10	2,4 (5)	1,8 (8)
H11	--	--

Outros grupos calcularam Rtotal, mas não estimaram Rg...

Revendo a tensão do Gerador

- Como medir V_G?
  - **A maioria confundiu a tensão produzida pelo gerador com a ddp entre seus terminais (Dg)!**



O gerador não é ideal e tem uma resistência interna (lab3)

- Na nossa teoria, o que chamamos de V_G é na verdade ε!
  - **ε devia ficar fixo, mas Dg não, pois a corrente varia.**
  - Para determinar **ε** era preciso medir com o circuito "em aberto", ou seja com a corrente nula.
  - Isso podia ser feito com um multímetro (valor RMS) ou com o osciloscópio, mas não podia estar passando corrente pelo RLC.

Revendo as medidas de R_T

- A resistência total foi calculada dividindo Dg pela corrente na ressonância:

$$R_T = \frac{D_G^{\ ress}}{i^{ress}}$$

- Mas notem que, em um **circuito não ideal**, o que temos é:

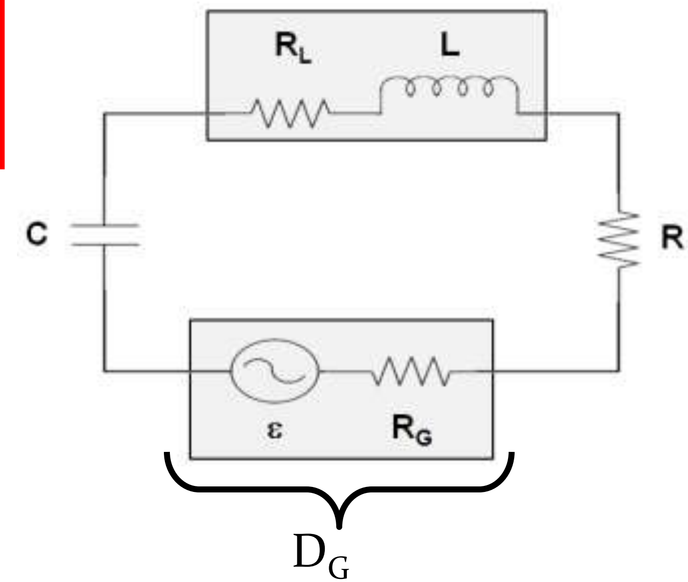
$$R + R_L = \frac{D_G^{\ ress}}{i^{ress}}$$

Vocês mediram $R+R_L$ achando que era R_T

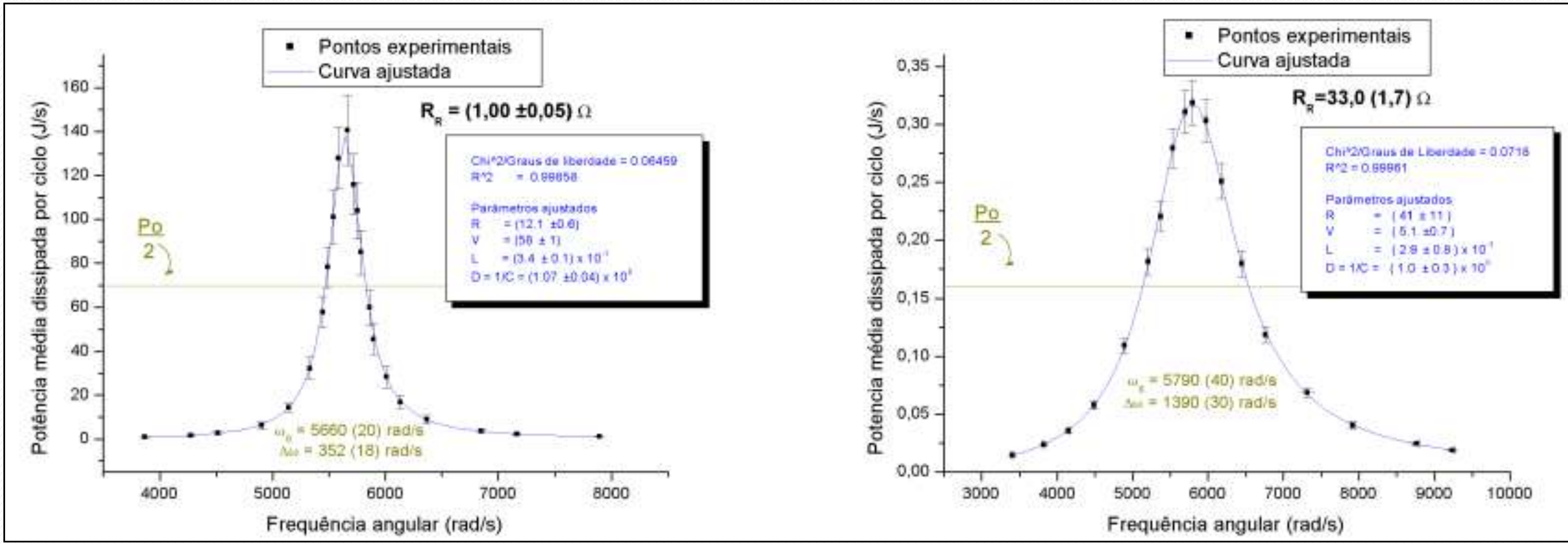
$$D_G^{\ ress} = \varepsilon - iR_G^{\ ress}$$

$$R + R_L + R_G = \frac{\varepsilon}{i^{ress}}$$

Era preciso ter medido ε para ter R_T.



Potência $\overline{P} = \dfrac{Ri^2}{2}$



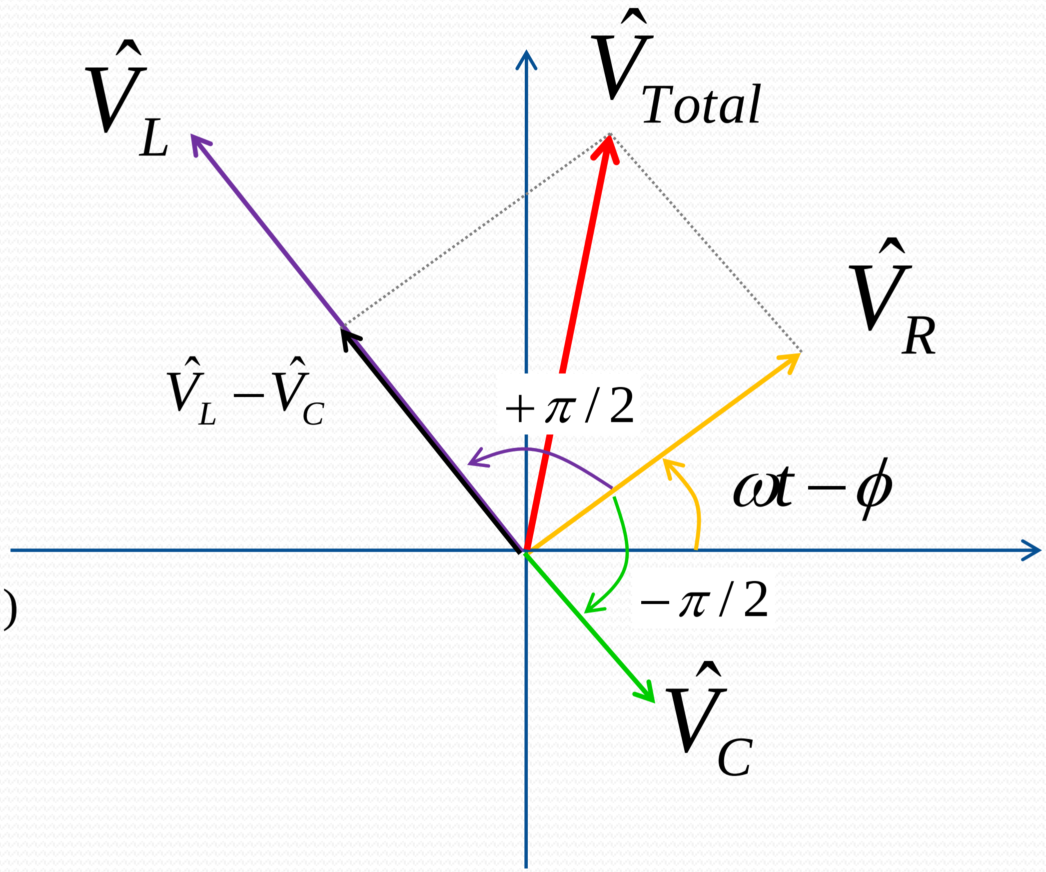
A partir da curva da potência podemos calcular o fator de qualidade

Fator de Qualidade

	Rpeq		Rgrande	
	Teórico	**Exp.**	**Teo.**	**Exp.**
H1	11,2 (8)	10,2 (7)	2,36 (4)	2,52 (4)
H2				
H3	--	13,3 (1,8)	--	3,9 (5,0)
H4	--	16,98 (42)	--	10,6 (6)
H5	27,583 (68)	30,240 (62)	14,149 (55)	13,692 (15)
H6	--	12,99	--	4,05
H7	--	9,67	--	3,53
H8	123,67	104,75 (7,69)	4,904629	6,16 (0,45)
H9	--	--	--	--
H10	--	15,0 (5)	--	3,29 (4)
H11	10,13 (14)	11,9 (12)	5,867 (74)	4,06 (62)

Diferença entre V_L e V_C

- Na ressonância, V_L=V_C e V_{tot} = V_R
- Mas e se o indutor não for ideal ??



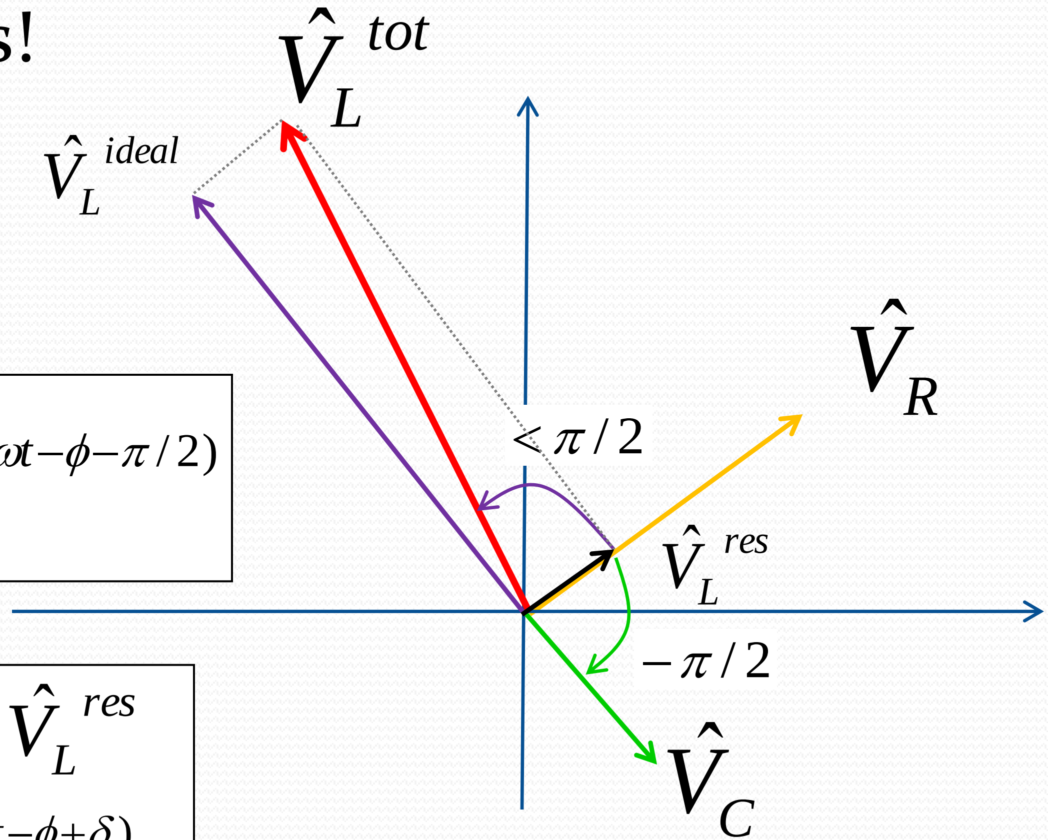
$$\hat{V}_R(t) = Ri_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \omega L i_0 e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$

Diferença entre V_L e V_C

- Nesse caso, a tensão no indutor tem duas componentes!



$$\hat{V}_C(t) = \frac{1}{\omega C} i_0 e^{j(\omega t - \phi - \pi/2)}$$

$$\hat{V}_L(t) = \hat{V}_L^{\,ideal} + \hat{V}_L^{\,res} = V_L^{tot} e^{j(\omega t - \phi + \delta)},$$

onde $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

$$\phi_{C-L} = \delta + \frac{\pi}{2} \overset{lab}{\approx} \pi - 4^o$$

$$V_L^{real} = i_0\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} > V_L^{ideal}$$

Na ressonância

	R peq			R grande		
	Fase	Vind	Vcap	Fase	Vind	Vcap
H1	176,8 (4)	--	--	176,5 (7)	--	--
H2		5,20 (16)	5,1 (3)		19,1 (10)	19,3 (11)
H3	3.141 (90)	36,60 (40)	36,20 (40)	3.141 (90)	9,44 (40)	9,44 (40)
H4	184.1 (2.0)	--	--	183.3 (2.0)	--	--
H5	2.73 (13)	4,12 (16)	4,12 (16)	3.04 (13)	1,050 (40)	1,060 (0,40)
H6	-3.7 (5)	15,75 (10)	15,9 (2)	4.9 (1.5)	2,78 (2)	2,78 (3)
H7	--	--	--	--	--	--
H8	2,259	19,0 (2,0)	22,6 (1,4)	2,264	11,8 (0,8)	14,4 (0,9)
H9	-3,582º	1,600 (8)	1,400 (8)	-3,723º	0,404 (8)	0,352 (8)
H10	0,60 (1) pi	14,0 (5)	12,8 (5)	0,56 (1) pi	--	--
H11		4,566 (39)	4,566 (39)	177,34	1,083 (11)	0,316 (4)

Resumo dos pontos críticos

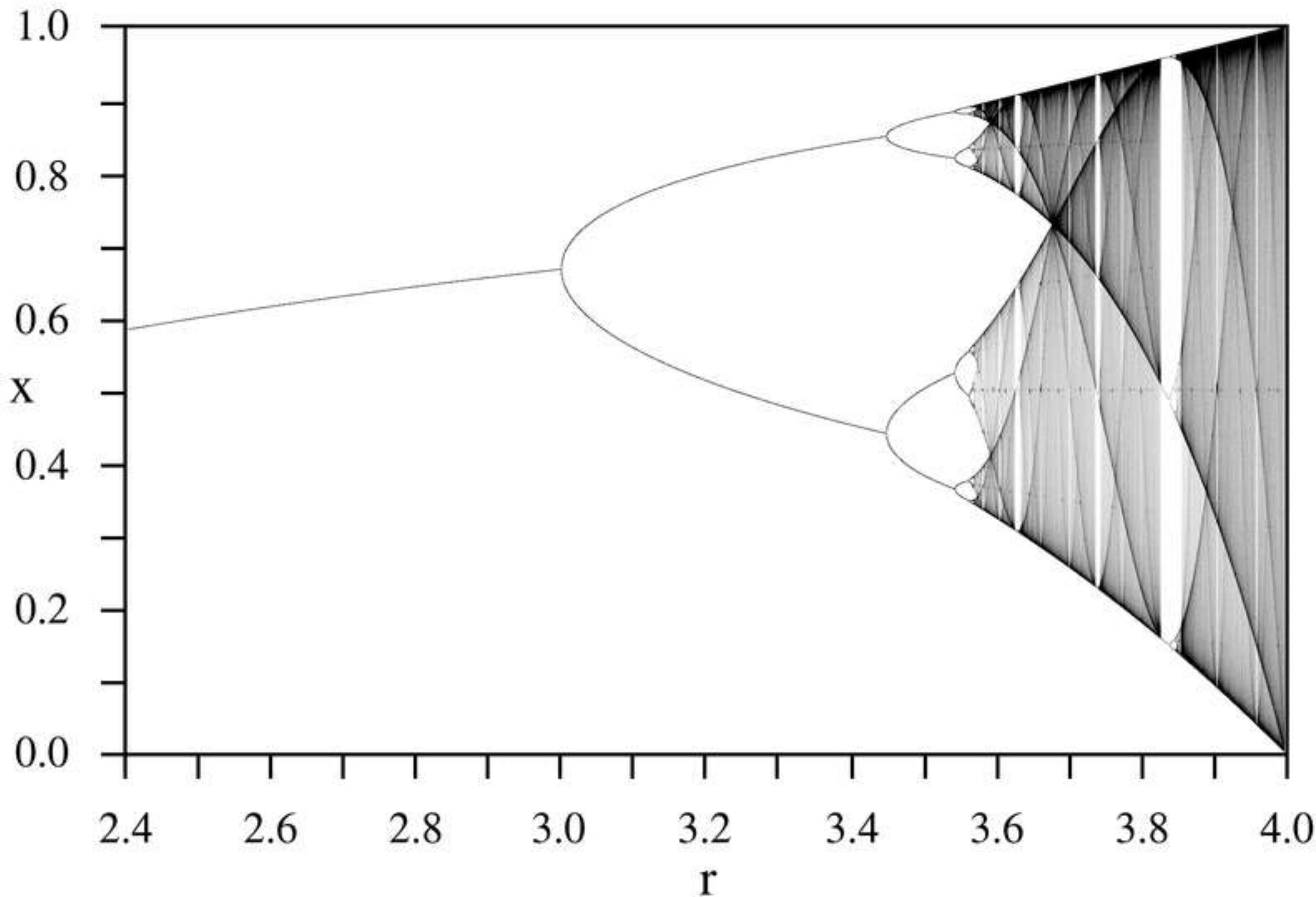
- A resistência total é $R + R_L + R_G$
- $\varepsilon_{gerador}$ tem que ser medido com o circuito aberto. Caso contrário mede-se DDP_G.
- $\varepsilon_{gerador}$ devia ser fixo e não DDP_G.
- R_L nominal é confiável? Alguém mediu com o multímetro?
- Será que o indutor tem capacitância parasita entre as voltas do enrolamento?
- A diferença de fase devia ser ligeiramente menor do π, e V_L ligeiramente maior que V_C

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC e circuito integrador
  - Análise de Fourier unidimensional
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

Próximas duas Semanas

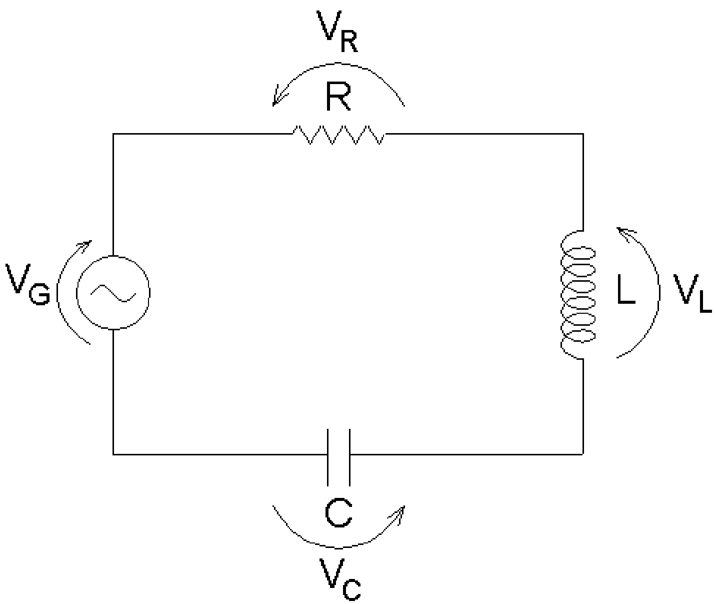


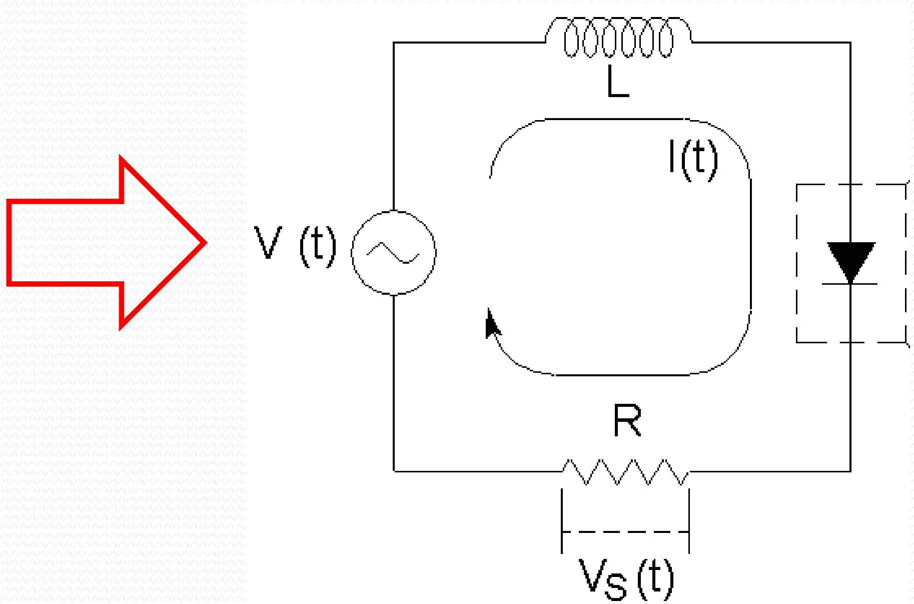
Próximas duas Semanas

- Será que a introdução de efeitos não lineares no RLC muda o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
  - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece se trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
    - Diodo → capacitor não linear
  - **A dinâmica muda totalmente → Caos**

Objetivos Para as Próximas Semanas

- Estudar o circuito RLD (ou RLC não linear)





- Semana 1
  - Teoria de caos e experimentos computacionais
- Semana 2
  - Medidas experimentais com RLD

Aula de Hoje

- Introdução a caos e sistemas caóticos
- Estudo de crescimento de populações
  - Mapa logístico

O que é Caos ?

Quais são os limites para a dinâmica (evolução temporal) de um sistema físico?

Comportamento regular rígido

- Pêndulos (relógio)
- Sistema massa-mola
- Queda livre
- Circuito RLC comum

Sistemas que apresentam Caos

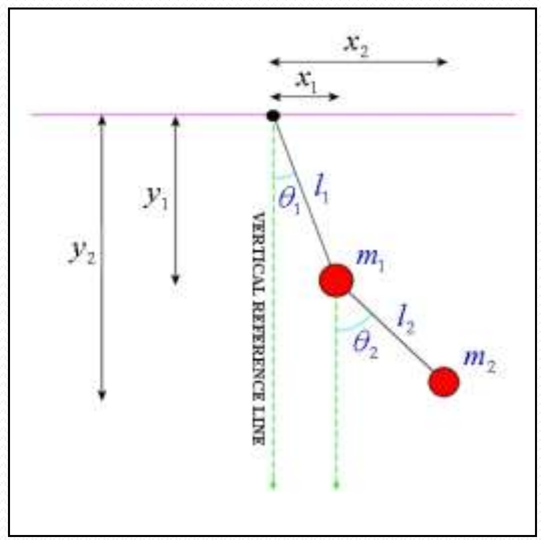
- Clima
- Crescimento populacional
- Pêndulo duplo
- Circuito RLD

Comportamento totalmente aleatório

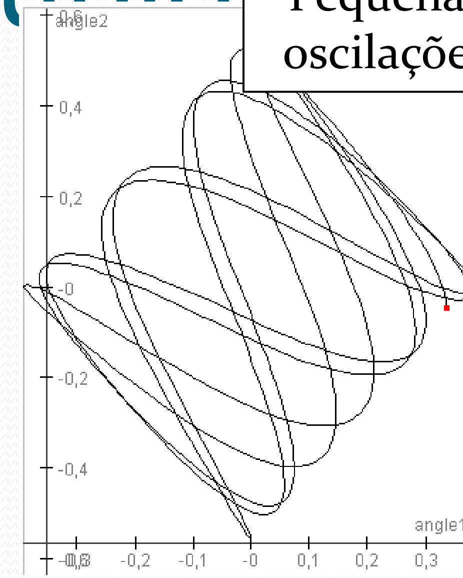
- Jogo de dados
- Decaimento radioativo
- Movimento

Exemplo: Pêndulo Duplo

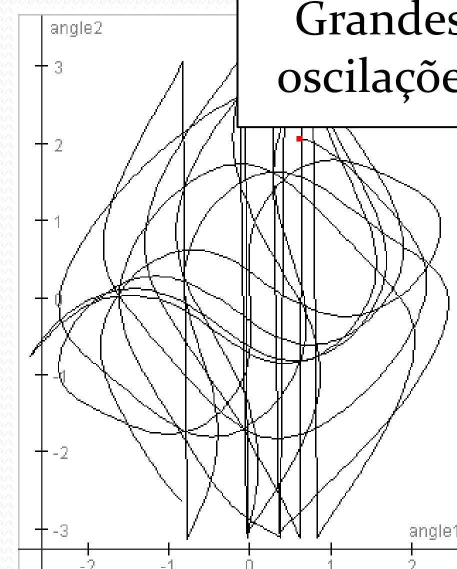
- Um pêndulo amarrado no outro
  - O espaço de fase é composto pelos 2 ângulos e as 2 velocidades



Pequenas oscilações



Grandes oscilações



http://physlab.net/dbl_pendulum.html
http://lecturedemo.ph.unimelb.edu.au/Mechanics/Chaos/Mn-1-Chaotic-Double-Pendulum

Algumas Definições Necessárias

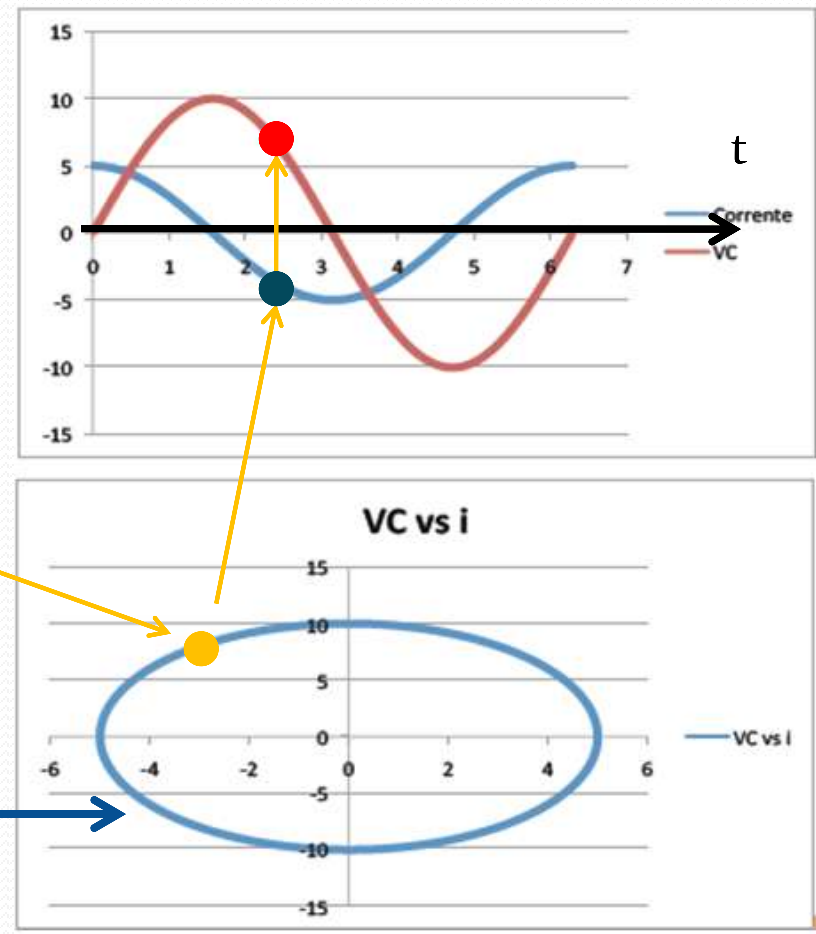
Sistema dinâmico – é qualquer sistema cuja evolução a partir de uma determinada condição inicial é regida por um conjunto de regras. Essas regras podem se resumir a um conjunto de equações diferenciais, que é o caso para sistemas contínuos.

Espaço de fase – é o espaço no qual todos os possíveis estados de um sistema são representados. Em mecânica, por exemplo, seria o conjunto de posições e momentos.
No pêndulo duplo teria 4 dimensões:

θ_1, θ_2, θ_1' e θ_2'

Estado – é uma possível condição para o sistema, isto é, uma configuração de variáveis que represente uma condição fisicamente possível ou aceitável.

Retrato de fase – é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema dinâmico em questão. Os retratos de fase para sistemas contínuos são trajetórias no espaço de fase.

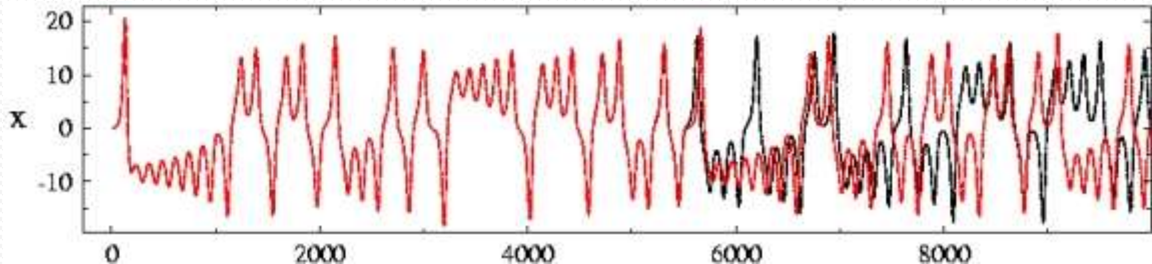


Algumas Definições Necessárias

- **Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real** depende de um ou mais parâmetros chamados de **parâmetros de controle**.
- Por exemplo: a **freqüência natural de oscilação** é um parâmetro de controle de um oscilador harmônico simples.
- No caso de um circuito **RLC forçado**, tanto a **freqüência** quanto a **amplitude da tensão aplicada** são parâmetros de controle.
- Um sistema dinâmico pode, portanto, ser pensado como função do parâmetro de controle. De fato, pode-se **influir no comportamento dinâmico do sistema alterando-se o valor de um parâmetro de controle**.

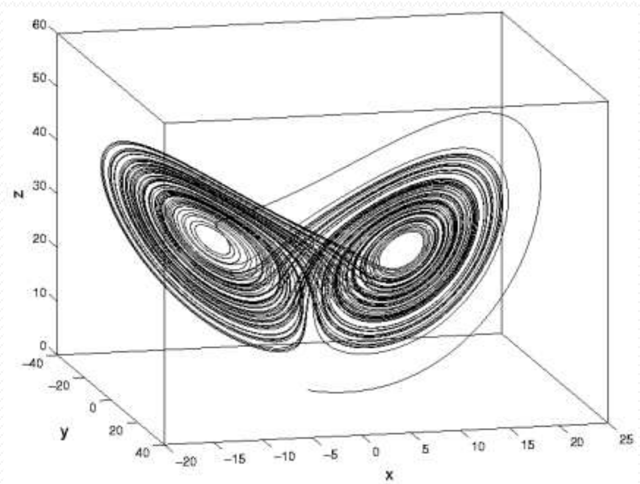
CAOS: Principais Características

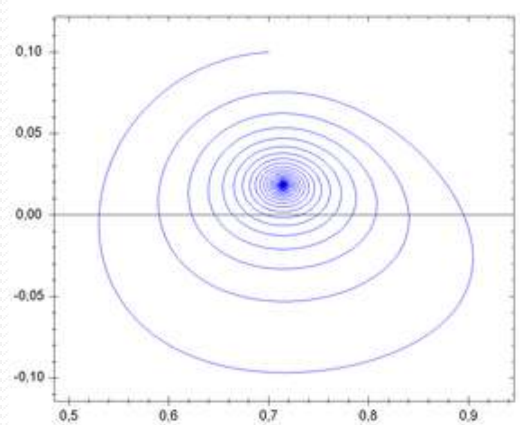
- **Não linearidade**. Se o comportamento de um sistema for linear, esse sistema não pode ser caótico
- **Sensibilidade a condições iniciais**: pequenas alterações nas condições iniciais podem levar a comportamentos radicalmente diferentes do sistema em seu estado final. É o chamado “efeito borboleta”. Os sistemas caóticos também apresentam sensibilidade aos parâmetros de controle.
- **Determinismo**: existem regras subjacentes determinísticas (e não probabilísticas) que todo estado futuro do sistema deve obedecer
- **Manutenção da irregularidade no comportamento do sistema**. Há uma ordem oculta que inclui um número grande ou infinito de configurações periódicas ocultas na infra-estrutura desses sistemas: há uma “ordem na desordem”.
- **Previsão de longo prazo impossível:** em decorrência da sensibilidade às condições iniciais, a previsão (mas não o controle) do comportamento de sistemas caóticos de **longo prazo é impossível**, porque as condições iniciais são conhecidas com grau de precisão finito.



CAOS: Como são as trajetórias no espaço de fase?

- **Existe 3 possibilidades para essas trajetórias**:
  - as trajetórias tendem a se concentrar numa determinada região do espaço de fase e não saem mais de lá: esses são chamados de estados assintóticos do sistema ou **atratores**.



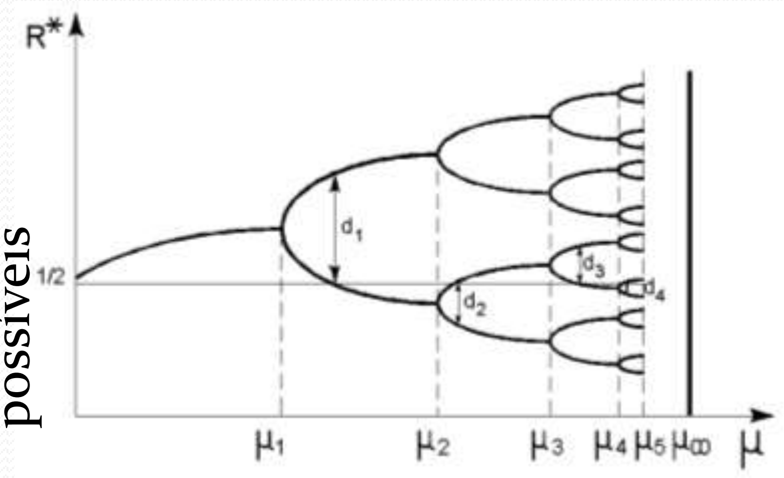


  - as trajetórias tendem a se afastar uma das outras e vão para o infinito
  - as trajetórias ficam “passeando” por todo o espaço de fase

CAOS: Como se chega lá?

- **Bifurcações** – Vamos supor que um sistema dinâmico tenha um parâmetro de controle μ.
  - Variando-se μ podem aparecer novos padrões de comportamento ou seqüências de novos estados estáveis(atratores) para o sistema.
  - Neste caso diz-se que ocorreram **bifurcações** e μ_n é o valor do parâmetro de controle para o qual ocorreu a n-ésima bifurcação.
  - Em outras palavras, variando-se μ pode-se variar tanto a posição quanto as características qualitativas dos pontos de equilíbrio estáveis (atratores) do sistema.

Valores estáveis possíveis



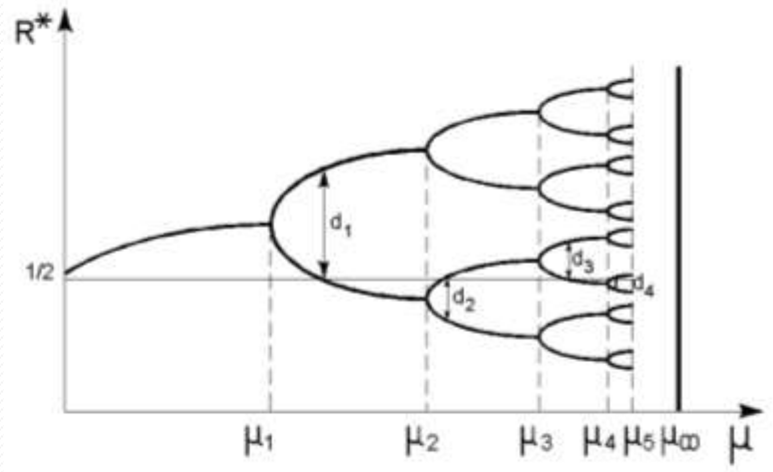
CAOS: Como se chega lá?

- Nesse caso uma solução estável do sistema perde a estabilidade com a variação de um parâmetro de controle e aparece uma nova solução estável com o dobro do período da solução anterior. Então diz que para **$\mu=\mu_n$** houve uma bifurcação porque o "período" duplicou. Essas soluções são estados assintóticos do sistema, geralmente chamados de **atratores**.
- Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**) é a duplicação dos atratores

Constante de Feigenbaum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta$$

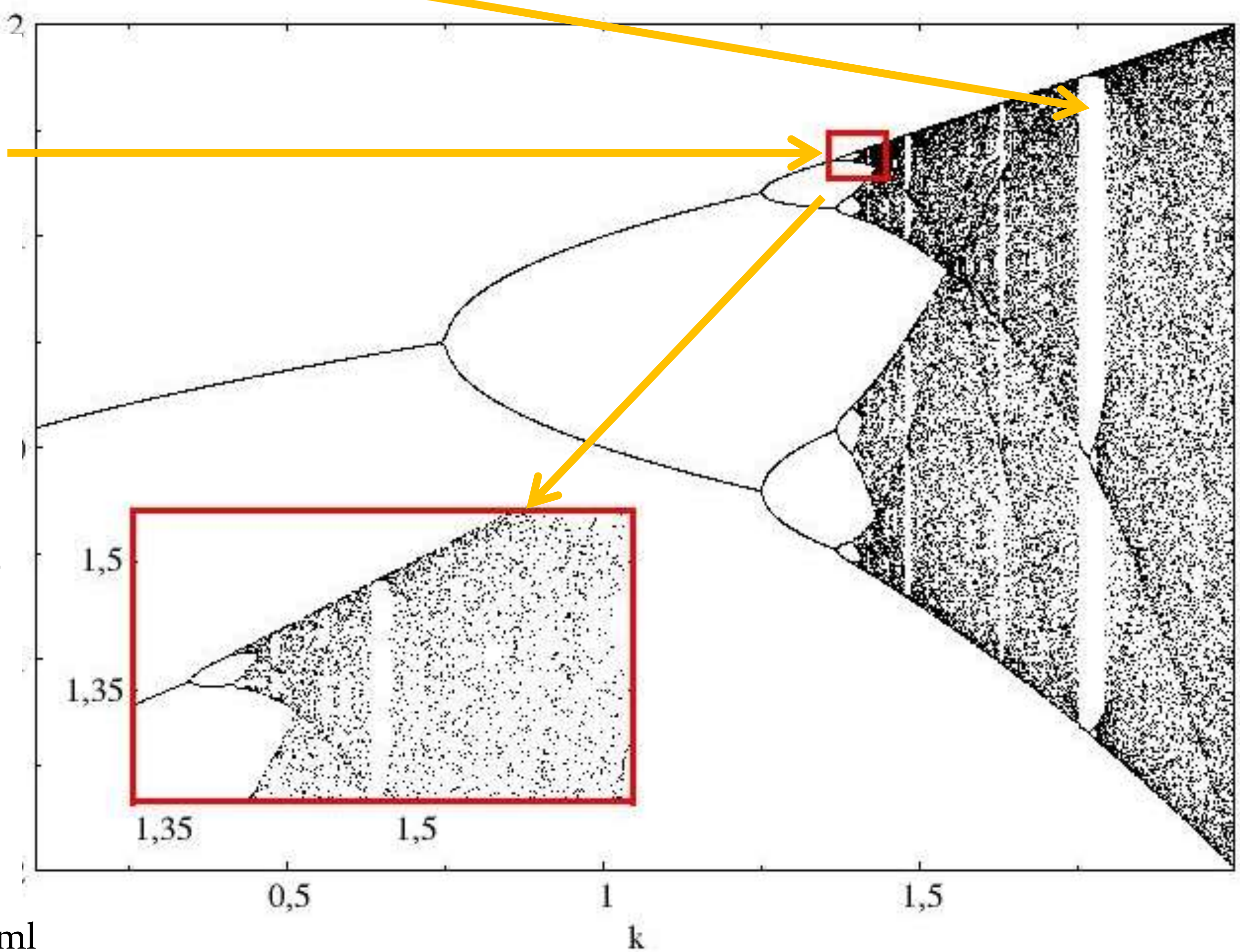
$$\delta = 4{,}6692016091029909\ldots$$



Caos e Fractais

- A sucessão de dobramentos do período acaba levando ao domínio caótico, que *parece* (**mas não é**) uma nuvens de pontos dispersos.
- No meio do caos, há janelas indicando uma dinâmica organizada e previsível.

- Um pequeno pedaço é similar ao diagrama todo $\Rightarrow$ fractal.
- ... Ou melhor: o domínio caótico aparece como uma nuvens de pontos com dimensão fractal no espaço de parâmetros

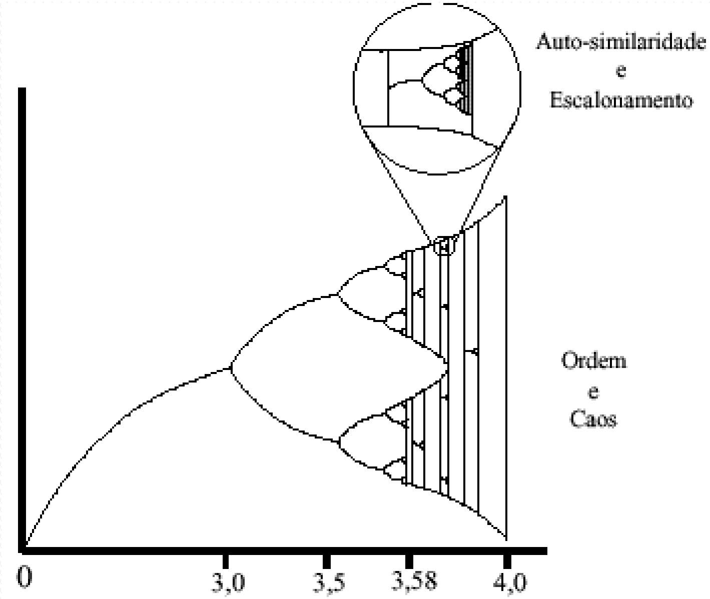


http://complex.upf.es/~josep/Chaos.html

Caos e Fractais

Fractal - é a propriedade de se fraturar em padrões auto-similares e escalonados. Fractais possuem:

- **Auto-similaridade** - existem padrões dentro dos padrões que nunca são exatamente os mesmos mas que são sempre similares (galhos de uma árvore que se bifurcam cada vez mais até chegar nas micro-nervuras da folha, mas que têm praticamente o mesmo padrão de bifurcação).
- **Escalonamento** - quando examinamos os padrões de auto-similaridade em escalas cada vez menores, verificamos que eles são repetições de si mesmos (podemos "enxergar" o padrão de nervuras de uma árvore inteira em qualquer folha desta mesma árvore).



Wagner P. Paiva http://www.cyta.com.ar/ta0203/v2n3a2/v2n3a2.htm

Exemplo Simples de CAOS

- Em 1838, Pierre Verhulst publicou sua "equação logística" para descrever o **crescimento de populações**, ou a taxa de crescimento em função da população atual e do parâmetro ***r***.

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \text{com } x = \frac{\text{número de indivíduos}}{\text{capacidade do ambiente}}$$

- r é o número malthusiano:
  - Se r < 0 a população sempre morre com o tempo
  - Se r > 0 a pode sobreviver
- Essa equação pode ser resolvida de maneira exata e a solução só depende de x_0 e de r.

$$x(t) = \frac{1}{1+({x_0}^{-1}-1)e^{-rt}}, \text{ função sigmoide}$$

Exemplo Simples

- A equação de **Verhulst** possui inconvenientes para o estudo de evolução de populações pois a população em qualquer instante t depende somente das condições iniciais e é contínua.
- Era desejável haver modelos onde o estágio atual da população dependa apenas da geração anterior e não da condição inicial.
- O **Mapa Logístico** é um análogo discreto no tempo da equação logística e foi popularizado por um paper de 1976 de **Robert May.** Físico teórico australiano, ele começou a trabalhar com biologia quando foi para o Instituto de Estudos Avançados de Princeton em 1971.

$$x_{n+1} = r x_n \left(1 - x_n\right)$$

Exemplo Simples: Mapa Logístico

Crescimento de Populações:

- O mapa logístico descreve o tamanho da populações em função de seu tamanho na geração anterior:

$$x_{n+1} = x_n \cdot r(1 - x_n)$$

  - $\mathbf{x_n}$ são frações da população máxima (capacidade do meio)
  - $\mathbf{x_0}$ é a fração inicial
  - **r** é o potencial biótico e $\mathbf{r(1-x_n)}$ é a taxa de crescimento
- Neste caso r>0 sempre
- Como é a evolução temporal da população (tamanho das gerações n=1,2,3...) em função da condição inicial X_0 e do potencial biótico?

Calculando o Mapa Logístico(1)

- Na mão:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

x0=0.500 e r=0.5

x1=.5*.5*(1-.5)=.125

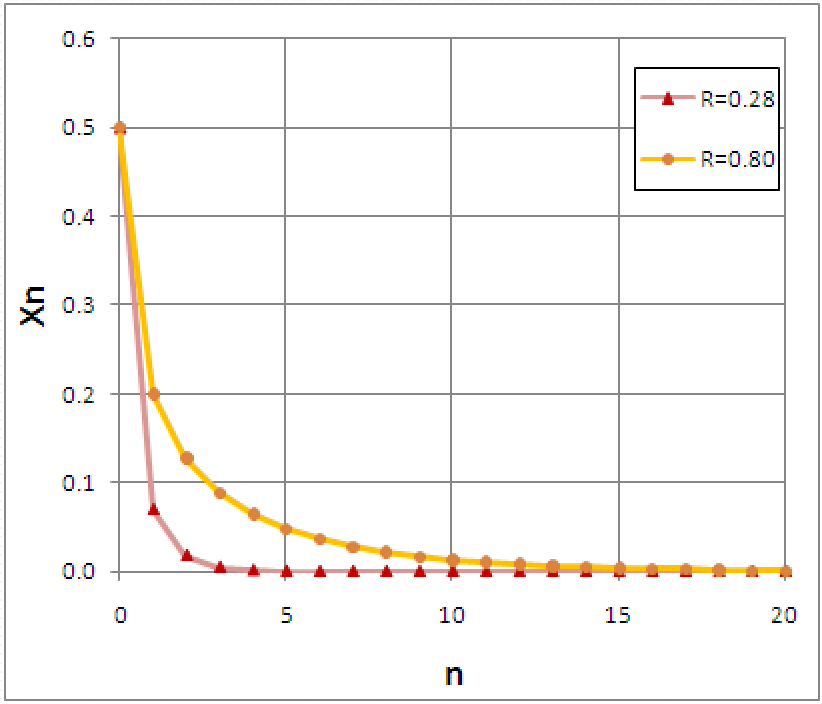
x2=.5*.125*(1-.125)=.055

x3=.5*.055*(1-.055)=.026

x4=.5*.026*(1-.026)=.013

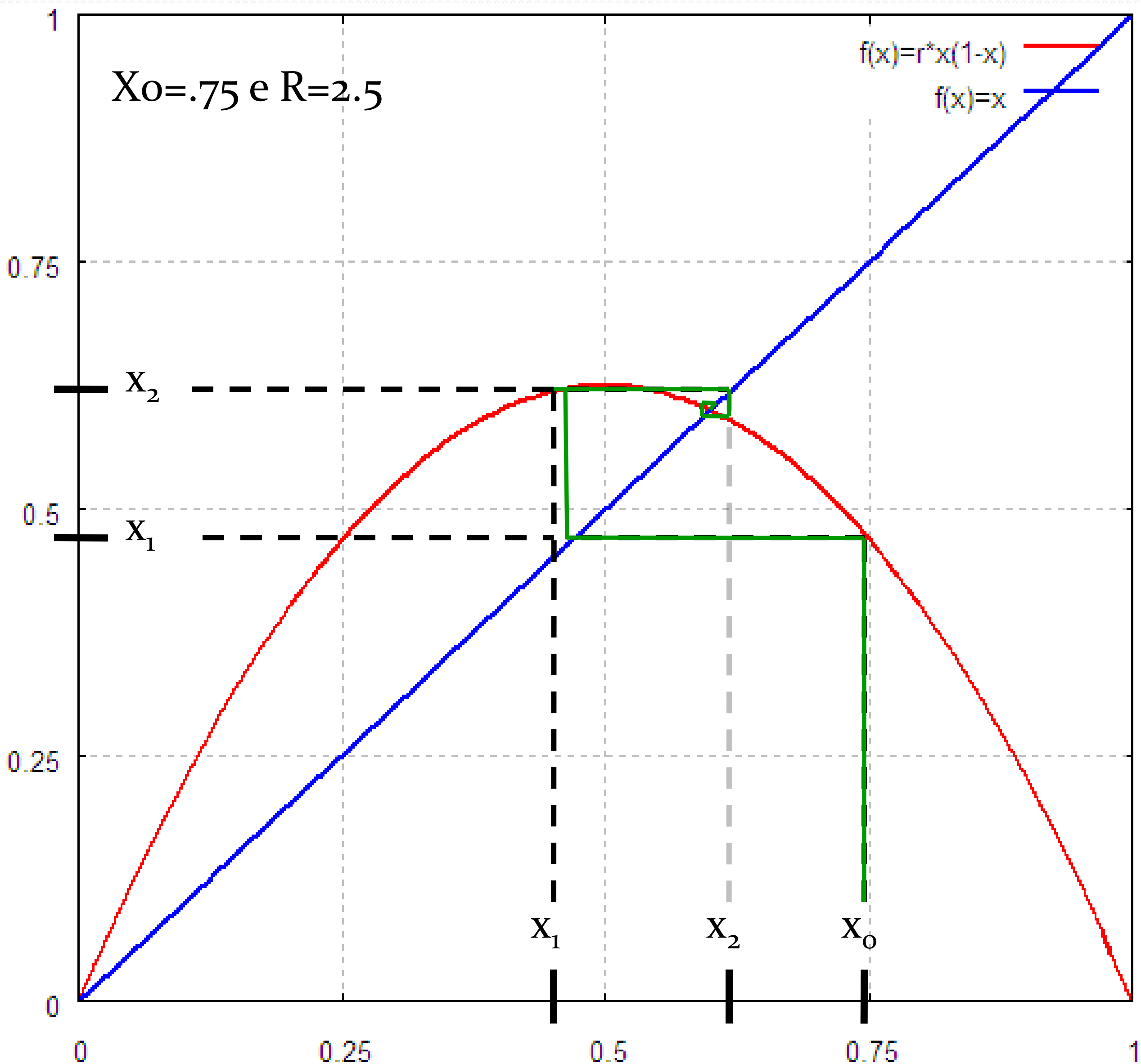
...

x9=0.000



Para estes parâmetros a população não sobrevive

Calculando o Mapa Logístico(2)



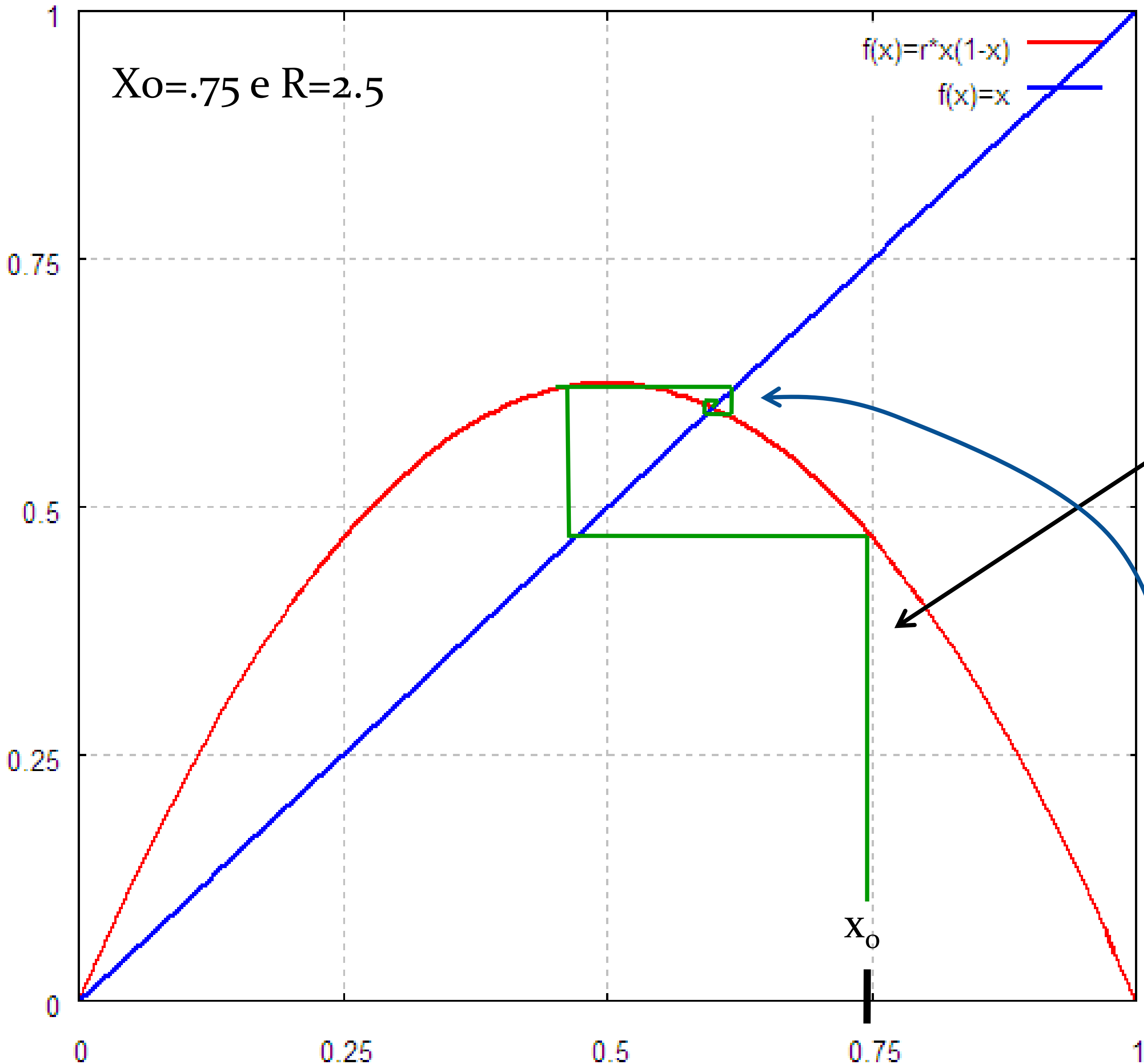
- Meios gráficos:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

1) Calcula-se o valor de $f(x_0)$
2) Rebate-se na reta para ter x_1
3) Calcula-se o valor de $f(x_1)$
4) Rebate-se na reta para ter x_2
5) etc...

A população estabilizou em 0.6

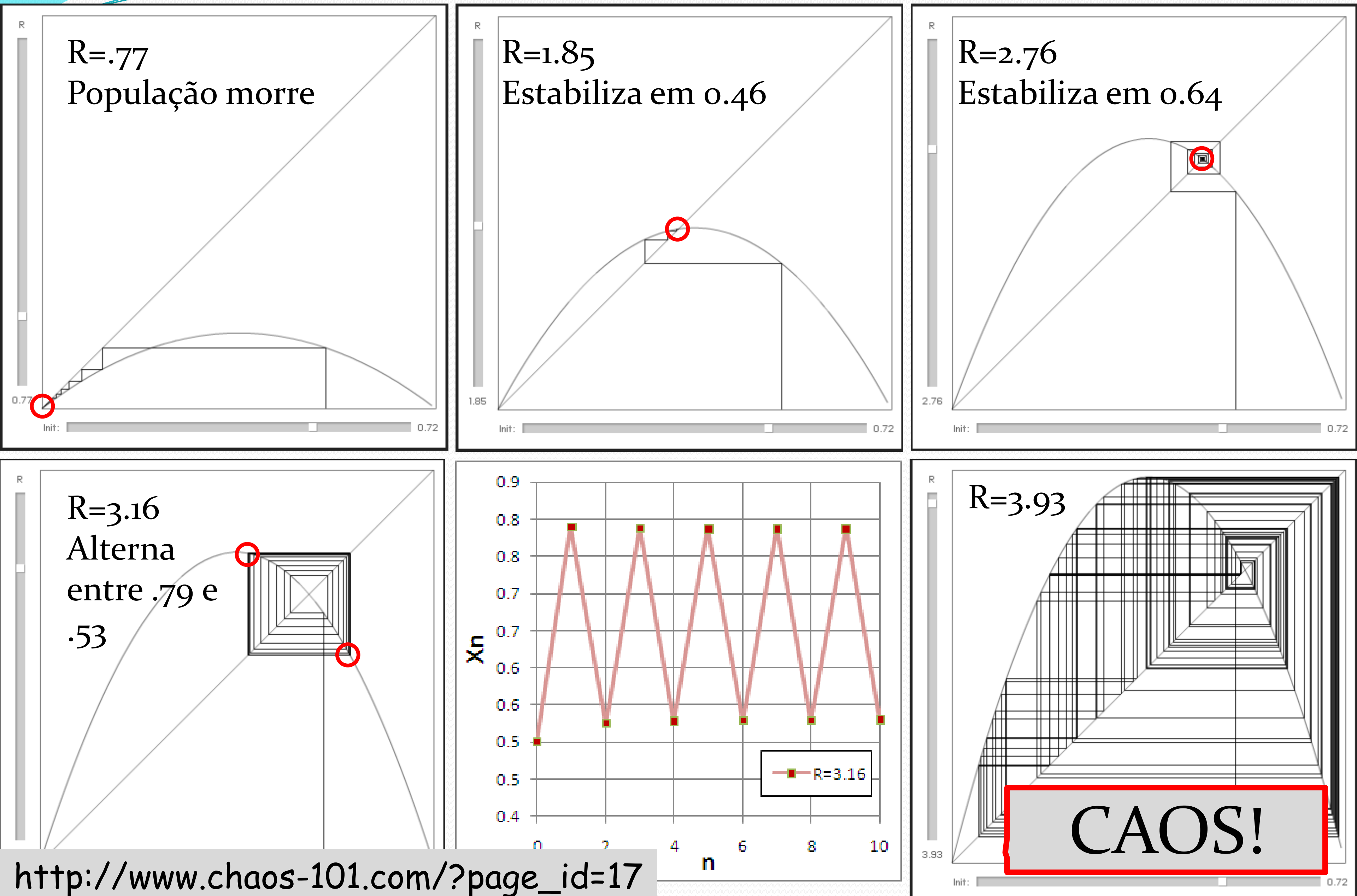
Calculando o Mapa Logístico(2)



IMPORTANTE: O comportamento depende de r.

- Transiente:
  - As várias iterações antes da população estabilizar
- Estacionário
  - As iterações depois do transiente

Applet Mapa Logístico – x_0=0.72



http://www.chaos-101.com/?page_id=17

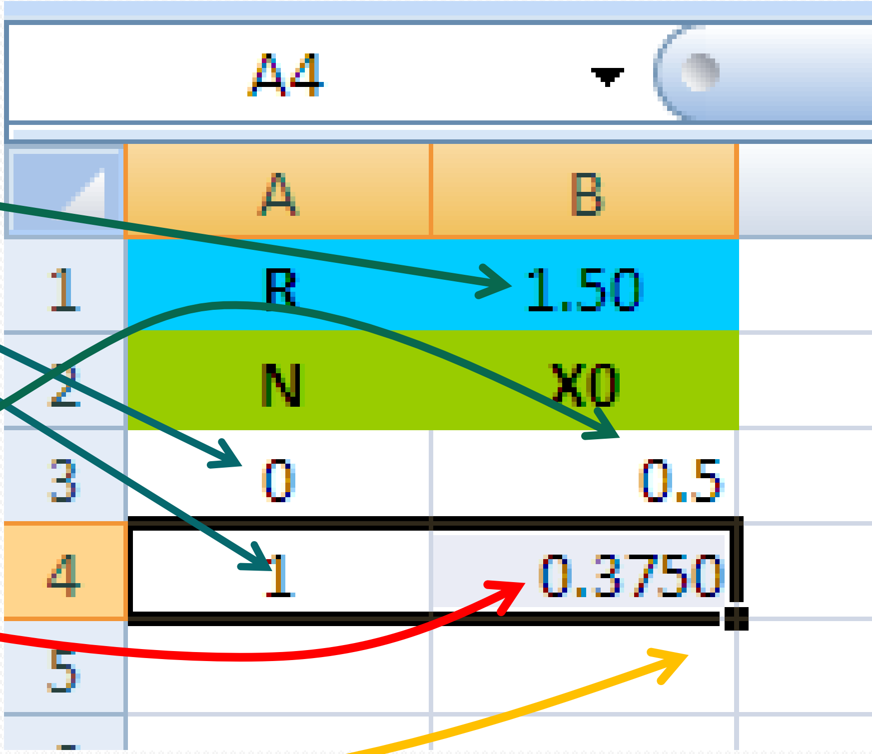
Se divertindo com o Applet

- Varie **r** para um $\mathbf{x_0}$ qualquer e veja que para **r<1** a solução final (atrator) depois de várias iterações é sempre **zero**:
  - variando $\mathbf{x_0}$ o que muda é a rapidez com que a solução se aproxima do atrator
- Agora faça **r=2,5** e veja que **zero** não é mais um atrator, o novo atrator é a intersecção da parábola **f(x)=x r(1-x)** com a reta **f(x)=x**, para qualquer valor de $\mathbf{x_0}$.
- Agora faça **r=3,2** e veja que agora a interseção da parábola e da reta **não** é mais um atrator. Temos **dois** atratores, dados pela interseção do quadrado com a parábola.
- Aumente **r** ainda mais e veja aparecer o caos!

Calculando o Mapa Logístico(3)

- Ao invés de fazer "na mão" podemos usar o Excel

- Valores Constantes:
  - R na célula B1
  - N nas células A3 e A4
  - x0 na célula B3
- A célula B4 (x1) vale:
  - =B$1*B3*(1-B3)
- Selecionar a linha 4
  - E arrastar com o mouse para repetir a fórmula para as outras linhas.



Calculando o Mapa Logístico(3)

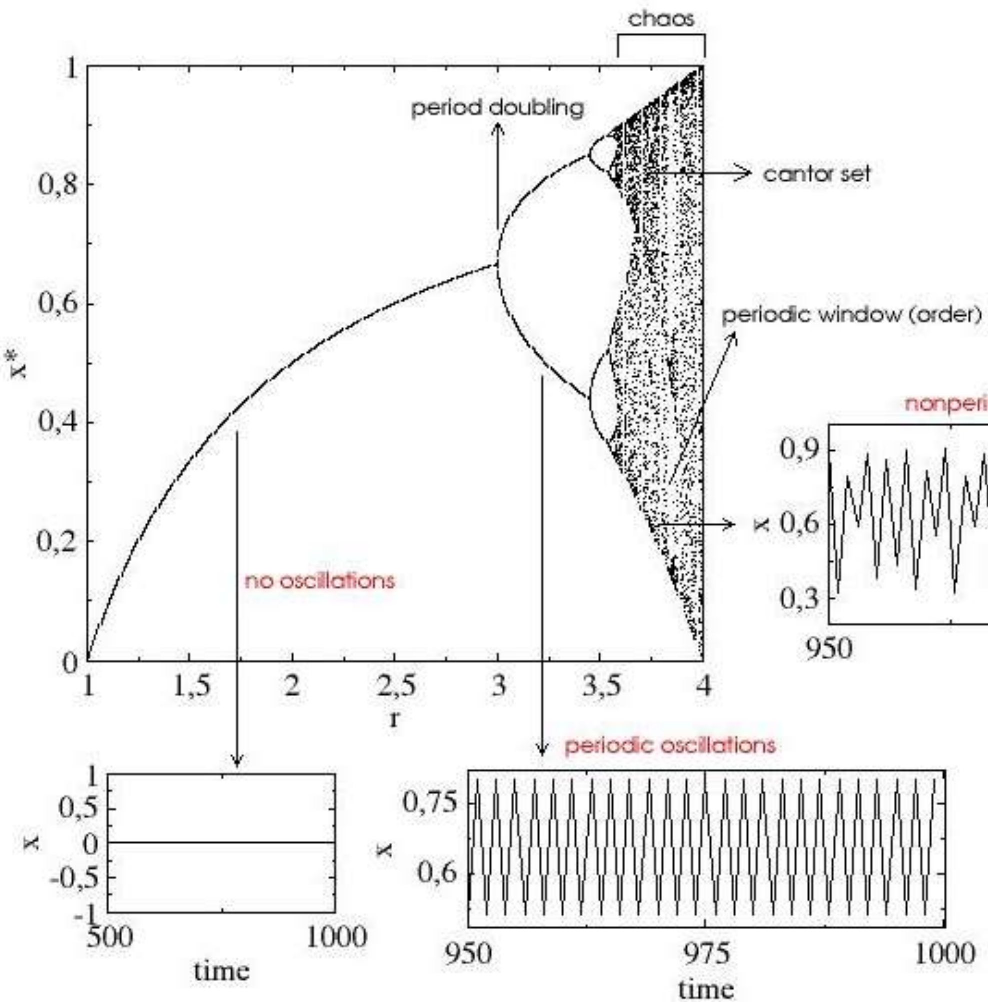
Você pode calcular para vários “R”s de uma vez, ou mesmo definir um intervalo de valores onde serão calculados!

Lembre-se que o número de iterações é importe, para ter certeza do valor é bom ter pelo menos 500 iterações.

C4 =C1+(E1-C1)/100*C3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		min=	0.2	max	4					
2										
3		0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	R	0.20	0.24	0.28	0.31	0.35	0.39	0.43	0.47	0.50
5	N	X0								
6	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
7	1	0.0500	0.0595	0.0690	0.0785	0.0880	0.0975	0.1070	0.1165	0.1260
8	2	0.0095	0.0133	0.0177	0.0227	0.0283	0.0343	0.0409	0.0480	0.0555
9	3	0.0019	0.0031	0.0048	0.0070	0.0097	0.0129	0.0168	0.0213	0.0264
10	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

O Diagrama de Bifurcação



- Para alguns valores de R o sistema tem um atrator
- Para outros valores, tem dois
- ... a cada bifurcação, dobramos o número de atratores
- ... o que por fim nos leva ao caos!

O Diagrama de bifurcação é um gráfico dos atratores em função do parâmetro de controle

Se divertindo com a Planilha

O que é interessante de se observar:

- Faça gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle r.
  - Por exemplo varie r de 0.5 até 4 de 0.25 em 0.25. O que acontece? Deixe x_0 fixo em 0.5.
- O número de iterações é importante a solução deve atingir a estabilidade (quando isso é possível) (digamos 500 no mínimo)
- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas contra o parâmetro de controle. Veja o que ocorre.

Prevendo os Atratores

- Há uma maneira de prever quais seriam os atratores?
  - Quando chega no atrator qualquer iteração fornece sempre o mesmo valor. Matematicamente:

$$x_{n+1}=x_n \Rightarrow rx_n(1-x_n)=x_n$$

Intersecção da parábola com a reta!

  - As soluções dessa equação são:

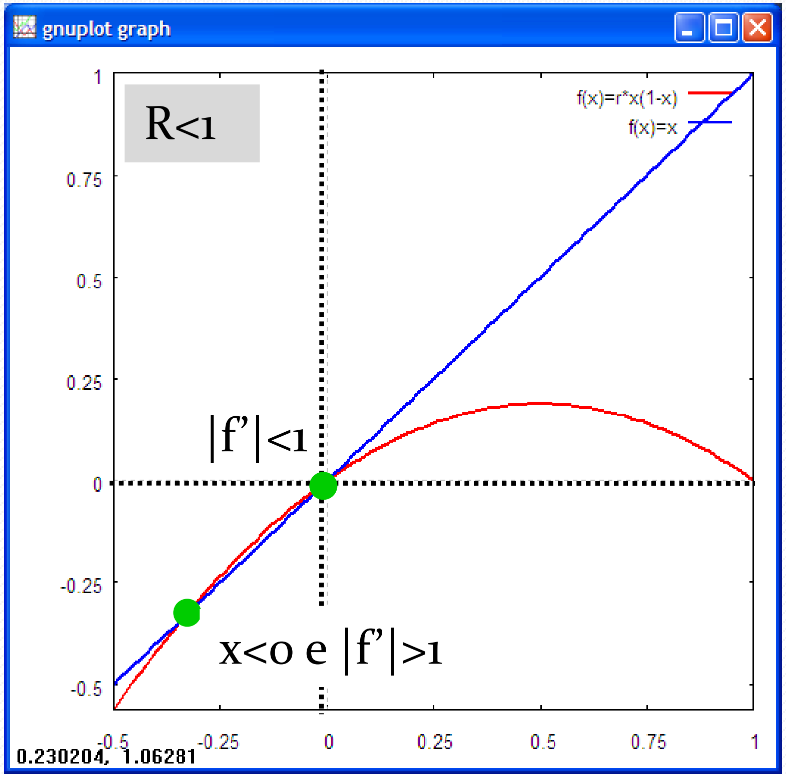
$x_n=0$ e $x_n=(1-1/r)$

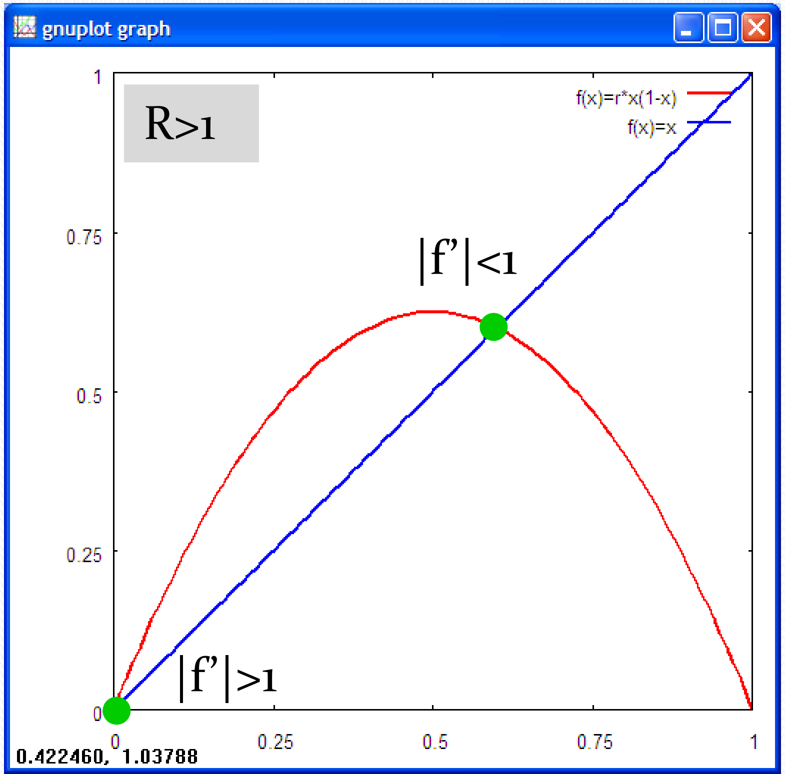
- **Será que ambas as soluções são atratores?**

Prevendo Atratores

- Vimos no Applet que para **r<1, x_n=0** é o atrator e **x_n=(1-1/r)** não é
- Vimos na planilha que para **r>1**, **x_n=(1-1/r)** é o atrator e **x_n=0** não é.
- Onde ocorre essa troca? e qual a condição para ser um atrator?

- Não vamos provar matematicamente, mas a condição para ser um atrator é que **módulo da derivada f'(x_n) seja menor que 1** (ou seja que a parábola não esteja mais inclinada do que a reta)





As Soluções de $x_{n+1}=x_n$

- A derivada é simplesmente:

$$f'(x_n)=r-2rx_n$$

- Caso $x_n \to 0$
  - $f'(0)=r$
  - Para que seja um atrator $|f'| < 1 \Rightarrow -1<r<1$
  - e como $r>0$ então: $0<r<1$
- Caso $x_n \to 1-1/r$
  - $f'(1-1/r)=2-r$
  - Para que seja atrator $|f'|<1 \Rightarrow |2-r|<1 \Rightarrow 1<r<3$

- **VERIFIQUEM isso no applet!**

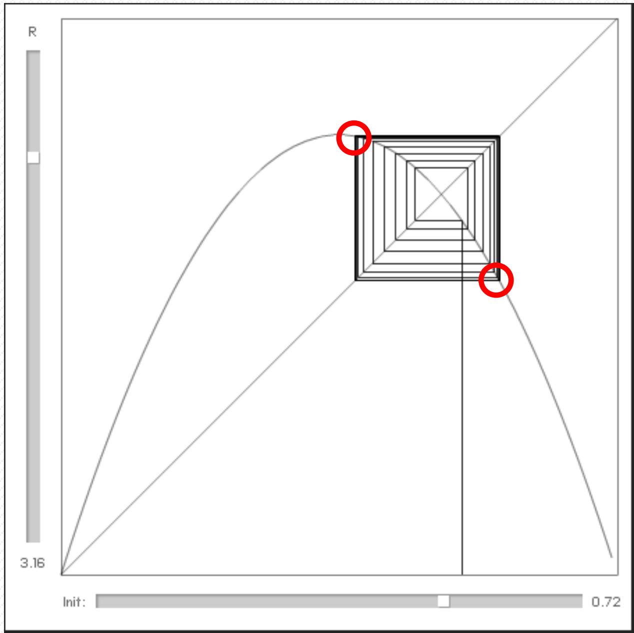
Prevendo 2 Atratores

- Observamos na planilha e no applet que para determinados valores de **r>3**, não tem **1** atrator, mas tem **2** atratores!
- Como prever isso? Basta usar a condição **$x_{n+2}=x_n$**, o que significa que a cada duas iterações repete-se um valor

- Vamos calcular:

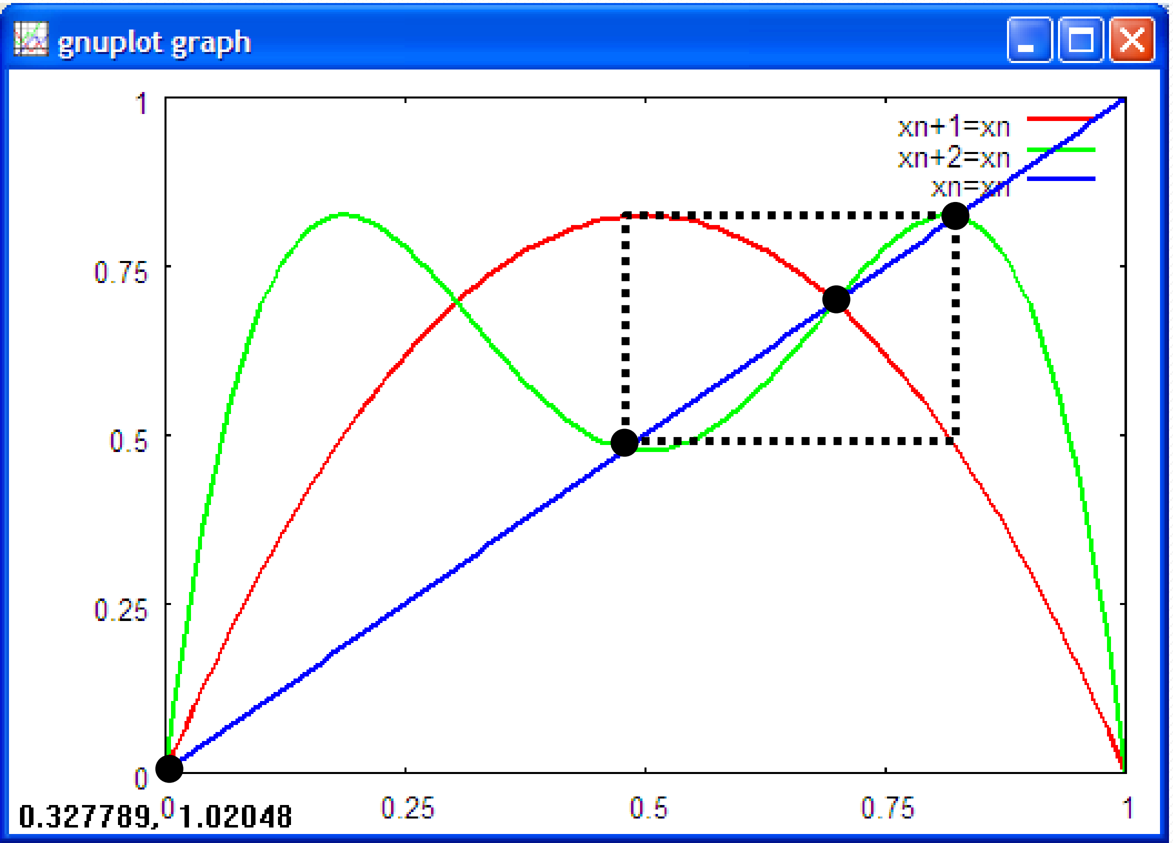
$$x_{n+2} = rx_{n+1}(1 - x_{n+1})$$
$$= r[rx_n(1 - x_n)][1 - rx_n(1 - x_n)] = x_n$$

  - **Ou seja, agora os atratores estão na intersecção da reta com um polinômio de 4º grau.**



As Soluções de $X_{n+2}=X_n$

- No gráfico vemos um exemplo das soluções. Duas delas coincidem com as anteriores, mas neste caso ambas tem **|f'|>1** e não servem.
- As outras duas soluções são:



$$x_n = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Aplicando a condição para a existência de atratores:

  $|f'(x_n)|<1$,

- chega-se à conclusão que

  $3<r<(1+\sqrt{6})$

- vocês podem verificar isso com o applet.

Para esta semana

- Semana que vem é feriado e não teremos aula!
- Assim, para a segunda-feira dia 29/3, leiam os artigos:
  - Li and Yorke, *Period Three Implies Caos*, American Mathematical Monthly, v. 82, n. 10 (1975) 985-992
  - Robert M. May, *Biological Populations Obeying Difference Equations: Stble Points, Stable Cycles, and Chaos*, J. Theor. Biol., v. 51 (1975) 511-524
- Escolham um deles e façam um resumo curto de não mais de uma página
- Me lembrem de enviar os artigos para a lista!

Para a próxima semana 1

A convergência para os atratores:

- Fazer os gráficos de x_n como função de n para vários valores de parâmetros de controle. Deixando x_0 fixo em 0.5, faça:
  - Três valores de r para $0<r<1$ (no mesmo gráfico)
  - Três valores de r para $1<r<3$ (idem)
  - Dois valores de r para $3<r<1+\text{raiz}(6)$ (idem)
  - **Atenção: que intervalo de n é interessante mostrar para cada um deste gráficos? Precisa mostrar até n=500? Queremos ver os regimes transientes e estacionários.**
- Para cada intervalo, explique o que esta ocorrendo:
  - Qual o numero de atratores?
  - Por que uma determinada solução é o atrator?
  - Por que existe(m) esse(s) atrator(es)?

Para a próxima semana 2

Sensibilidade a condição inicial:

- Fazer gráficos de x_n como função de n para os regimes **com e sem caos** partindo de 2 condições iniciais muito próximas: $x_0=0.5$, $x_0=0.50001$
  - **Atenção:** Queremos comparar a evolução das soluções.

Diagrama de bifurcação:

- Faça um gráfico dos valores das soluções estabilizadas (os valores lá no final da tabela) em função do parâmetro de controle.
  - **Atenção:** O número de iterações é importante pois a solução deve atingir a estabilidade (quando existe). No mínimo 500 iterações.
- Determine a posição da 1º, 2º e 3º bifurcação e calcule a constante de **Constante de Feigenbaum** (com incerteza)

Dicas

- A planilha esta nos computadores do laboratório
- Vocês podem levar a tabela para casa, mas tem que cumprir a presença no lab. Aproveitem para discutir com os colegas e tirar dúvidas com os monitores.